УДК 378:512

ІЗЮМЧЕНКО Людмила Володимирівна
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики
Центральноукраїнського державного педагогічного
університету імені Володимира Винниченка
ORCID ID 0000-0001-8656-2220
e-mail: l.iziumch@gmail.com

ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ПЕДАГОГІЧНИХ ЗАКЛАДІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ ПРИ ВИВЧЕННІ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Серед багатьох актуальних завдань, які стоять перед закладом вищої освіти, проблема формування професійної самостійності спеціалістів посідає одне з провідних місць. Сучасний фахівець повинен володіти не лише необхідною сумою фундаментальних та фахових знань, але й певними навичками творчого розв'язання практичних питань, вмінням використовувати у своїй роботі те нове, що з'являється у науці та практиці, постійно підвищувати свою кваліфікацію. Тому формування здатності до самостійного оволодіння новими знаннями, спроможність аналізувати отриману інформацію, розвиток творчого мислення – стають першочерговими завданнями закладу вищої освіти у підготовці висококваліфікованих спеціалістів. У зв'язку з цим навчальний процес у закладі вищої освіти потребує надання значущої ролі самостійній роботі студентів, без якої неможливо підготувати активну особистість фахівця, необхідного сучасному суспільству та виробництву, а тому тема дослідження є актуальною. У даній статті досліджується організація самостійної роботи студентів педагогічного закладу вищої освіти першого року навчання при вивченні теми «Комплексні числа», аналізуються завдання, які покликані навчити знаходити і реалізувати способи їхнього виконання, здійснювати контроль і оцінку результатів виконаної роботи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У зв'язку з посиленням ролі самостійної роботи у навчально-пізнавальному процесі актуальною стає проблема її раціональної організації. Ця проблема не нова. Вчені й педагоги-практики завжди приділяли багато уваги вивченню різних аспектів, пов'язаних з самостійною роботою. Проблеми організації самостійної роботи студентів досліджували М.Г. Гарунов, Е.В. Гапон, В.А. Козаков, І.Я. Лернер, Н.А. Половнікова, З.І. Слєпкань, В.О. Швець та ін. Управлінням самостійною роботою студентів у позааудиторний час займалися Б.П. Єсіпов, Л.В. Клименко, Л.І. Лутченко, В.П. Шпак та ін. Навчання студентів умінню планувати свою пізнавальну діяльність досліджували О.М. Козак, Н.П. Красницький та ін. У роботах К.Б. Бабенко, О.Я. Кучерук, О.Г. Мороза, В.С. Тесленка та ін. відображені особливості організації самостійної роботи студентів на молодших курсах. Системний підхід в організації самостійної роботи студентів досліджувався у роботах Н.В. Ванжі, Г.М. Гнітецької, Є.Г. Фомкіної та ін.

Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених самостійній роботі, проблема організації самостійної роботи студентів перших курсів під час вивчення математичних дисциплін у сучасних умовах висвітлена недостатньо та потребує подальшого дослідження.

Метою статті є розкриття різних методичних аспектів організації самостійної роботи студентів з теми «Комплексні числа», які є актуальними на цей час і які можна оцінити у розрізі багаторічного досвіду роботи викладачів кафедри математики. При цьому особлива увага акцентується на перевірці отриманих результатів, адже для майбутніх педагогів важливо критично ставитися до отриманих результатів, уміти контролювати правильність розв'язання кожної задачі та знаходити помилки і виправляти їх, що надзвичайно важливо при підготовці до виконання професійних обов'язків у майбутньому.

Методи дослідження. Для реалізації поставленої мети та виконання завдань статті використано теоретичні (аналіз першоджерел з проблеми дослідження, освітніх програм, синтез, порівняння) та емпіричні (педагогічне спостереження, проведення навчального експерименту із використанням запропонованої методики викладання) методи дослідження.

Виклад основного матеріалу дослідження. Довгий час самостійна робота студентів розглядалась як допоміжна по відношенню до аудиторної. Нині вона стає найважливішою складовою усього навчального процесу, оскільки дозволяє систематизувати, закріплювати та поглиблювати теоретичні знання та практичні навички студентів, розвивати пізнавальні здібності та активність студентів, формувати самостійність мислення, здатність до саморозвитку, самовдосконалення та самореалізації [2].

