УДК 378.14

КЛЮЧНИК Інна Геннадіївна
Кандидат фізико – математичних наук, доцент
доцент кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного
університету імені Володимира Винниченка
ORCID ID 0000-0001-6874-7811
e-meil: Kl.innochka@gmail.com

ПОБУДОВА ПСЕВДООБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. До сучасних випускників пред'являються високі вимоги щодо змісту знань, що визначає конкретну спроможність фахівця на сучасному ринку праці. При вивчені математики розглядаються задачі, для розв'язання яких потрібно творче застосування цих знань. Проблеми побудови конструктивних методів лінійних крайових задач для широкого класу систем диференціальних рівнянь: системи звичайних диференціаьних рівнянь традиційно займають одне з центральних і принципово важливих місць в якісній теорії диференціальних рівнянь. Це обумовлено перш за все важливістю практичного застосування теорії крайових задач в самих різноманітних галузях знань: теорії нелінійних коливань [1], теорії стійкості руху, теорії управління, в ряді радіотехнічних, механічних і біологічних задач. Особливості такого роду крайових задач в том, що в більшості випадків їх лінійна частина є оператором, який не має оберненого, що не дозволяє безпосередньо застосовувати традиційні методи дослідження крайових задач, основані на використанні принципа нерухомої точки. Необерненість лінійної частини оператора є наслідком того, що число m крайових умов не співпадає з порядком n операторної системи. Такого типу задачі для систем диференціальних рівнянь є нетеровими і включають в себе найбільш складні і мало досліджені як недовизначені так і перевизначені, як некритичні так і критичні крайові задачі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Саме тому більшість робіт, присвячені вивченю таких задач, виконані в припущені їх фредгольмовості (Е. А. Гребенніков, Д. К. Ліка, Ю. А. Рябов, І. Г. Малкін [2], А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, Н.І. Ронто [1]). В роботах [3,4] побудована загальна теорія крайових задач, приведена класифікація некритичних і критичних випадків, отримані ефективні коефіціентні умови існування і ітераціонні алгоритми побудови розв'язків цих задач. Багато результатів викладені в монографії, спочатку були отримані і апробіровані при аналізі крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. В подальшому ці схеми і алгоритми були запропоновані для дослідження більш загальних об'єктів: крайових задач для звичайних систем з зосередженим запізненням, для систем з імпульсною дією, для не всюди дозволених операторних рівнянь в функціональних просторах, лінійна частина яких – нормально дозволений оператор.

Мета статті. Вказати шляхи побудови узагальнено-оберненої матриці та псевдо оберненої матриці, продемонструвати застосування псевдооберненої матриці до розв’язування лінійних алгебраїчних рівнянь та до проблеми розв’язуваності систем лінійних диференціальних рівнянь з двоточковой крайовой умовой в критичному випадку.

Методом дослідження є апарат псевдообернених матриць і ортопроекторів з відображенням на ядро.

Виклад основного матеріалу.

Означення. Оператор $L \in$ $\pounds(H_1, H_2)$ називається узагальнено-оберненим, якщо існує оператор $X \in$ $\pounds(H_1, H_2)$ такий, що $LXL = L$. Оператор X називається узагальнено-оберненим до оператора L і позначається L^{-}.

Із узагальнено-обернених операторів вибирають єдиний оператор, який задовольняє умови:

1. $LL^{-}L = L$;

2. $L^{-}LL^{-} = L^{-}$;

3. $(LL^{-})^{*} = LL^{-}$;

4. $(L^{-}L)^{*} = L^{-}L$. (1)

Означення**.** Оператор L^{-}, який задовольняє умови (1) називається псевдоoберненим оператором і позначається L^{+}.

Як відомо, для будь-якої неособливої квадратної матриці Q існує єдина обернена матриця. . Якщо матриця Q прямокутна або особлива, то оберненої матриці в такому розумінні для неї не існує. Проте прагнення "обернути" і таку матицю Q призвело до побудови різних узагальнено-обернених матриць.

