УДК 519.1

ВОЛКОВ Юрій Іванович –
доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка
ORCID ID: 0000-0002-2270-3407
e-mail: yulysenko@i.ua

ВОЙНАЛОВИЧ Наталія Михайлівна –
кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка
ORCID ID: 0000-0002-0523-7889
e-mail: vojnalovichn@gmail.com

УРНОВІ МОДЕЛІ В КОМБІНАТОРИЦІ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Для формування основних комбінаторних і ймовірнісних понять давно використовуються урнові схеми. Багато змістовних задач можна формулювати на мові урн і кульок, які розміщуються в цих урнах.

Наведемо приклади декількох моделей різних за змістом, які по суті еквівалентні моделі розміщення кульок по урнам.

Розміщення студентів по аудиторіях: аудиторії – урни, студенти – кульки; вікова класифікація: класи – урни, вік – кульки; стрільба: мішені – урни, кулі – кульки; класифікація аварій на дорогах по днях тижня: дні тижня – урни, аварії – кульки; дні народження: дні року – урни, люди – кульки; розміщення електронів на атомних орбітах: орбіти – урни, електрони – кульки; розподіл тварин по видах: види – урни, тварини –

кульки; розподіл захворювань по хворобах, хвороби – урни, хворі – кульки; гра в карти: гравці – урни, карти – кульки,

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Приклади застосування уранових моделей часто зустрічаються в навчальній літературі (див., наприклад, [1], [2], [3], [5]), але досліджень з методики застосування уранових схем при розв’язувані задач зустрічається мало.

Мета статті. На конкретних темах продемонструвати дидактичні можливості використання урнових схем при вивченні ряду понять комбінаторики та теорії ймовірностей

Методи дослідження. Використовуються методи комбінаторного і математичного аналізу.

Виклад основного матеріалу дослідження. Досліди з урнами, які ми будемо проводити (хоча б мислено) можуть бути різного типу: кульки виймаються з урни з поверненням або без повернення, кульки розкладаються по урнах. При цьому можна розглядати такі випадки: урни і кульки розрізнювальні (наприклад пронумеровані, або різного кольору), урни однакові, кульки різні, урни різні, кульки однакові, урни однакові і кульки однакові.

Найпростішим прикладом урнової моделі може бути такий: в урні знаходиться n білих кульок і m чорних. Навмання виймається кулька. Яка ймовірність того, що вона біла? З класичного означення ймовірності відразу ж отримаємо відповідь: $p = \frac{n}{m+n}$.

Перестановки з повторенням. Нехай в одній урні знаходяться кульки, які помічені одиничками, а в другій – кульки помічені нулями. З цих урн, вибраних навмання, виймаються кульки і розташовуються у послідовність нулів і одиничок довжиною n символів. На таку послідовність будемо дивитись як на n-значне двійкове число. Знайдемо кількість всіх таких чисел, у запису яких буде рівно k одиничок.

Позначимо цю кількість символом *C(n,k).* Розіб'ємо множину всіх таких чисел на два класи. До першого – віднесемо всі числа, які починаються з "0", до другого – ті, що починаються "1". Тоді у першому класі буде *C(n*-1,*k)* чисел, у другому – *C(n*-1,*k*-1*).* За правилом суми отримаємо рекурентне співвідношення $C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1)$ з початковим умовами $C(1,0) = 1$, $C(1,1) = 1$, $C(2,0) = 1$, $C(2,1) = 2$. Такій же рекурентності задовольняють числа $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)1}$, а це – число комбінацій з n по k, тобто, кількість k-елементних підмножин n-елементної множини.

Нехай тепер є n різних урн і k однакових кульок. Навмання розкладаємо кульки в урни і знайдемо число різних варіантів розташування кульок в урнах.

Для цього кожному способу розкладання поставимо у відповідність послідовності нулів і одиничок так: спочатку запишемо n–1 нуль, далі перед першим нулем послідовності запишемо стільки одиничок скільки кульок знаходиться в першій урні, перед другим нулем записуємо стільки одиничок скільки кульок знаходиться в другій урні і так далі, після останнього нуля запишемо стільки одиничок скільки кульок знаходиться в останній урні. В отриманій послідовності буде n+k–1 символів, серед яких буде k одиничок і n–1 нуль. Тому таких різних послідовностей буде $\binom{n+k-1}{k}$, а це є число комбінацій з повторенням з n елементів по k.

