Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

ІЗЮМЧЕНКО Людмила, Гаєвський Микола

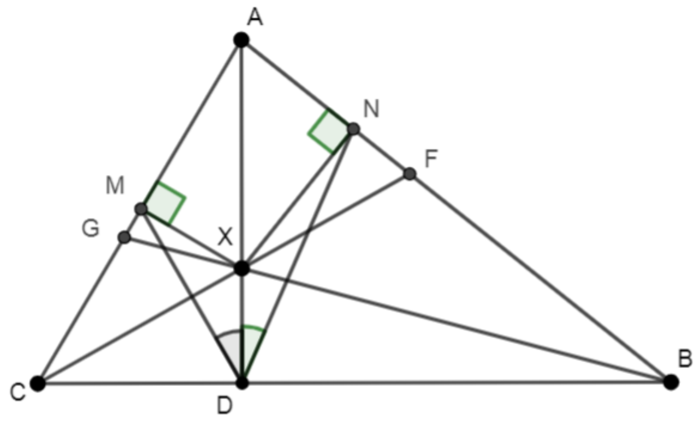
МАТЕМАТИЧНА ПІДГОТОВКА ОБДАРОВАНИХ УЧНІВ ДО УЧАСТІ У МАТЕМАТИЧНИХ ТУРНІРАХ

Дослідження проблеми обдарованості має довготривалу історію у вітчизняній та зарубіжній педагогіці і психології, але до цього часу існує багато «білих плям» у цьому питанні, що робить актуальним подальше вивчення даної проблеми. Потенціал обдарованості є найціннішим ресурсом духовного поступу й розвитку людства, а тому його слід розумно використовувати; робота з обдарованими учнями, які з задоволенням вивчають математику, знають її і бажають знати ще більше, має бути одним з пріоритетних напрямків у навчальній діяльності вчителя.

Розв'язування конкурсних та олімпіадних задач учнями і студентами є гарним підґрунтям та підготовкою до майбутньої наукової діяльності, оскільки засвоєння методів розв'язування олімпіадних задач вимагає від них активної та зосередженої самостійної роботи, а також розвиває їхню творчість, креативність та піднімає рівень зацікавленості до математики.

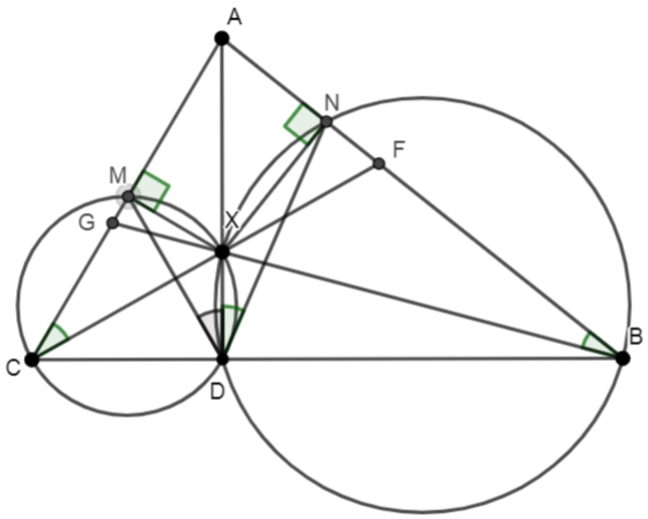
На відміну від традиційних олімпіад турнір юних математиків – це колективне змагання, яке дає можливості школярам успішно проводити науковий пошук та ознайомитися з різноплановою математичною літературою під керівництвом тренерів. Турнірні задачі передбачають необхідність наукового дослідження; результат залежить від глибини розуміння проблеми, певних обмежень та додаткових умов, часто такі дослідження передбачають можливість узагальнити проблему.

Розглянемо задачу з відбіркового етапу XXII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка [1], який відбувся 3 жовтня 2019 року у місті Кропивницький: На висоті *AD* гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC з попарно різними сторонами вибрали деяку точку X, з якої на сторони AB та AC опустили перпендикуляри XN та XM відповідно. Виявилося, що DA – бісектриса кута MDN. Доведіть, що X – точка перетину висот ΔABC.