Означення Узагальнено-оберненою матрицею для довільної матриці Q називатимемо матрицю Q^{+}, яка задовольняє матричне рівняння: $QQ^{+}Q = Q$.

Означення. Матриця Q^{+}називається псевдооберненою матрицею до матриці Q , якщо вона задовольняє такі критерії:

1) $Q^{+}QQ^{+} = Q^{+}$;

2) $QQ^{+}Q = Q$;

3) $(QQ^{+})^{*} = QQ^{+}$;

4) $(Q^{+}Q)^{*} = Q^{+}Q$.

Приклад. Знайти узагальнено-обернену матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Легко переконатися, що rank A =2. Поставимо у верхній лівий куток матриці A, визначник 2-го порядку (та як rank A =2) відмінний від нуля. Для цього поміняємо місцями 1-й і 3-й стовпчик матриці A.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10, A_{11}^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$$

Матриці перестановок P і Q:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо $X_1 = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Запишемо узагальнено-обернену матриця A^+ до матриці A :

$$A^+ = QX_1P$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад**.** Знайти узагальнено-обернену матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Узагальнено-обернена матриця знаходиться за формулою: $A^+ = QX_1P$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2,$$

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти псевдообернену матрицю, до матриці

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування. Скористаємося формулою знаходження псевдооберненої матриці:

$$Q^+ = \left(Q^TQ + P_Q\right)^{-1}Q^T.$$

Ранг матриці Q рівний 2, тому

$$P_{Q_r} = Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0;\ P_{Q_r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0.$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^T Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю $(Q^T Q + P_{Q_r})^{-1}$:

$$\left|Q^T Q\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \qquad a_{11} = (-1)^{1+1}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \qquad a_{21} = (-1)^{1+2}\frac{1}{3} = -\frac{1}{3},$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2}\frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

отже $(Q^T Q + P_{Q_r})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$Q^+ = \left(Q^T Q + P_Q\right)^{-1} Q^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Розв'язати лінійну систему алгебраїчних рівнянь $Qc = b$, якщо $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $c \in R^2$.

Розв'язання. З попереднього приклада, відомо, що псевдообернена матрицю Q^+ має вигляд

$$Q^+ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ортопроектори: P_Q і P_{Q^*}:

$$P_{Q^*} = I_m - QQ^+ =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$P_{Q_d^*}$ – складається з одного вектора (m-rankQ=3-2=1).

$$P_{Q_d^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -x_3, x_2 = -x_3,\ x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1.$$

Отже $P_{Q_d^*} = (1,1,-1)$. А так, як $P_{Q_d^*} b = (1,1,-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$ то рівняння $Qc = b$ нерозв’язне.

Приклад. Розв’язати лінійну систему алгебраїчних рівнянь $Qc = b$, якщо $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $c \in R^2$.

Розв’язання. $Q^+ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{Q_r} = 0$, $P_{Q_d^*} = (1,1,-1)$.

Перевіримо умову $P_{Q_d^*} b = (1,1,-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Таким чином дана система має розв’язок. Оскільки $\mathrm{rank}Q = n_1 = n = 2$, то система має єдиний розв’язок вигляду:

$$c = Q^+ b + \bar{c},$$

де $\bar{c}$ – будь-який вектор із $N(Q)$, $\bar{c} = P_{Q_r} c \Rightarrow \bar{c} = 0.$

Отже $c = Q^+ b = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Приклад. Розглянемо двовимірну диференціальну систему

$$\dot{z} = \varphi(t), t \in [a; b], \varphi(t) \in c[t], n = 2,$$

підпорядковану двоточковій крайовій умові

$$lz = M_1 z(a) + M_2 z(b) = \alpha,$$

де $M_i (i = 1,2) -$ прямокутні матриці розмірності (1×2),

$M_1 = (m_1, 0), M_2 = (0, m_2), (m_i \in R^1, m_i \neq 0, i = 1,2), \alpha -$скаляр, $\alpha \in R^1 (m = 1)$.