При вивченні математичних дисциплін велике значення має засвоєння базових понять, розуміння їх властивостей, усвідомлення взаємозв'язку з викладенням наступного матеріалу, аналіз та вивчення доведень тверджень та теорем. На лекціях теоретичний матеріал викладається у поглибленій формі з повним доведенням усіх лем, теорем та наслідків, а на практичних заняттях відпрацьовується розуміння основних понять, уміння та навички розв'язування прикладів на основі теорії [3]. При зменшенні кількості аудиторних годин й відповідно збільшенні годин для самостійної роботи детальне вивчення значної кількості теорем та їх доведень, а також систематизація знань в основному залишаються на самостійне опрацювання студента. Контроль практичної частини навчального курсу переважно відбувається у формі аудиторних контрольних робіт та захисту індивідуальних домашніх завдань (ІДЗ).

Розглянемо методичні особливості організації й проведення самостійної роботи студентів під час виконання ІДЗ з теми «Комплексні числа». У спробі поєднати різноманітні підходи до організації самостійної роботи студентів при вивченні комплексних чисел формуємо завдання, що охоплюють матеріал, лише частково розглянутий на лекціях та практичних заняттях, та алгебраїчні приклади, які необхідно розв'язувати відомим способом, проте з обов'язковою перевіркою засобами геометрії. Наведемо приклад варіанту індивідуального завдання [1].

Задача 1. Побудувати на площині ГМТ, що зображують комплексні числа z, які задовольняють умови:

а) $\begin{cases} \operatorname{Re} z \ge -1, \\ \operatorname{Im} z \le 5, \\ |z-1-3i| \le 5; \end{cases}$; б) $\begin{cases} -3 < \operatorname{Im} z \le 1, \\ 2 < |z| \le 4; \end{cases}$; в) $\begin{cases} |z+2-i| \le 4, \\ \dfrac{\pi}{3} < \arg z \le \dfrac{3\pi}{4}; \end{cases}$; г) $|z+2-5i| > |z-2+i|$.

Розв'язання перших трьох завдань (а, б, в) є достатньо очевидним і вимагає від студента першого курсу проілюструвати свої знання геометричних місць точок з шкільного курсу математики, поєднавши з базовими знаннями теорії комплексних чисел, відповівши на питання:

1. Комплексне число z записано в алгебраїчній формі; що таке дійсна частина $\operatorname{Re} z$, уявна частина $\operatorname{Im} z$ числа z?

2. Яку множину точок задає на комплексній площині умова: а) $\operatorname{Re} z = 1$, б) $\operatorname{Re} z > 1$, в) $\operatorname{Re} z \ge 1$, г) $\operatorname{Im} z = 2$, д) $\operatorname{Im} z < 2$, е) $\operatorname{Im} z \le 2$?

3. Як обчислюється модуль комплексного числа z? Що показує модуль комплексного числа z?