Нехай тепер з першої урни кульки виймаються з ймовірністю p, а з другої – кульки виймаються з ймовірністю $q = 1 - p$. Здійснимо n виймань. Тоді ймовірність отримати n-значне двійкове число, у запису якого рівно k одиничок, буде такою: $p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0,1,\ldots,n$ (це формула Бернуллі), тобто, отримаємо біноміальний розподіл.

Розподіл Паскаля. Нехай в урні знаходяться білі й чорні кульки, при цьому ймовірність вийняти з урни навмання білу кульку (успіх) дорівнює числу p, а чорну (невдача) – q=1–p. Будемо навмання виймати (з поверненням) з урни кульки до тих пір, поки не отримаємо r успіхів. Знайдемо розподіл такої випадкової величини ξ: кількість невдач до r-*го* успіху, які ми можемо отримати в результаті експерименту. Такий розподіл називається розподілом Паскаля.

Позначимо ймовірність такої події через $p_k(r) = \Pr\{\xi = k\},\ k = 0, 1, 2,\ \dots$. Ця подія може відбутися тоді і тільки тоді, коли серед r+k–1 випробувань рівно k привели до невдачі, а наступне (r+k)-те випробування привело до успіху. Ймовірність такої події за формулою Бернуллі дорівнює числу $\binom{r+k-1}{k} p^{r-1} q^k$, наступної – p, отже, $p_k(r) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k$. Цю формулу можна переписати ще й так: $p_k(r) = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k, k = 0, 1, 2, \dots,$ де $\binom{-r}{k} = \dfrac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!}$.

Гіпергеометричний розподіл. В урні знаходяться b білих і g чорних кульок. Навмання виймається r кульок (без повернення). Розглянемо випадкову величину ξ: кількість білих кульок, які при цьому можна отримати. Просте застосування комбінаторного правила добутку дає відповідь:

$$\Pr\{\xi = k\} = \binom{b}{k}\binom{g}{r-k} \Big/ \binom{b+g}{r}, k = 0, 1, 2, \dots, r.$$

Повчальним при цьому є методика отримання математичного сподівання і дисперсії такої випадкової величини ([2]). Введемо такі допоміжні випадкові величини $\xi_k = 1,\ k = 0, 1, 2, \dots, r$, або 0, в залежності від того, чи k-ий член вибірки буде білим чи чорним. Тоді отримаємо

$\Pr\{\xi_k = 1\} = \dfrac{b}{b+g}$, $\Pr\{\xi_k = 0\} = \dfrac{g}{b+g}$. Звідси математичне сподівання $\mathrm{E}\,\xi_k = \dfrac{b}{b+g}$, а дисперсія $\mathrm{D}\xi_k = \mathrm{E}\,\xi_k^2 - (\mathrm{E}\xi_k)^2 = \dfrac{bg}{(b+g)^2}$. Далі, якщо $k \neq j$, то $\xi_k\xi_j = 1$, якщо k-ий і j-ий члени вибірки виявилися білими, в інших випадках $\xi_k\xi_j = 0$. Оскільки $\Pr\{\xi_k\xi_j = 1\} = \dfrac{b(b-1)}{(b+g)(b+g-1)}$, то $\mathrm{E}(\xi_k\xi_j) = \dfrac{b(b-1)}{(b+g)(b+g-1)}$, $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_j) = -\dfrac{bg}{(b+g)(b+g-1)}$.