Тоді $X(t) = I_{2,} Q = lX = (m_1, m_2),\ Q^* = Q^T = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix},\ P_{Q^*} = 0.$

В зв'язку з тим, що $rank Q = n_1 = m = 1 < n = 2,$ маємо критичний випадок

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} -m_2 \\ m_1 \end{pmatrix},$$

$$P_Q = \frac{1}{m_1^2 + m_2^2} \begin{pmatrix} -m_2 \\ m_1 \end{pmatrix} (-m_2 \quad m_1) = \frac{1}{m_1^2 + m_2^2} \begin{pmatrix} m_2^2 & -m_1 m_2 \\ -m_1 m_2 & m_1^2 \end{pmatrix},$$

$$Q^+ = (Q^* Q + P_Q)^{-1} Q^* = \frac{1}{m_1^2 + m_2^2} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}.$$

Згідно [4, ст 175], розглядувана крайова задача, при будь-яких

$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \in C[a,b]$ і довільних $\alpha \in R,\ (P_{Q^*} = 0)$ має однопараметричне

сімейство розв'язків $(r = n - n_1 = n - m = 1)$ виду

$$z_0(t, c_1) = \begin{pmatrix} -m_2 \\ m_1 \end{pmatrix} c_1 + \int_a^b (K(t,\tau) - X(t) Q^+ l K(\cdot,\tau)) \varphi(\tau) d\tau + \frac{1}{m_1^2 + m_2^2} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \alpha.$$

Висновок. В роботі наведені прикладів побудови узагальнено – оберненої матриці, псевдооберненої матиці та застосування псевдооберненої матиці до розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь та до проблеми розв'язуваності систем лінійних диференціальних рівнянь з двоточковой крайовой умовой в критичному випадку.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.-Киев: Вища шк., 1987.-287 с.

2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. - М.: Гостехиздат, 1956.-491 с.

3 Самойленко А. М., Бойчук А. А., Линейные нетеровы кранвые задачи для \\ дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн.-1992.-44, №-4.-С.564-568.

4. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи.-Киев: Инст. мат. НАН Укр.,1995.-318с.

REFERENCES

1. Samoylenko A.M., Perestiuk N.A. Differential equalizations with impulsive influence. – Kyiv: Vysha Shkola, 1987. – 287 p.
2. Malkin I.G. Some tasks of theory of nonlinear vibrations. – M. Statetechprod, 1956. – 491 p.
3. Samoylenko A.M., Boychuk A.A., Linear neter regional tasks for the differential systems with impulsive influence // Ukr.math.journal. – 1992. – 44, №-4.-P.564-568.
4. Boychuk A.A., Zhuravlev V.F., Samoylenko A.M. Generalized-reverse operators and neter regional tasks. - Kyiv: Inst. math. NAS Ukr., 1995. – 318 p.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

КЛЮЧНИК Інна Геннадіївна - кандидат фізико – математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

***Наукові інтереси*:** методика навчання у вищому навчальному закладі при підготовці майбутнього вчителя.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Inna Kliuchnyk – candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent, docent of Department of Mathematics, Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Scientific interests: methodology of studies in higher educational establishment at preparation of future teacher.
:

КЛЮЧНИК Інна Геннадіївна. ПОБУДОВА ПСЕВДООБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ.