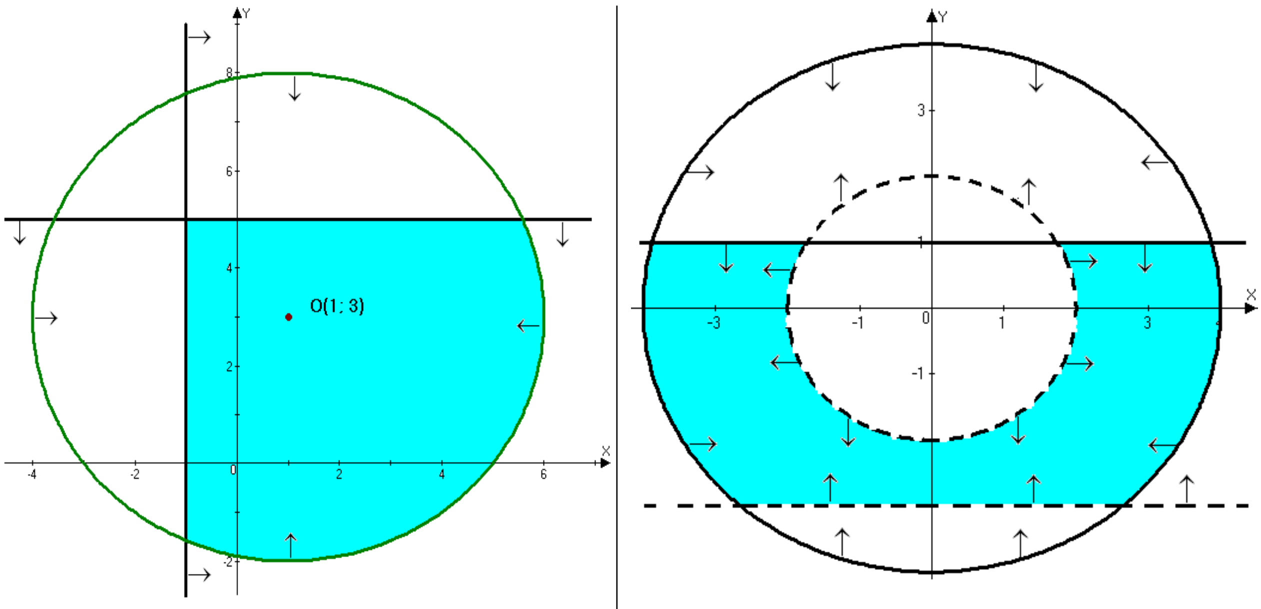
4. Яку множину точок задає на комплексній площині умова: а) $|z| = 3$, б) $|z| > 3$, в) $|z| \ge 3$; г) $|z| \le 3$?

5. Що таке аргумент $\arg z$ комплексного числа z?

6. Яку множину точок задає на комплексній площині умова: $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$?

У завданні г) виділимо дійні і уявні частини комплексних чисел, модулі яких записані в лівій і правій частинах нерівності, матимемо: $z+2-5i = (x+y\cdot i)+(2-5i) = (x+2)+(y-5)i$, $z-2+i = (x+y\cdot i)+(-2+i) = (x-2)+(y+1)i$, а тоді їхні модулі, відповідно, мають вигляд $|z+2-5i| = \sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2}$;

$|z-2+i|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$ і задана умова перепишеться у вигляді $(x+2)^2+(y-5)^2>(x-2)^2+(y+1)^2$. Розкриємо дужки, перенесемо в один бік, зведемо подібні, отримаємо: $x^2+4x+4+y^2-10y+25>x^2-4x+4+y^2+2y+1$ або $x^2+\underline{4x}+4+y^2-\underline{\underline{10y}}+25-x^2+\underline{4x}-4-y^2-\underline{\underline{2y}}-1>0$, звідки $8x-12y+24>0$ або $2x-3y+6>0$ – півплощина (без межі $d: 2x-3y+6=0$), якій належить початок координат: $2\cdot 0-3\cdot 0+6=6>0$. Для побудови прямої d достатньо знайти дві точки: нехай $x=0$, тоді $y=2$; якщо $y=0$, тоді $x=-3$.



а)   б)

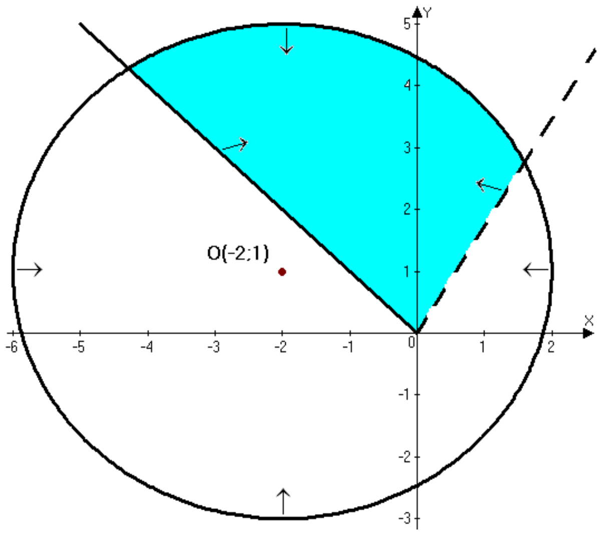
Повне виконання завдання г) вимагає геометричної перевірки, а саме: ГМТ площини, рівновіддалених від двох даних точок A і B є серединний перпендикуляр до відрізка AB, а тому:

1. З умови маємо: $|z+2-5i|>|z-2+i|$ нулі підмодульних виразів $z+2-5i=0 \Rightarrow z_1=-2+5i$, маємо точку $A(-2;5)$; $z-2+i=0 \Rightarrow z_2=2-i$, маємо точку $B(2;-1)$. Вектор $\overline{AB}$ має бути колінеарний до нормального вектора отриманої прямої-межі d, маємо: $\overline{AB}=(2;-1)_B-(-2;\,5)_A=(4;-6)$; $\overline{n_d}=(2;-3)$.

