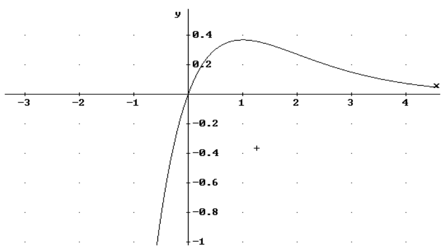
Центральноукраїнський державний педагогічний університету
імені Володимира Винниченка.
Волков Юрій, Войналович Наталія

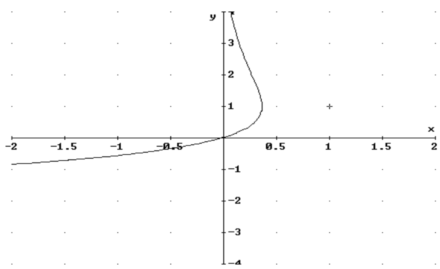
ФУНКЦІЯ ДЕРЕВА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Функція x=T(y) називається функцією дерева, якщо вона є оберненою до функції $y = xe^{-x}$. Це один з важливих прикладів неелементарної функції, якій в україномовній літературі практично не приділяється уваги. А через те, що ця функція широко використовується в різних розділах математики, а особливо в комбінаториці й теорії ймовірностей, виникає проблема знайомства майбутніх вчителів математики з функцією дерева.

Функція дерева і пов'язана з нею функція Ламберта *W(x)=-T(-x)* почала вивчатися ще Ейлером [1]. Про історію появи цих функцій можна прочитати в статті [2] за 1996 рік. Ця стаття відродила у дослідників інтерес до функцій Ламберта і функції дерева. З'явився ряд публікацій на цю тему. Відмітимо серед них лише публікації [3] і [4].

Графіки функцій xe^{-x} і $T(x)$ такі: (для $T(x)$ береться вітка, яка визначена на проміжку $(-\infty, e^{-1})$).





Функція дерев пов'язана з функцією Ламберта W (вона є оберненою до функції $y = xe^{x}$) $W(x) = -T(-y)$ або $T(y) = -W(-y)$. Для отримання значень функції дерева можна використовувати математичні пакети Mathematica (це функція ProductLog[z]) і Maple (це функція LambertW(x)).

В роботі показано спосіб отримання степеневих рядів для функції дерева і ряду функцій, які виражаються через функцію дерева. Розглянуто ймовірнісні розподіли, які породжені отриманими рядами. Маємо,

$$T(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}n^{n-1}y^{n}=y+\frac{2}{2!}y^{2}+\frac{3^{2}}{3!}y^{3}+\cdots+\frac{n^{n-1}}{n!}n^{n}+\cdots$$

$\dfrac{T^{r}(y)}{(1-T(y))^{s}}=\sum_{n\geq 1}\dfrac{t_n(r,s)}{n!}y^{n}$, многочлени $t_n(r,s)$, які з'являться в цьому розкладі, називаються узагальненими многочленами дерева. Звідси

$$t_n(r,s)=n^{n-1}\sum_{k=r}^{\infty}k\binom{k-r+s-1}{s-1}\frac{n!}{(n-k)!n^{k}}.$$

Зокрема, $t_n(s):=t_n(0,s)$ це відомі многочлени дерева ([1],стор.336)

Знайдемо многочлени $t_n(r,s)$. Для цього розкладемо в степеневий ряд

функцію $\dfrac{T^{r}(y)}{(1-T(y))^{s}}$. Матимемо

$$\frac{T^{r}(y)}{(1-T(y))^{s}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+s-1}{k}T^{k+r}=\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k-r+s-1}{k-r}T^{k}=\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k-r+s-1}{s-1}T^{k}=$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n^{n-1}}{n!}y^{n}\sum_{k=r}^{\infty}k\binom{k-r+s-1}{s-1}\frac{n!}{(n-k)!n^{k}}.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при y^{n} в цьому виразі і виразі (9), отримаємо

$$t_n(r,s)=n^{n-1}\sum_{k=r}^{\infty}k\binom{k-r+s-1}{s-1}\frac{n!}{(n-k)!n^{k}}.$$

Зокрема, для звичайних многочленів дерева отримаємо відому формулу з [3],стор. 339.

Наслідок 1.

$$t_n(s)=t_n(0,s)=n^{n-1}\sum_{k=r}^{\infty}k\binom{k+s-1}{s-1}\frac{n!}{(n-k)!n^{k}}$$

Наслідок 2. $t_n(1,1)=\ n^{n-1}\sum_{k=r}^{\infty}k\dfrac{n!}{(n-k)!n^{k}}=n^{n}$

Наслідок 3. $rt_n(r,s+2)+(s-r)t_n(r+1,s+2)=nt_n(r,s)$

Коефіцієнти отриманих рядів невід'ємні, а це дозволяє будувати арифметичні розподіли випадкової величини ξ, які називаються розподілами степеневих рядів. Якщо позначити математичне сподівання $\mathrm{E}\xi$ таких розподілів через *x*. а дисперсію $\mathrm{D}\xi$ через $\nu(x)$, то отримаємо наприклад,

для $f(T(y)=\dfrac{T(y)^{r}}{(1-T(y))^{s}}$. $x=\dfrac{r+(s-r)T(y)}{(1-T(y))^{2}}$,

$$(4x^2(s-r+2x-a)(4sx+(r-s)^2+(r-s)a)/(r-s+a)^4 ..$$

для $f(T(y))=\exp(sT(y))=\sum_{n\geq 1} s(n+s)^{n-1}\frac{y^n}{n!}, s\in N$.

$$x=\frac{sT(y)}{1-T(y)},\ v(x)=\frac{x^2(x+s)}{s^2}, x\geq 0 \cdot$$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

[1] Euler L, Deserie Lambertine plurimisque eins insignibus propriantatibus/ Euler L.─Acta Acad.Scient. Petropul.2 29-51, 1783.

[2] Corless R.H., On the Lambert W function,/ Corless R.H., Gonnet G.H., Jeffrey D.E. and Knuth D.E. ─ Advantes in Computational Mathematice, vol.5, (1996), 339-359.

[3] D.E. Knuth , A recurrence related to Trees/ D.E. Knuth and B. Pittel ─ Proc. the Amer. Math. Soc., Vol.105, Number 2, 1989, pp.335-349.

[4] D.E. Knuth. The Art of computer programming, v.1/ D.E. Knuth ─Addison-Wesley, 1997.