УДК 519.1

ВОЙНАЛОВИЧ Наталія Михайлівна –
кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри
математики Центральноукраїнського державного
педагогічного університету імені Володимира Винниченка
e-mail:vojnalovichn@gmail.com
ORCID ID: 0000-0002-0523-7889
ВОЛКОВ Юрій Іванович –
доктор фізико-математичних наук, професор, професор
кафедри математики Центральноукраїнського державного
педагогічного університету імені Володимира Винниченка
e-mail:yulysenko@i.ua
ORCID ID: 0000-0002-2270-3407

БІНОМІАЛЬНА ФОРМУЛА: МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Біноміальна формула

$$(a+b)^n = \sum_{K-0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad (1)$$

та пов’язані з нею біноміальні коефіцієнти $\binom{n}{k}$ займають у математиці особливе місце і не тільки тому, що вони є найважливішими комбінаторними величинами (число способів вибору *к*-елементних підмножин з *n*-елементної множини). Ця тема займає важливе місце як у шкільному курсі математики так і в курсах дискретної математики у вищих навчальних закладах, тому актуальними і в наш час є розробка методики викладання цієї теми..

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Кількість літературних джерел з цього приводу дуже багато, описати їх тут ми не маємо можливості, тому відсилаємо читача до . списку використаних джерел ([1]-[4]), але все ж нагадаємо, що ще з давніх часів для знаходження біноміальних коефіцієнтів використовували знаменитий трикутник Паскаля (1665 р.), який вже був відомий китайським математикам Ян Хуею (1266 р.), Чжу Ші-Цзе (1303 р.) ([4], с.136).

Мета статті. При вивченні формули (1) корисними будуть її різні доведення. Тому при розробці методики потрібно для початку дослідити різні способи доведення біноміальної теореми і далі розглянути приклади застосування формули (1) і обговорити узагальнення цієї формули.

Методи дослідження. Використовуються методи комбінаторного і математичного аналізу.

Виклад основного матеріалу дослідження. Почнемо з доведень формули (1) (вона виражає біноміальну теорему).

Комбінаторного доведення, яке традиційно розглядається в навчальних посібниках.

Маємо: $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$. В цьому добутку n однакових множників. Для того , що їх перемножити можна діяти так: візьмемо які-небудь k множників і беремо в них доданок a, тоді з інших n-k множників беремо доданок b і перемножимо, отримаємо вираз $a^k b^{n-k}$. При фіксованому k таких добутків буде стільки скількома способами можна вибрати k множників з n множників, а це є кількість комбінацій з n по k. В отриманій сумі k може приймати значення від 0 до n, і, отже, в результаті отримаємо формулу (1).

Друге доведення формули (1) ґрунтується на застосуванні методу математичної індукції. Для n=1 формула (1) правильна. Припустимо, що вона правильна для n=m і доведемо, що вона буде правильною і для

n=m+1. Згідно припущення індукції

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)(a+b)^m=(a+b)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k}=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m}{k-1}a^k b^{m+1-k}+$$

$$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m}{k}a^k b^{m-k+1}=\sum_{k=0}^{m+1}\left(\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right)a^k b^{m+1-k}=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^k b^{m+1-k}.$$

Повчальними є доведення біноміальної формули засобами математичного аналізу. Спочатку покажемо як застосувати для цього формулу Тейлора для многочленів

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k. \qquad (2).$$

Третє доведення біноміальної формули. Візьмемо за $P(x)$ функцію. $(1+x)^n$. Тоді $P^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}, k=0,1,\dots,n$. Звідси за формулою (2) матимемо

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k. \qquad (3)$$

Якщо в цьому співвідношенні взяти x=a/b, то отримаємо формулу (1).

Четверте доведення біноміальної формули. Це доведення ґрунтується на такому твердженні з диференціального числення: якщо похідна $f'(x)=0$, то така функція є сталою.

