Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

ДЕЯКІ МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ ОЛІМПІАДНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

ГАЄВСЬКИЙ Микола, ІЗЮМЧЕНКО Людмила, КЛЮЧНИК Інна

Нерівності застосовуються у всіх галузях математики, вони мають дуже багато різних цікавих властивостей та численних застосувань. Досить часто важко знайти доведення чи розв'язання нерівності, не завжди досліднику вдається знайти коротке та елегантне рішення проблеми. На даний час дана тематика є досить обширною і різноманітною – від класичних нерівностей до нерівностей, що отримані із застосуванням новітніх технологій.

Розглянемо деякі прийоми доведення нерівностей. Якщо в нерівності слід оцінити знизу величину на зразок $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$, якщо відомо, що сума $x_1+x_2+\ldots+x_n$ є фіксованою, то буває простіше встановити допоміжну нерівність

$$f(x)\geq f(a)+f'(a)(x-a),\ \text{де}\ a=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Проілюструємо цей метод на наступному прикладі.

Задача. Довести, що для невід'ємних чисел a,b,c,d таких, що $a+b+c+d=1$ має місце нерівність

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}.$$

1 спосіб. З умови задачі слідує, що $0\leq a,b,c,d\leq 1$. Запишемо нерівність в такому вигляді $6a^3-a^2+6b^3-b^2+6c^3-c^2+6d^3-d^2\geq\frac{1}{8}.$

Розглянемо функцію $f(x)=6x^3-x^2$ при $x\in[0,1]$, для неї $f'(x)=18x^2-2x,\ f''(x)=36x-2$. Як бачимо, на проміжку $[0,1]$ функція не є опуклою.

Розглянемо допоміжну нерівність

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) + f'\left(\frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow 6x^3 - x^2 \geq \frac{1}{32} + \frac{5}{8}\left(x - \frac{1}{4}\right) \text{ або}$$

$$6x^3 - x^2 \geq \frac{5x-1}{8} \Rightarrow 48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0 .$$

Далі, використавши теорему Безу про корені многочлена, бачимо, що $48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 = (4x-1)^2(3x+1) \geq 0$ при $x \in [0,1]$, тобто, допоміжна нерівність вірна.

Інколи в справедливості допоміжної нерівності можна переконатися побудувавши графіки.

Отже,

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) = 6a^3 - a^2 + 6b^3 - b^2 + 6c^3 - c^2 + 6d^3 - d^2 \geq$$

$$\geq \frac{5a-1}{8} + \frac{5b-1}{8} + \frac{5c-1}{8} + \frac{5d-1}{8} = \frac{5(a+b+c+d)-4}{8} = \frac{1}{8}.$$

Нерівність доведено.

Дану нерівність можна також довести використавши теорему про $(n-1)$ рівних значень: Якщо $f(x)$ диференційовна функція з однією точкою перегину, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – деякий набір чисел із фіксованою сумою, то величина $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ набуває свого найбільшого або найменшого значення за умови рівності $n-1$ значень $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1}$.

2 спосіб.

Аналогічно розглянемо нерівність

$$6a^3 - a^2 + 6b^3 - b^2 + 6c^3 - c^2 + 6d^3 - d^2 \geq \frac{1}{8}$$

та функцію $f(x) = 6x^3 - x^2$ при $x \in [0,1]$, для неї $f'(x) = 18x^2 - 2x,\ f''(x) = 36x - 2$. Як бачимо, вона має одну точку перегину.

Нехай $a = b = c = x$ та $d = 1 - 3x$, як бачимо $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$. Розглянемо функцію $g(x) = 3f(x) + f(1-3x)$. Легко отримати, що

$$g(x) = -144x^3 + 150x^2 - 48x + 5$$

та $g'(x) = -432x^2 + 300x - 48 = 0$ при $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{4}{9}$. Як бачимо, x_2 нам не підходить.

В силу неперервності функції та застосування алгоритму знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку встановимо, що $\min\limits_{x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]} g(x) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8}$.

Отже,

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(d) = 6a^3 - a^2 + 6b^3 - b^2 + 6c^3 - c^2 + 6d^3 - d^2 \geq g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{8}.$$

Нерівність доведено.

Зауважимо, що другий метод є в деякому розумінні грубим, оскільки він передбачає досить багато обчислень, які досить часто можуть бути громіздкими, але його перевагою є чітка алгоритмічна схема знаходження найбільших та найменших значень функції на відрізку.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Evan Chen. A Brief Introduction to Olympiad Inequalities - / URL: https://web.evanchen.cc/handouts/Ineq/en.pdf.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Гаєвський Микола Вікторович – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Ізюмченко Людмила Володимирівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Ключник Інна Геннадіївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.