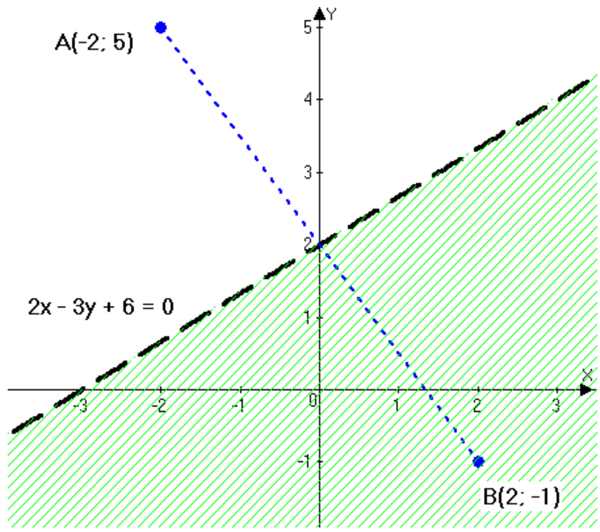
Вектори колінеарні, оскільки їхні координати пропорційні: $\dfrac{4}{2}=\dfrac{-6}{-3}$.

2. Середина відрізка AB має лежати на прямій межі d, тобто її координати мають задовольняти рівняння прямої. Координати середини

відрізка обчислюються за формулами $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$; у нашому випадку середина відрізка AB має координати $\left(\frac{-2+2}{2};\frac{5+(-1)}{2}\right)$, тобто $(0;\,2)$. Підставляємо у рівняння прямої, переконуємося, що виконується і ця умова: $2\cdot 0-3\cdot 2+6=0$, отже, задача розв'язана правильно. Відповідь до задачі наведена на рисунку г), додатково показані точки A; B.



в)



г)

Наступні два завдання ІДЗ присвячені алгебраїчній формі запису комплексного числа (з обов'язковою умовою перевірки засобами геометрії). Перед їхнім розв'язанням вимагається дати відповіді на питання:

1. Комплексні числа записані в алгебраїчній формі. Як додати (відняти) два числа? Що відбувається з дійсними, уявними частинами? Як виконати перевірку правильності результату за допомогою векторів?

2. Комплексні числа записані в алгебраїчній формі. Як помножити два числа? Що відбувається з модулями, аргументами чисел: яким спів-відношенням пов'язані модулі (аргументи) вхідних чисел і модуль (аргумент) числа-результату?

3. Комплексне число z записане в алгебраїчній формі. Як обчислити куб z^3 числа? Що відбувається з модулями, аргументами чисел: яким спів-відношенням пов'язані модуль (аргумент) вхідного числа z і модуль

(аргумент) числа-результату?

4. Яке число називається спряженим до комплексного числа z? Яким співвідношенням пов’язані модуль (аргумент) вхідного числа z і модуль (аргумент) спряженого до нього числа $\bar{z}$? Як на комплексній площині виглядають зображення чисел z і $\bar{z}$?

5. Комплексні числа записані в алгебраїчній формі. Як поділити два числа? Що відбувається з модулями, аргументами чисел: яким співвідношенням пов’язані модулі (аргументи) вхідних чисел і модуль (аргумент) числа-результату?

6. Що можна сказати про модулі (аргументи) часток z_1/z_2 та z_2/z_1? Як на комплексній площині виглядають зображення цих двох часток?