Розглянемо функцію $f(x)=(1+x)^n-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Тоді для n=1 $f(x)=0$ і

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}=0$. Припустимо, що такі рівності матимуть місце для n=m і доведемо, що $f(x)=0$ і $f'(x)=0$ для n=m+1.

$$f'(x) = (m+1)(1+x)^m - (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} - \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}k = \sum_{k=0}^{m}((m+1) -$$

$$\binom{m+1}{k+1}(k+1)) = \sum_{k=0}^{m}\left((m+1)\frac{m!}{k!(m-k)!} - \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k)!}(k+1)\right) = 0$$ ..Якщо

тепер у виразі для $f(x)$ покласти x=0, то отримаємо, що *const*=0, і отже,

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, а звідси випливає формула (1), якщо покласти $x=a/b$.

П'яте доведення біноміальної формули.

Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, B = \{b_0, b_1, \ldots, b_x\}$. Позначимо через F множину всіх відображень множини A в множину B. Оскільки кожному елементу множини A можна поставити у відповідність 1+x елементів множини B, то згідно правила добутку кількість таких відображень дорівнюватиме числу $(1+x)^n$. Знайдемо цю кількість іншим способом. Розіб'ємо множинуF на n+1 класів, які не перетинаються. До k–го класу віднесемо всі підмножини, які матимуть рівно k прообразів елемента b_o, таких підмножин буде $\binom{n}{k}x^{n-k}$, тому згідно правила суми матимемо: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Зліва і справа в цій рівності стоять многочлени n-го порядку, а за x можна брати довільне натуральне значення, а тому ця рівність буде правильною і для любого дійсного x, бо многочлени не можуть мати більше, ніж n коренів.

Біноміальної формула є частинним випадком більш загальної поліноміальної формули:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_i \geq 0, i=0,1,\ldots,m}} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_m^{k_m}. \qquad (4)$$

Доведемо цю формулу методом математичної індукції, використовуючи біноміальну формулу. Для n=1 ця формула правильна. Припустимо, що вона правильна для n=m, доведемо , що вона має місці для n=m+1. Справді

$$((a_1 + \cdots + a_m) + a_{m+1}))^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_{m+1}^{n-k} \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=k \\ k_i \geq 0, i=0,1,\ldots,k}} \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m},$$

якщо тепер замінити $n-k$ на k_{m+1} і змінити порядок підсумовування, то отримаємо поліноміальну формулу.

Наведемо декілька прикладів застосування біноміальної формули для знаходження сум.

Приклад 1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$. Досить у формулі (1) спочатку взяти x=1, в потім x=-1.

Приклад 2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)\cdots(k-m+1) = n(n-1)\cdots(n-m+1)2^{n-m}, m \leq n.$

Для доведення цього співвідношення досить тотожність (1) продиференціювати m разів і взяти x=1.

Приклад 3**. (*Мала теорема Ферма*).** Візьмемо в співвідношенні (4) показник степеня n=p – просте число. Матимемо

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_m^p + p \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=p \\ k_j \neq p,, i=0,1,\ldots,m}} \frac{(p-1)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}.$$

Через те, що p просте кожен з коефіцієнтів $\frac{p(p-1)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$ (за умови $k_j \neq p, i = 0,1,\ldots,m$) буде ділитись на p, а тому вираз

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^p - (a_1^p + a_2^p + \cdots + a_m^p)$ також буде ділитись на p і якщо тепер взяти взяти $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1$, то отримаємо твердження малої теореми Ферма: $m^p - m$ ділиться на p для всякого натурального числа m.

Багато інших прикладів можна знайти в книгах [1], [3]..

Далі будемо використовувати позначення й основні факти квантового числення (q-числення) з книги [2]:.

q-біноміальна формула (формула Гаусса)

Нехай $(a+x)_q^n := (a+x)(a+qx)(a+q^2x)\cdots(a+q^{n-1}x)$. *Тоді*

$$(a+x)_q^n = \sum_{k=0}^{n} q^{k(k-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k a^{n-k}. \qquad (5)$$

Доведення. Нехай $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Тоді

$D_qP(x) = a_1 + [2]a_2x + \cdots + [k[a_kx^{k-1} + \cdots + [n]a_nx^{n-1},$

$D_q^2P(x) = [2]a_2 + \cdots + [k][k-1]a_kx^{k-2} + \cdots + [n][n-1]a_nx^{n-2}.$

. . .

