Відокремлений структурний підрозділ «Київський фаховий коледж комп’ютерних технологій та економіки Національного авіаційного університету»

Філєр Залмен, Чуйков Артем

ГІПОТЕЗА РІМАНА ТА НЕРІВНОСТІ У КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

Поняття «нерівність», яка класично розв'язується у множині дійсних чисел, можна розширити на множину комплексних чисел за допомогою введення порядку у множину C: $a+bi<c+di \Leftrightarrow a<c$ або $a=c$ і $b<d$. Це такий же порядок, як у бібліографії: слова пишуться у порядку А, Б і т. д. Але якщо перші літери однакові, то порядок встановлюється по другій літері. Або як білети і місця у театрі: якщо номери рядів різні, то номери білетів порівнюються за номерами рядів; для одного і того ж ряду номер встановлюється по місцю. Таким чином, розв'язком нерівності $f(z)\{>,<,\geq,\leq\}0$ є підмножина комплексної площини. Коренями відповідного рівняння $f(z)=0$ є точки перетину ліній $\operatorname{Re} f(z)=0$ і $\operatorname{Im} f(z)=0$. На рис. 1 червоними точками показано корінь z=0 кратності 2 функції $f(z)=z^4+z^2$. Там кут між дотичними в точці О складає π/2. Пунктиром показано лінії $\operatorname{Im}(z^4+z^2)=0$. Пунктирна гіпербола не перетинається із гіперболою – границею області $\operatorname{Re}(z^4+z^2)=0$. Аналогічна ситуація з коренем кратності 3 функції $f(z)=z^4+z^3$ (рис. 2), який лежить на перетині трьох пунктирних ліній $\operatorname{Im}(z^4+z^3)=0$.

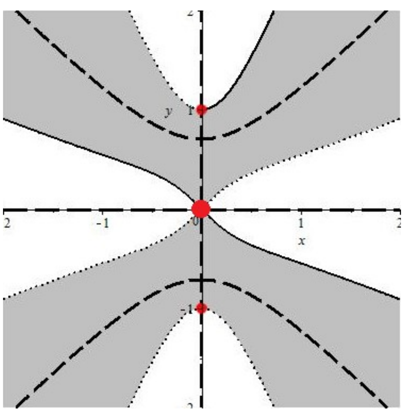

Рис. 1. Корінь кратності 2

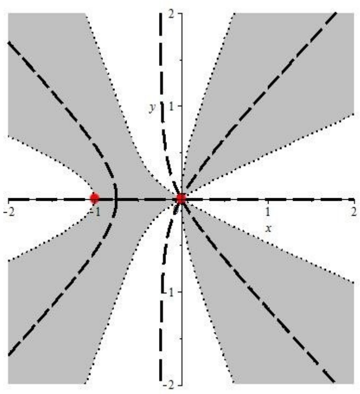

Рис. 2. Корінь кратності 3

Цей метод допомагає осмислити проблему Рімана про нулі ζ - функції. Експериментально перевірено, що багато «перших» її нетривіальних нулів мають дійсну частину $x = 0,5$. Ординати коренів лежать на послідовних листах багатозначної оберненої функції Рімана. Уявити їх розташування на плоскому листі можна за допомогою рис. 3, на якому показано розташування перших шести нетривіальних нулів. Вони є точками перетину границь областей, де $\operatorname{Re}\zeta(z) < 0$ (сині області) з лініями $\operatorname{Im}\zeta(z) = 0$ (червоні лінії).