Задача 2. Дано два комплексні числа $z_1 = 7 - i$ і $z_2 = 2 + 11i$. Обчислити (в алгебраїчній формі) і побудувати разом з ними:

а) їхню суму $z_1 + z_2$, б) різницю $z_1 - z_2$, в) добуток $z_1 \cdot z_2$,

г) частки z_1/z_2 та z_2/z_1, д) куб z_1^3 числа z_1, е) спряжене до z_1

та прокоментувати, якщо можливо, що відбувається з дійсними, уявними частинами; модулями, аргументами отриманих комплексних чисел.

Розв’язання. а–б) Обчислимо суму і різницю указаних комплексних чисел:

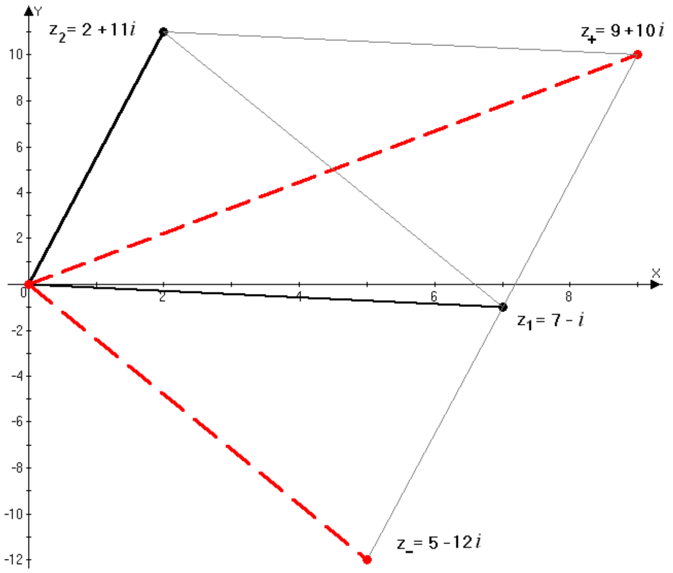
$$z_1 + z_2 = (7 - i) + (2 + 11i) = (7 + 2) + (-i + 11i) = 9 + 10i,$$

$$z_1 - z_2 = (7 - i) - (2 + 11i) = (7 - 2) + (-i - 11i) = 5 - 12i,$$

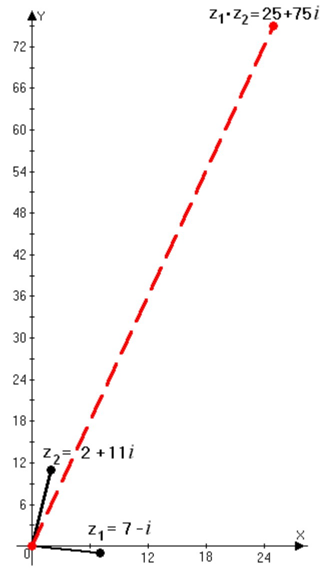
при цьому у першій задачі дійсні (уявні) частини додаються, у другій – віднімаються. Геометрично отримаємо суму (різницю) векторів, які з’єднують початок координат з даними точками, що зображають комплексні числа, тобто діагональ паралелограма, що виходить з початку координат (діагональ паралелограма, що з’єднує ці точки) – див. рис. а)-б).

в) Обчислимо добуток указаних комплексних чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (7 - i) \cdot (2 + 11i) = 7 \cdot 2 + 7 \cdot 11i - 2i - 11i^2 = 14 + 77i - 2i - 11 \cdot (-1) = 25 + 75i.$$



а), б)



в)

Виконаємо перевірку: модулі комплексних чисел мають перемножитись, а аргументи – додатися. Обчислимо модулі: $|z_1|=\sqrt{7^2+(-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $|z_2|=\sqrt{2^2+11^2}=\sqrt{4+121}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$, їхній добуток: $|z_1|\cdot|z_2|=5\sqrt{2}\cdot5\sqrt{5}=25\sqrt{10}$;$|z_1\cdot z_2|=\sqrt{25^2+75^2}=\sqrt{25^2\cdot(1+3^2)}=25\sqrt{10}$. Порівнюючи два останні результати, приходимо до висновку, що перша умова – виконується.