$D_q^kP(x) = [k]!a_k + \cdots + [n][n-1]\cdots[n-k+1]a_nx^{n-k}, \ldots, D_q^n(x) = [n]!a_n.$

Візьмемо в цих співвідношеннях x=0. Тоді отримаємо рівності $D_q^kP(0) = [k]!a_k, k = 0,1,\ldots,n$,а звідси отримаємо формулу Тейлора для $P(x)$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} D_q^k P(0) \frac{x^k}{[k]!}. \qquad (6)$$

Застосуємо цю формулу до многочлена $P(x) = (1+x)_q^n$. Матимемо

$$D_qP(x) = ((1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x) - (1+qx)(1+q^2x)\cdots(1+q^nx))/(x(1-q)) =$$
$$((1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)(1+x-1+q^nx))/(x(1-q)) = [n](1+qx)_q^{n-1},$$

$$D_q^2P(x) = D_q([n](1+qx)_q^{n-1}) = [n][n-1]q(1+q^2x)_q^{n-2}), \ldots,$$

$D_q^kP(x) = [n][n-1][n-2][n-3]\cdots[n-k+1]q^{k(k-1)/2}(1+q^{k(k-1)/2^6}x)_q^{n-k}), \ldots$

Візьмемо в цих співвідношеннях x=0. Тоді отримаємо рівності

$D_q^kP(0) = [n][n-1][n-2][n-3]\cdots[n-k+1]q^{k(k-1)/2}, k = 0,1,\ldots,n$

а звідси отримаємо q-формулу Тейлора для многочлена $P(x) = (1+x)_q^n$):

$$(1+x)_q^n=\sum_{k=0}^{n}q^{k(k-1)/2}\frac{[n][n-1]\cdots[n-k+1]}{[k]!}x^k=\sum_{k=0}^{n}q^{k(k-1)/2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^k. \qquad (7)$$

Якщо в цьому співвідношенні взяти *x*=*x*/*a* і спростити, то отримаємо (5).

Перепишемо співвідношення (7) так:

$$(1+x)_q^n=\sum_{k=0}^{n}q^{k(k-1)/2}\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}x^k$$, якщо взяти

$|q|<1/2, |x|<1,$ і спрямувати $n\to\infty$, то отримаємо тотожність

$$\prod_{j=0}^{\infty}(1+q^jx)=\sum_{k=0}^{\infty}q^{k(k-1)/2}\frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}.$$

Формулу (6) можна узагальнити. Нехай *c* довільне число. Тоді для довільного многочлена *P*(*x*) має місце співвідношення

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}D_q^kP(c)\frac{(x-c)_q^k}{[k]!}. \qquad (8)$$

Дійсно, нехай

$$P(x)=b_0+b_1(x-c)+b_2(x-c)_q^2+\cdots+b_k(x-c)_q^k+\cdots+b_n(x-c)_q^n.$$

Тоді $P(c)=b_0,\ D_qP(c)=b_1,\ D_q^2P(c)=[2]b_2,\ D_q^3P(c)=[2][3]b_3,$

$$D_q^4P(c)=[2][3][4]b_4,\ \ldots,\ D_q^kP(c)=[2][3][4]\cdots[k]b_k,\ D_q^nP(c)=[n]!b_n,$$

а звідси $b_k=\dfrac{D_q^kP(c)}{[k]!}, k=0,1,2,\cdots,n$.Застосуємо формулу (8) :до функції

$f(x)=x^n$, взявши *c*=1. Матимемо $x^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(x-1)_q^k$. Замінивши *x* на 1/*x*,

отримаємо $$\frac{1}{x^n}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-q\right)\cdots\left(\frac{1}{x}-q^{k-1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^{-k}(1-x)_q^k,$$

звідси $$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^{n-k}(1-x)_q^k=x^n+\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^{n-k}(1-x)_q^k=1.$$

Якщо в цій формулі взяти *x*=*q*, то отримаємо

$$q^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} q^{n-k}(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k) = 1.$$

Звідси для довільного q і натурального n

$$q^n + \sum_{k=1}^{n} (1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1}) q^{n-k} = 1.$$

Висновки з дослідження і перспективи подальших розробок.

Розглянутими в статті прикладами не вичерпуються прийоми розв'язування подібних задач. В перспективі ця тематика може бути розширена через накопичення прикладів застосування бінпоміальної формули, полшноміальної формул, q-біноміальної формули.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Graham R.L, Concrete Mathematics/Graham R.L, Knuth D.E., Patashnic O. − New York , Addison Wesley, 1989 − 626 p.