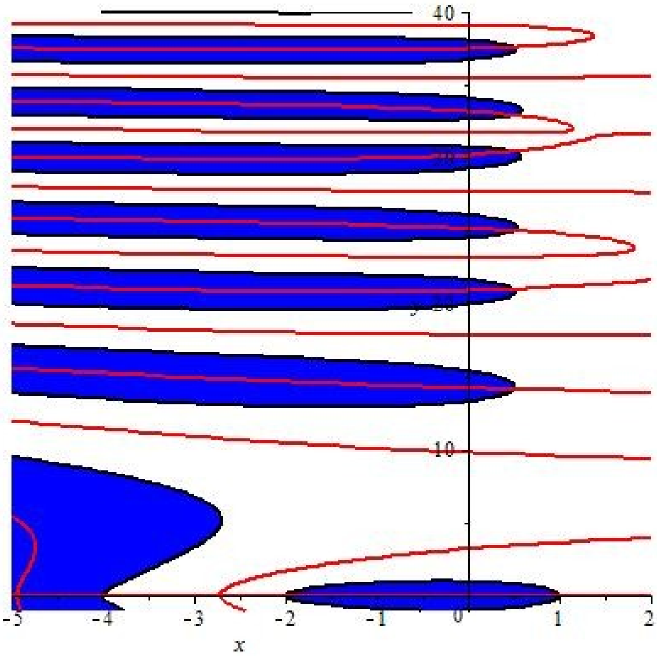

Рис. 3. Розташування нулів ζ - функції

На рис. 4 зображено розташування областей, які виділені кольорами: $\operatorname{Re}\zeta(z) < 0$ – темним (називатимемо їх «глибинами») і $\operatorname{Re}\zeta(z) > 0$ – світлим (називатимемо їх «висотами»). Нулем функції є перетин лінії $\operatorname{Re}\zeta(z) = 0$ (границя темної и світлої областей) з лінією $\operatorname{Im}\zeta(z) = 0$, показаної червоним. На рис. 3 також показані зони глибин $-0,75 < \operatorname{Re}\zeta(z) < 0$, $-1,5 < \operatorname{Re}\zeta(z) < -0,75$, і зони висот $0 < \operatorname{Re}\zeta(z) < 0,5$, $0,5 < \operatorname{Re}\zeta(z) < 1$, $1 < \operatorname{Re}\zeta(z) < 1,5$. Бачимо нулі функції у точці $z_k = 0,5 + iy_k,\ k \in \{4;5\}$, де $y_4 \approx 30,5,\ \ y_5 \approx 33$. Таким чином, *якщо* аналогічна структура зберігається для **всіх** нетривіальних коренів $\zeta(z)$, то теорема Рімана *доведена*. Дійсна частина кореня не може відрізнятись від 0,5, оскільки кореню $z_1 < 0,5$ відповідає корінь $z_2 = 1 - z_1$ у тій самій полосі. Але він лежатиме у півполосі $\zeta(z) > 0$, а це суперечить тому, що $\zeta(z_2) = 0$. Якщо ж $z_1 > 0,5$, то $z_2 = 1 - z_1$ лежатиме в області, де $\zeta(z) < 0$, що теж неможливо. Тому $z_2 = z_1 = 0,5$.

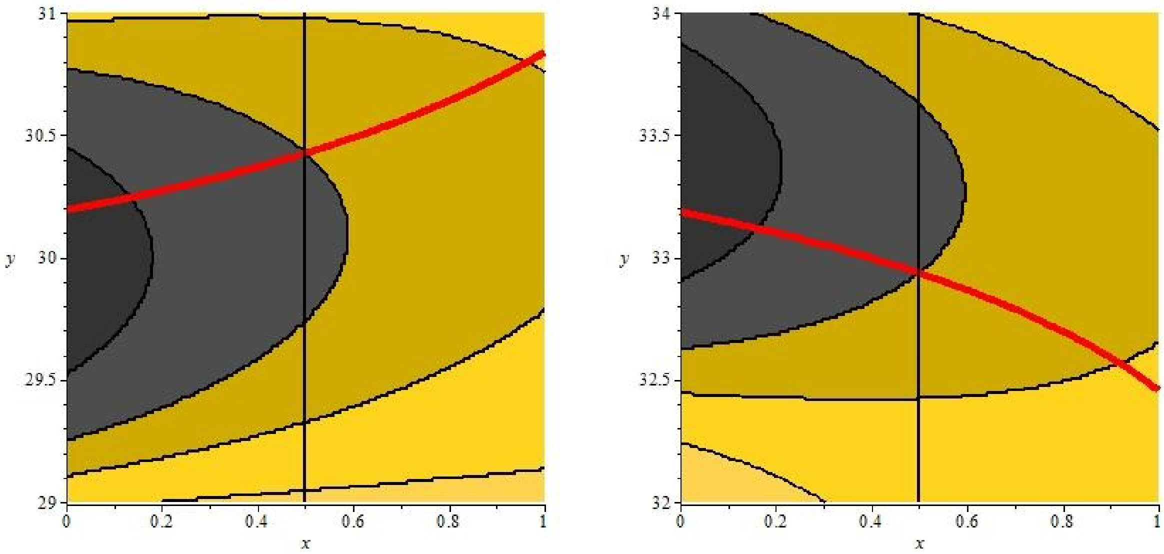

Рис. 3. Околи четвертого і п'ятого нулів ζ-функції Рімана

На рис. 4. показані області $\operatorname{Re}\zeta(z)<0$ (синій колір) і $\operatorname{Im}\zeta(z)<0$ (рожевий колір) в околі цих двох коренів. Білий колір виділяє область, де Reζ(z)>0. Якщо такі області містяться в околі **всіх** коренів у критичній полосі, то гіпотеза Рімана доведена. Фінітизація показує, що так і є.

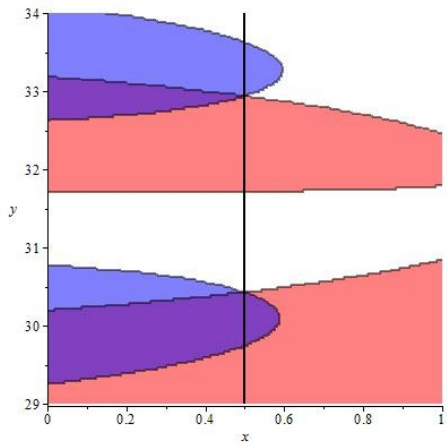

Рис. 4. Області $\operatorname{Re}\zeta(z)<0$ і $\operatorname{Im}\zeta(z)<0$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1 Дербишир Дж. Простая одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешённая проблема в математике. М.: Астрель, 2010. 464 с.

2 Ткаченко С. П., Філер З. Ю. Комплексні розв'язки квадратної нерівності. *Математика в школі*, 2003. №2. С. 47-49.

3 Філєр З. Ю., Чуйков А. С. Методика пошуку комплексних розв'язків нерівностей способом нев'язки. *Фізико-математична освіта*, 2021. №5 (31). С. 72-79.