Перевіримо виконання другої умови: $\arg z_1=arctg\left(\frac{-1}{7}\right)\approx-8^\circ$, $\arg z_2=arctg\left(\frac{11}{2}\right)\approx 80^\circ$, $\arg(z_1\cdot z_2)=arctg\left(\frac{75}{25}\right)\approx72^\circ$, $\arg z_1+\arg z_2\approx-8^\circ+80^\circ=72^\circ$ (друга умова виконується). На рисунку б) можна поміряти транспортиром аргумент першого числа (кут $\angle xOz_1\approx-8^\circ$: гострий кут, *за* годинниковою стрілкою, тому знак “–”) , другого числа (кут $\angle xOz_2\approx80^\circ$: гострий кут, *проти* годинникової стрілки, тому знак “+”) та числа $z_1\cdot z_2$, відповідно, 72°.

г) Обчислимо частки указаних комплексних чисел (чисельник і знаменник дробу домножимо на число, спряжене до знаменника):

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{7-i}{2+11i}=\frac{(7-i)\cdot(2-11i)}{(2+11i)\cdot(2-11i)}=\frac{7\cdot2-7\cdot11i-2i+11i^2}{2^2-(11i)^2}=\frac{14-77i-2i+11\cdot(-1)}{4-121i^2}=$$

$$=\frac{3-79i}{4+121}=\frac{3-79i}{125}=\frac{3}{125}-\frac{79}{125}i,$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{2+11i}{7-i}=\frac{(2+11i)\cdot(7+i)}{(7-i)\cdot(7+i)}=\frac{2\cdot 7+2\cdot i+11i\cdot 7+11i^2}{7^2-i^2}=\frac{14+2i+77i+11\cdot(-1)}{49-(-1)}=$$

$$=\frac{3+79i}{50}=\frac{3+79i}{50}=\frac{3}{50}+\frac{79}{50}i,$$

Виконаємо перевірку. При діленні модулі комплексних чисел мають поділитись, а аргументи – віднятися:

$$\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5},\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{125}\right)^2+\left(-\frac{79}{125}\right)^2}=\sqrt{\frac{3^2+79^2}{125^2}}=\sqrt{\frac{6250}{125\cdot 125}}=\frac{\sqrt{10}}{5},$$

Порівнюючи результати, помічаємо, що вони однакові.

$\frac{|z_2|}{|z_1|}=\frac{5\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{50}\right)^2+\left(\frac{79}{50}\right)^2}=\sqrt{\frac{3^2+79^2}{50^2}}=\sqrt{\frac{6250}{2500}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ – теж однакові результати.

Аргументи $z_1; z_2$ ми вже рахували (або міряли): $\arg z_1\approx -8^\circ$, $\arg z_2\approx 80^\circ$, аргумент першої частки: $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=arctg\left(\frac{-79/125}{3/125}\right)=-arctg\left(\frac{79}{3}\right)\approx -88^\circ$, різниця аргументів $\arg z_1-\arg z_2\approx -8^\circ-80^\circ=-88^\circ$ (однакові); для другої частки маємо $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=arctg\left(\frac{79/50}{3/50}\right)=arctg\left(\frac{79}{3}\right)\approx 88^\circ$, різниця аргументів, відповідно, $\arg z_2-\arg z_1\approx 80^\circ-(-8^\circ)=88^\circ$ (теж однакові).

Зауваження: числа z_1/z_2 і z_2/z_1 є взаємно оберненими числами, а тому їхній добуток має дорівнювати одиниці, їхні модулі мають бути оберненими числами, а аргументи – протилежними числами (на рисунку *промені*, що з'єднують числа з початком координат, мають бути симетричними відносно вісі абсцис):

$$\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{z_2}{z_1}=\left(\frac{3}{125}-\frac{79}{125}i\right)\left(\frac{3}{50}+\frac{79}{50}i\right)=\frac{3}{125}\cdot\frac{3}{50}+\frac{3}{125}\cdot\frac{79}{50}i-\frac{79}{125}\cdot\frac{3}{50}i-\frac{79}{125}\cdot\frac{79}{50}i^2=$$

$$=\frac{9+237i-237i-6241i^2}{125\cdot 50}=\frac{9+6241}{6250}=\frac{6250}{6250}=1,$$

модулі ми уже рахували: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\sqrt{10}}{5}$, $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=\frac{\sqrt{10}}{2}$, їхній добуток $\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}=1$;

аргументи теж рахували: $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -arctg\left(\frac{79}{3}\right) \approx -88^\circ$, $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = arctg\left(\frac{79}{3}\right) \approx 88^\circ$.