Отже, $\mathrm{E}(\xi = \xi_1 + \cdots + \xi_r) = \dfrac{rb}{b+g}$,

$$\mathrm{D}\xi = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{D}\,\xi_k + 2\sum_{j,k} \operatorname{cov}(\xi_j, \xi_k) = \frac{rbg}{(b+g)^2}\left(1 - \frac{r-1}{b+g-1}\right).$$

Від'ємний гіпергеометричний розподіл. В урні знаходиться x білих і y чорних кульок. З неї вийматимемо кульки до тих пір, поки не з'явиться біла кулька. Побудувати розподіл випадкової величини ξ: кількість чорних кульок до появи білої кульки. Множина значень цієї випадкової величини така: $\xi \in \{0, 1, \ldots, y\}$. Нехай $p_k = \Pr\{\xi = k\}, k = 0, 1, \ldots, y$. Тоді

$$p_0 = \frac{x}{x+y},\ p_1 = \frac{yx}{(x+y)(x+y-1)},\ p_2 = \frac{y(y-1)x}{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)}, \ldots,$$

$$p_k = \frac{y(y-1)\cdots(y-k+1)x}{(x+y)(x+y-1)\cdots(x+y-k+1)(x+y-k)} = \frac{x}{x+y}\binom{y}{k}\bigg/\binom{x+y-1}{k}, \quad (1)$$

$$p_y = \frac{y(y-1)\cdots(y-y+1)x}{(x+y)(x+y-1)\cdots(x+y-y+1)(x+y-y)},\ p_o + p_1 + \cdots + p_y = 1.$$

Перепишемо p_k так:

$$p_k = \frac{x}{x+y+k}\binom{y}{k}\bigg/\binom{x+y}{k}.$$

Звідси

$$1+\frac{y}{x+y-1}+\frac{y(y-1)}{(x+y-1)(x+y-2)}+\cdots=\frac{x+y}{x},$$

тобто, отримаємо нетривіальну тотожність

$$1+\sum_{k=0}^{y-1}\binom{y}{k+1}\Big/\binom{x+y-1}{k+1}=\frac{x+y}{x}.$$

Розглянуту схему можна узагальнити. В урні знаходиться x білих і y чорних кульок. З неї вийматимемо кульки до тих пір, поки не з'явиться m білих кульок. Побудувати розподіл випадкової величини ξ: кількість чорних кульок до появи білої кульки. Такий розподіл називається від'ємним гіпергеометричним розподілом ([5]). Множина значень випадкової величини така: $\xi\in\{0,1,\ldots,y\}$.

Нехай $p_k=\Pr\{\xi=k\},k=0,1,.,,y$. Тоді міркування, аналогічні до попередніх, дають такі ймовірності:

$$p_0=\binom{x}{m}\Big/\binom{x+y}{m},\ p_1=p_0\binom{m}{m-1}\binom{y}{2}\Big/\binom{x+y-m}{1},$$

$$p_1=p_0\binom{m}{m-1}\binom{y}{2}\Big/\binom{x+y-m}{2},$$

$$p_n=p_0\binom{m+n-1}{m-1}\binom{y}{n}/\binom{x+y-m}{n},n=0,1,2,\ldots,y. \tag{2}$$

А через те. що $p_o+p_1+\cdots+p_y=1$. то матимемо таку тотожність

$$1+\sum_{k=0}^{y-1}\binom{y}{k+1}\binom{k+m}{m\text{-}1}\Big/\binom{\mathrm{x}+y-m}{k+1}=\binom{x+y}{m}\Big/\binom{x}{m}.$$

Відмітимо такі частинні випадки формули (1) для m=2:

$$p_n=(n+1)\frac{x(x-1)}{(x+y)(x+y-1)}\binom{y}{n}\Big/\binom{x+y-2}{n},n=0,1,\ldots,y, \tag{3}$$

для m=3:

$$p_n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\frac{x(x-1)(x-2)}{(x+y)(x+y-1)(x+y-2)}\binom{y}{n}\Big/\binom{x+y-3}{n},n=0,1,\ldots,y \tag{4}$$

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію досліджуваного розподілу.

З (3) випливає, що

$$\sum_{n=0}^{y}(n+1)\binom{y}{n}\bigg/\binom{x+y-2}{n}=\frac{(x+y)(x+y-1)}{x(x-1)},$$

звідси

$$\sum_{n=0}^{y}n\binom{y}{n}\bigg/\binom{x+y-2}{n}=\frac{(x+y)(x+y-1)}{x(x-1)}-\sum_{n=0}^{y}\binom{y}{n}\bigg/\binom{x+y-2}{n}.$$

Далі, з (1) випливає $\sum_{n=0}^{y}\binom{y}{n}\bigg/\binom{x+y-2}{n}=\frac{x+y-1}{x-1}$.