Проведемо через точку X прямі CX, BX до продовження з протилежними сторонами, $F\in AB$, $G\in AC$. Наша мета – довести, що $CF\perp AB$, $BG\perp AC$, тобто CF і BG є висотами, а тому X – ортоцентр ΔABC.

Позначимо $\angle XDM=\angle XDN=\varphi$. Розглянемо чотирикутник $CDXM$, два протилежні кути якого $\angle M=\angle D=90^o$, а тому навколо чотирикутника можна описати коло. Кути $\angle XDM$ і $\angle XCM$ є вписаними в це коло, спираються на одну дугу MX, а тому є рівними $\angle XCM=\angle XDM=\varphi$.



Аналогічно: $BDXN$, два протилежні кути якого $\angle N=\angle D=90^o$, а тому $\angle XBN=\angle XDN=\varphi$.

Нехай в ΔABC $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$. Тоді $\angle DCX=\gamma-\varphi$, $\angle CAD=90^o-\gamma$, $\angle BAD=90^o-\beta$, $\angle DBX=\beta-\varphi$.

Оскільки три чевіани CF, BG, AD перетинаються в одній точці X, то справедлива теорема Чеви, яку запишемо у тригонометричній формі: $\frac{\sin DCX}{\sin XCA}\cdot\frac{\sin CAD}{\sin DAB}\cdot\frac{\sin ABX}{\sin XBD}=1$, звідки $\frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin(90^o-\gamma)}{\sin(90^o-\beta)}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin(\beta-\varphi)}=1$. Після спрощень отримаємо $\frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\sin(\beta-\varphi)}\cdot\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}=1$, звідки чисельник дорівнює знаменнику: $\sin(\gamma-\varphi)\cos\gamma=\sin(\beta-\varphi)\cos\beta$. Перетворивши добутки на суми, отримаємо $\frac{1}{2}(\sin(-\varphi)+\sin(2\gamma-\varphi))=\frac{1}{2}(\sin(-\varphi)+\sin(2\beta-\varphi))$, звідки отримаємо $\sin(2\gamma-\varphi)=\sin(2\beta-\varphi)$.

Оскільки $\varphi<\gamma<2\gamma<180^{o}$, то $0<2\gamma–\varphi<180^{o}$, аналогічно, $0<2\beta–\varphi<180^{o}$. З рівності синусів (кути лежать в межах від 0^{o} до 180^{o}) слідує дві можливості: або кути рівні, або в сумі дають 180^{o}:

1) $2\gamma–\varphi=2\beta–\varphi$, звідки $\gamma=\beta$, а це означає, що трикутник *ABC* рівнобедрений (що неможливо за умовою);

2) кути в сумі дають 180^{o}: $(2\gamma–\varphi)+(2\beta–\varphi)=180^{o}$, звідки $(\gamma–\varphi)+\beta=90^{o}$. З урахуванням того, що $\angle BCF=\gamma–\varphi$, $\angle CBF=\beta$ трикутника *CBF*, то звідси маємо, що третій кут цього трикутника дорівнює 90^{o}, тобто $\angle CFB=90^{o}$, а це означає, що *CF* є висотою трикутника *ABC*, *AD* також є висотою трикутника *ABC*, обидві прямі *CF* і *AD* проходять через точку *X*, отже, точка *X* є ортоцентром трикутника *ABC*.

З цього також слідує, що точки *M* і *G* та *N* і *F* збігаються (оскільки з однієї точки *X* не можна на сторону опустити два різні перпендикуляри). Задача доведена.

Зауважимо, що доступним для школярів старшої школи є також координатно-векторний метод доведення цієї задачі, який був використаний при підготовці учнів до турніру.

У даній роботі розглядалися різні факти, достатні для розв'язування конкурсної геометричної задачі, які використовувалися при роботі з обдарованими учнями у їх підготовці до математичного турніру.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Завдання для відбіркових етапів XXII Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М.Й. Ядренка / URL: https://padlet-

uploads.storage.googleapis.com/346309695/f097dc3144258255345d499b2b6ef6c8/List_IMZO_1980_20052019.pdf. (дата звернення 08.11.2019)