Анотація. Для квадратної неособливої матриці А, існує обернена матриця A^{-1}. Якщо ж матриця А – прямокутна або $detA = 0$, то символ A^{-1} немає сенсу. Однак, виявляється, що для довільної матриці А існує псевдообернена матриця A^{+}, що володіє деякими властивостями оберненої матриці і має важливе застосування у прикладних задач. Визначення псевдо-оберненої матриці було запропоноване на початку ХХ століття математиком Едвардом Муром. Згодом, незалежно від Е.Мура, в дещо іншій формі, псевдообернена матриця визначилась і досліджувалась англійським математиком Роджером Пенроузом та іншими авторами. В запропонованій роботі псевдообернена матиця застосована до розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь та до проблеми розв'язуваності систем лінійних диференціальних рівнянь.

***Ключові слова*:** узагальнено – обернена матриця, псевдообернена матриця.

КЛЮЧНИК Инна Геннадиевна. ПОСТРОЕНИЕ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ И ИХ ПРИМЕНЕИЕ

Анотация. Для квадратной неособенной матрицы А существует обратная матрица. Если же матрица А - прямоугольная или $detA = 0$ то символ не имеет смысла. Однако, оказывается, что для произвольной матрицы А существует псевдообратная матрица, обладающая некоторыми свойствами обратной матрицы и имеет важное применение в прикладных задачах. Определение псевдообратной матрицы было предложено в начале ХХ века математиком Эдвардом Муром. Впоследствии, независимо от Е.Мура, в несколько иной форме, псевдообратная матрица была определена и исследована английским математиком Роджером Пенроузом и другими авторами. В предлагаемой работе псевдообратная матица применена к решению линейных алгебраических уравнений и к системе линейных дифференциальных уравнений.

***Ключевые слова*:** обобщенно – обратная матрица, псевдообратная матрица

KLIUCHNYK Inna. CONSTRUCTION OF PSEUDOREVERSE MATRIX AND ITS IMPLEMENTATION

Abstract.

In this time the theory of ordinary differential equalizations shows a rich, widely ramified theory. One of basic tasks of this theory there is existence at differential equalizations of such decisions, which satisfy to the additional conditions, unity of decision, and its firmness. A theory must help an engineer and physicist to find the methods of economy and rapid calculation of decision. Differential equalizations are basis of mathematical design of different processes that take place in the living and lifeless wild, for this reason they are widely used in theoretical researches of different processes. It is difficult to estimate the importance of matrices in mathematics. They were the issue of research in many advanced studies, their research get plenty of time and presently. Due to matrices it is possible to decide the sufficient amount of differentiated tasks. With their help the graphic arts of functions and equalizations are investigated as on a plane so in space, decide the systems of linear equalizations with n unknown and many other. In our time to the matrix found the new use in the computer technologies that with every year all anymore develops improving and facilitating life to us.

For a square non-singular matrix A, there is an inverse matrix A^{-1}. If matrix A - rectangular or $detA = 0$, then symbol A^{-1}there is not sense. However, it appears that for an arbitrary matrix A there is a pseudoreverse matrix, that owns some properties of inverse matrix and has important application at the applied tasks. Determination of pseudoreverse matrix offered at the beginning of XX century by a mathematician Edward Moore. Afterwards, regardless of E.Moore, in an a few another form, a pseudoreverse matrix was determined and investigated by English mathematician Roger Penrose and other authors.

The general theory of regional tasks, classification over of uncritical and critical cases, , the effective coefficient terms of existence and iteration algorithms of construction of decisions of these tasks are brought in works of A. A. Boychuk. Many results are expounded in a monograph, were first got and investigated at the analysis of regional tasks for the systems of ordinary differential equalizations. In future these charts and algorithms offered for research of more general objects: regional tasks for the ordinary systems with the concentrated delay, for the systems with an impulsive action, for the not everywhere settled statement equalizations in functional spaces, linear part of that is the normally settled operator.

Examples of construction of generalized-reverse and pseudoreverse matrices are presented in this article. The decision of the linear system of algebra is searched with a rectangular matrix. And also an example of application of pseudoreverse matrix is made at the decision of the two-dimensional differential system from a point by a regional condition.

***Key words*:** generalized-reverse matrix, pseudoreverse matrix