Тому

$$\sum_{n=0}^{y}n\binom{y}{n}\bigg/\binom{x+y-2}{n}=\frac{(x+y)(x+y-1)}{x(x-1)}-\frac{(x+y-1)}{(x-1)}=\frac{y(x+y-1)}{x(x-1)},$$

а звідси, взявши замість x $x+1$, отримаємо математичне сподівання для випадку m=1: $\mathrm{E}\,\xi=\sum_{n=0}^{y}np_n=\frac{y}{x+1}$.

Для знаходження дисперсії скористаємось співвідношенням (4).

Матимемо $\sum_{n=0}^{y}(n+1)(n+2)\binom{y}{n}\bigg/\binom{x+y-3}{n}=2\binom{x+2}{3}\bigg/\binom{x}{3}$.

Звідси $\sum_{n=0}^{y}n^2\binom{y}{n}\bigg/\binom{x+y-3}{n}=2\binom{x+2}{3}\bigg/\binom{x}{3}-$

$$3\sum_{n=0}^{y}n\binom{y}{n}\bigg/\binom{x+y-3}{n}-2\sum_{n=0}^{y}\binom{y}{n}\bigg/\binom{x+y-3}{n},$$

далі, використовуючи співвідношення (1), (2) і (3), отримаємо

$$\mathrm{E}\,\xi^2=\sum_{n=0}^{y}n^2\,\frac{x+y}{x}\binom{y}{n}\bigg/\binom{x+y-1}{n}=\frac{y(x+2y)}{(x+1)(x+2)},$$

а тому дисперсія

$$\mathrm{D}\,\xi=\mathrm{E}\,\xi^2-(\mathrm{E}\,\xi)^2=\frac{xy(x+y+1)}{(x+1)^2(x+2).}.$$

Подібний спосіб отримання математичного сподівання й дисперсії можна застосувати і для довільного m. В цьому випадку

$$\mathrm{E}\,\xi == \frac{my}{x+1},\ \mathrm{D}\,\xi == \frac{my(x-m+1)y(x+y+1)}{(x+1)^2(x+2).}.$$

Числа Стірлінга другого роду. Є k однакових урн і n пронумерованих кульок. Скількома способами можна розмістити кульки в урнах, за умови щоб жодна урна не виявилася порожньою? *Число таких розміщень називають числами Стірлінга другого роду* і позначають символом $S(n,k)$. Наприклад, $S(1,1)=1, S(2,1)=1, S(2,2)=1,$ $S(3,1)=1,$ $S(3,2)=3, S(3,3)=1.$

Числа $S(n,k)$ задовольняють такому рекурентному співвідношенню:

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k). \tag{5}$$

Справді, розіб'ємо множину всіх розміщень на два класи. До першого класу віднесемо всі розміщення з урною, в якій знаходиться тільки одна кулька з номером n. Таких розміщень буде $S(n-1,k-1)$. До другого класу віднесемо всі інші розміщення. Їх можна отримати так. Спочатку розмістимо в k урн кульки з номерами 1, 2, ..., n–1, а потім n-ту кульку будемо розміщувати по черзі в отримані раніше розміщення, їх буде $kS(n-1,k)$. Тому за правилом суми всіх розміщень буде $S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$.

Співвідношення (5) обґрунтовує схему отримання чисел $S(n,k)$, яка називається трикутником Стірлінга другого роду (див [3], с.344) і є аналогом трикутника Паскаля для біноміальних коефіцієнтів.

Числа $S(n,k)$ часто зустрічаються в комбінаториці, наприклад, має місце тотожність

$$x^n=\sum_{k=0}^{n} S(n,k)x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1).$$

Суми всіх чисел $S(n,k)$ називаються числами Бела.