2. Kac V., Quantum Calculus/ Kac V., Cheung P., Springer- Verlab. − New York, 2002. − 113 p.

3. Riordan J. Combinatorial Identities/ Riordan J ,John Wiley & Sons, Inc., − New York, 1968- 256

4. Stillwell J. Mathematics and Its History/ Stillwell J., Springer-Verlab. − New York, 1989. − 370 p.

REFERENCES

1. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnic O. Concrete Mathematics, Addison Wesley, 1989-626 p.

2. Kac V., Cheung P. Quantum Calculus, Springer- Verlab. − New York, 2002. − 113 p.

3. Riordan J. Combinatorial Identities, John Wiley & Sons, Inc., − New York, 1968- 256

4. Stillwell J. Mathematics and Its History, Springer-Verlab. − New York,1989. − 370 p.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Войналович Наталія Михайлівна, доцент, кандидат педагогічних наук. доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Коло наукових інтересів: методика навчання математики, дискретна математика.

Волков Юрій Іванович, професор, доктор фізико-математичних наук. професор кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Коло наукових інтересів: математичний аналіз, теорія ймовірностей, дискретна математика, методика навчання математики.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

VOJNALOVICH Natalia Mikhailivna − candidat of pedagogical sciences, dozent, dozent of department of mathematics of the Volodymyr Vynnychenko Central Ucrainian State Pedagogcal University.

Circle of research interests: theory and methodology of teaching (mathematics), discretne mathematics.

VOLKOV Yurii Ivanovich − doctor of physics-mathematial sciences, professor, professor of department of mathematics of the Volodymyr Vynnychenko Central Ucrainian State Pedagogcal University.

Circle of research interests: mathematical analysis. theory probability, discretne mathematics, theory and methodology of teaching (mathematics).

ВОЙНАЛОВИЧ Наталія Михайлівна, ВОЛКОВ Юрій Іванович. БІНОМІАЛЬНА ФОРМУЛА: МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Анотація. *В статі розглянуто п’ять різних методів доведення біноміальної формула: два різних комбінаторних, доведення методом математичної індукції, два різних доведення біноміальної формули засобами математичного аналізу.*

Обговорюються узагальнення біноміальної формули: біноміальний ряд, поліноміальна формула, q-біноміальна формула Гаусса з квантового числення.

Розглянуто ряд прикладів застосування вказаних формул.

Ключові слова: *біном, біноміальні коефіцієнти, формула Тейлора, біноміальний ряд, q-числення.*

ВОЙНАЛОВИЧ Наталия Михайловна, ВОЛКОВ Юрий Иванович.

БИНОМИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА: МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Аннотация. *В статье рассматриваются пять различних доказательств биномиальной формулы: два комбинаторных, доказательство методом математическлй индукции, два доказательста биномиальной формулы средствами математического анализа.*

Обсуждаются обобщения биномиальной формулы: биномиальний ряд, полиномиальная формула, q-биномиальная формула Гаусса из квантового исчисления.

Рассмотрено несколько примеров применения этих формул.

Ключові слова: *біном, біноміальні коефіцієнти, формула Тейлора, біноміальний ряд, q-числення.*

VOJNALOVICH Natalia Mikhailivna, VOLKOV Yurii Ivanovich.

BINOMIAL FORMULA: METHODS OF THE PROOF AND ITS APPLICATIONS

Abstract

A binomial formula (formula of the Binomial theorem) and binomial coefficients related ubiquatious in the different sections of mathematics, and especially in discrete mathematics. These objects occupy an important place as in the school course of mathematics so in the courses of discrete mathematics in higher educational establishments. Therefore actual is development of methodology of studies of this theme.

In sex five different methods of proofs of binomial formula are considered: two different combinatorics, the proof to of mathematical induction, two different proof of binomial formula to a method by facilities of mathematical analysis. We discuss generalizations of binomial formula: the binomial series, the multinomial formula, the q-binomial formula of Gauss from a quantum calculation. The row of examples of application of the indicated formulas is considered.

Key words: *binom, binomial coefficients, Taylor's formula, binomial series, q-calculation.*