Принцип Діріхле. Є n урн і m кульок, $m \geq n$. Навмання розкладаємо кульки по урнах. Тоді знайдеться принаймні одна непорожня урна. В англомовній літературі – pigeonhole (голубиних гнізд) principle:

Це твердження настільки очевидне, що, на перший погляд, з нього можна отримувати тільки тривіальні результати. Але це не так. На математичних олімпіадах часто зустрічаються задачі на застосування принципу Діріхле. Обмежимося одним відомим прикладом, який належить угорському математику Ердьошу ([4], с.150): з множини натуральних чисел $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n\}$ навмання береться $n+1$ число, довести, що серед вибраних чисел знайдеться принаймні два таких числа, що одне з них ділить інше. Справді, кожне з вибраних чисел подамо у формі $2^r a,\ 1 \leq a \leq 2n-1$, де a непарне. Кількість непарних чисел в множині $\{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n\}$ дорівнює n, а у вибраній множині є $n+1$ число, тому повинно знайтись два числа з однаковими непарними дільниками.

Статистики квантової механіки. Урнові моделі часто використовуються в статистичній фізиці. Наприклад, статистику Максвелла-Больцмана можна змоделювати так. Є n різних урн і k різних кульок. Тоді кожну кульку можна помістити в любу урну. Таких розміщень (за правилом добутку з комбінаторики) буде n^k, тому ймовірність отримати якесь розміщення дорівнює числу $1/n^k$. А якщо нас цікавить ймовірність отримати в першій урні k_1 кульок, в 2-й k_2 кульок, …, в n-тій k_n кульок, $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$, то отримаємо $p = \dfrac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_n!} n^{-k}$.

В статистиці Фермі-Дірака кульки вважаються однаковими і в одній урні дозволяється розміщувати не більше однієї кульки, тому ймовірність отримати таке розміщення дорівнює числу $\dfrac{k!(n-k)!}{n!}$. Таку модель можна застосувати для електронів, протонів і нейтронів.

В статистиці Бозе-Ейнштейна кульки вважаються однаковими і в одній урні дозволяється розміщувати довільне число кульок, тому ймовірність отримати таке розміщення дорівнює числу $\frac{k!(n-1)!}{(n+k-1)!}$. Доведено, що така статистика має місце для фотонів, атомних ядер і атомів, які містять парне число частинок.

Висновки з дослідження і перспективи подальших розробок. В статті розглянуто ряд тем з комбінаторики та теорії ймовірностей, де при вивченні тих чи інших понять, можна з успіхом використовувати урнові моделі. Перспективними можуть стати дослідження з методики використання урнових моделей в статистичній фізиці

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Uspensky J. V. Introduction to Mathematical Probability. New York : McGraw-Hill, 1937. 411 p.

2. Feller W. An Introduction to Probability Theory, v.I New York : John Wiley & Sons, Inc, 1968. 509 p.

3. Graham R. L., Knuth D. E. and Patashnic O. Concrete Mathematics. New York, Addison Wesley, 1989. 626 p.

4. Aigner M. and Ziegler G. M. Proof from the Book. Springer-Verlag, 2004. 356 p.

5. Balakrishnan N. and Nevzorov V. B. A Primer on Statistical Distributions. Wiley-Interscience, 2003. 305 p.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

ВОЙНАЛОВИЧ Наталія Михайлівна – доцент, кандидат педагогічних наук. доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Коло наукових інтересів: методика навчання математики, дискретна математика.

ВОЛКОВ Юрій Іванович – професор, доктор фізико-математичних наук. професор кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Коло наукових інтересів: математичний аналіз**,** теорія ймовірностей. методика навчання математики, дискретна математика.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ВОЙНАЛОВИЧ Наталья Михайловна – доцент, кандидат педагогических наук. доцент кафедры математики Центрально государственного педагогического университета имени Владимира Винниченко.

Круг научных интересов: методика обучения математике, дискретная математика.

ВОЛКОВ Юрий Иванович – профессор, доктор физико-математических наук. профессор кафедры математики Центрально государственного педагогического университета имени Владимира Винниченко.

Круг научных интересов: математический анализ, теория вероятностей. методика обучения математике, дискретная математика.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

VOJNALOVICH Natalia Mikhailivna − candidate of pedagogical sciences, docent, docent of department of mathematics of the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of research interests: theory and methodology of teaching (mathematics), discrete mathematics.

VOLKOV Yurii Ivanovich − doctor of physics-mathematical sciences, professor, professor of department of mathematics of the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Circle of research interests: mathematical analysis. theory probability, discrete mathematics, theory and methodology of teaching (mathematics).

ВОЛКОВ Юрій Іванович, ВОЙНАЛОВИЧ Наталія Михайлівна. УРНОВІ МОДЕЛІ В КОМБІНАТОРИЦІ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ.

Анотація. *На конкретних темах продемонстровано дидактичні можливості використання урнових схем при вивченні ряду понять комбінаторики та теорії ймовірностей.*

Досліди з урнами, які ми проводимо (хоча б мислено) можуть бути різного типу: кульки виймаються з урни з поверненням або без повернення, кульки розкладаються по урнах. При цьому можна розглядати такі випадки: урни і кульки розрізнювальні (наприклад пронумеровані, або різного кольору), урни однакові, кульки різні, урни різні, кульки однакові, урни однакові і кульки однакові.

В роботі розглянуто такі теми: розподіл Паскаля; гіпергеометричний розподіл; від'ємний гіпергеометричний розподіл; числа Стірлінга другого роду; статистики квантової механіки: статистика Максвелла-Больцмана, статистика Фермі-Дірака, статистика Бозе-Ейнштейна; принцип Діріхле.

Ключові слова: *ймовірність, урни, кульки, розподіл, випадкова величина, числа Стірлінга.*

ВОЛКОВ Юрий Иванович. ВОЙНАЛОВИЧ Наталия Михайловна. УРНОВЫЕ МОДЕЛИ В КОМБИНАТОРИКЕ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Аннотация. *На конкретных темах продемонстрированы дидактические возможности использования урновых схем при изучении ряда понятий комбинаторики и теории вероятностей.*

Опыты с урнами, которые мы проводим (хотя бы мысленно), могут быть различного типа: шары вынимаются с урны с возвращением либо без возвращения, шары раскладываются по урнам. При этом можно рассматривать такие случаи: урны и шары различимы (например, пронумерованные, либо разного цвета), урны одинаковые, шары различные, урны различные, шары одинаковые, урны одинаковые и шары одинаковые.

В роботе рассмотрены такие темы: распределение Паскаля гипергеометрическое распределение; отрицательное гипергеометрическое распределение; числа Стирлинга второго рода; статистики квантовой механики: статистика Максвелла-Больцмана, статистика Ферми-Дирака, статистика Бозе-Ейнштейна; принцип Дирихле.

Ключевые слова: *вероятность, урны, шары, распределение, случайная величина, числа Стирлинга.*

VOJNALOVICH Natalia Mikhailivna, VOLKOV Yurii Ivanovich. THE URN MODELS IN COMBINATORICS AND THEORY PROBABILITY.

Abstract. *On the certain themes showed didactics opportunities of the use of urn models at the study of row of concepts of combinatorics and theory of probability. In this article considered such themes.*

Distribution of Pascal (in the urn there are b white and g black balls and $b/(b+g)=p$*. From this urn will be taken out balls until m of white balls will not appear. Distribution amount of black balls to appearance of m-ts of white marble is studied).*

Hypergeometrical distribution (in the urn there are b white and g black balls. There are r being taken out in random way (without returning). Random values ξ *: amount of white balls that here can be go is studied).*

Negative hypergeometrical distribution (in an urn there are x white and y black balls. From this urn will be taken out balls until m of white balls will not appear. Distribution amount of black balls to appearance of m-ts of white marble is studied).

Numbers of Stirling of the second kind (there are k of same urns and n of the numbered balls. How many methods are possible to accommodate balls in urns, in such way, that not a single urn was empty? The number of such placing is called the numbers of Stirling of the second kind and mark a symbol $S(n,k)$*). This method of receipt of such recurrence relation for these numbers:* $S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$.

Statistics of quantum mechanics: statistics of Maxwell-Boltzmann, statistics of Fermi-Dirak, statistics of Bose-Einstein.

Dirichlet Principle: there are n urns and m balls, $m \geq n$*. At random way transferred out balls on urns. Then there will be at least one not empty urn. (In English language literature – pigeonhole principle).*

Key words: *probability, distribution, urns, balls, random values, numbers of Stirlin*