Якщо не виконується хоча б одна умова – треба шукати помилку, а якщо виконується хоч би одна умова, то велика *ймовірність* того, що задача розв'язана правильно.

д) Обчислимо куб указаного комплексного числа z_1^3:

$$z_1^3 = (7-i)^3 = 7^3 + 3\cdot 7^2\cdot(-i) + 3\cdot 7\cdot(-i)^2 + (-i)^3 = 343 - 147i + 21i^2 - i^3 =$$
$$= 343 - 147i - 21 + i = 322 - 146i.$$

Виконаємо перевірку: при піднесенні до куба модуль комплексного числа мав піднестися до куба, а аргумент – потроїтися: куб модуля числа z_1:
$(|z_1|)^3 = (5\sqrt{2})^3 = 250\sqrt{2}$, модуль $\left|z_1^3\right| = \sqrt{322^2 + (-146)^2} = \sqrt{125000} = \sqrt{250^2\cdot 2} = 250\sqrt{2}$.

Аргумент z_1: $\arg z_1 \approx -8^\circ$, аргумент z_1^3: $\arg\left(z_1^3\right) = arctg\frac{-146}{322} = -arctg\frac{73}{161} \approx -24°$. Обидві умови виконуються.

е) Запишемо спряжене до комплексного числа $z_1 = 7 - i$ (спряжені числа відрізняються знаком уявної частини): $\overline{z_1} = 7 + i$. У геометричній ілюстрації до задачі студент має отримати два числа, що симетричні відносно вісі абсцис: модулі чисел рівні, аргументи протилежні.

Наведемо розв'язання наступної задачі з покроковою перевіркою отриманих результатів**.**

Задача 3. Обчислити дійсну $\operatorname{Re} z$ і уявну $\operatorname{Im} z$ частини комплексного числа $z = \frac{(5+3i)^3 - (6-2i)^3}{(2-5i)^2 + (7+4i)^2}$.

Розв'язання:

1. $(5+3i)^3 = 5^3 + 3\cdot 5^2\cdot(3i) + 3\cdot 5\cdot(3i)^2 + (3i)^3 = 125 + 225i + 135i^2 + 27i^3 =$

$$= 125 + 225i - 135 - 27i = -10 + 198i.$$

Перевірка (одна з можливих перевірок, дивись розв'язання задачі 2 д):
$|z| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$, $|z|^3 = \left(\sqrt{34}\right)^3 = 34\sqrt{34}$;

$\left|z^3\right| = \sqrt{(-10)^2 + 198^2} = \sqrt{100 + 39204} = \sqrt{39304} = \sqrt{34^2 \cdot 34} = 34\sqrt{34}$.

2. $(6-2i)^3 = 6^3 + 3\cdot 6^2 \cdot (-2i) + 3\cdot 6\cdot(-2i)^2 + (-2i)^3 = 216 - 216i + 72i^2 - 8i^3 =$
$= 216 - 216i - 72 + 8i = 144 - 208i$.

Перевірка: $|z| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},\ \ |z|^3 = \left(2\sqrt{10}\right)^3 = 8\cdot 10\sqrt{10} = 80\sqrt{10}$;

$\left|z^3\right| = \sqrt{144^2 + (-208)^2} = \sqrt{(16\cdot 9)^2 + (16\cdot 13)^2} = 16\sqrt{9^2 + 13^2} = 16\sqrt{250} = 16\sqrt{25\cdot 10} = 80\sqrt{10}.$

3. $(2-5i)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot(-5i) + (-5i)^2 = 4 - 20i + 25i^2 = 4 - 20i - 25 = -21 - 20i$.

Перевірка: $|z| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29},\ \ |z|^2 = \left(\sqrt{29}\right)^2 = 29$;

$\left|z^2\right| = \sqrt{(-21)^2 + (-20)^2} = \sqrt{441 + 400} = \sqrt{841} = \sqrt{29^2} = 29.$

4. $(7+4i)^2 = 7^2 + 2\cdot 7\cdot 4i + (4i)^2 = 49 + 56i + 16i^2 = 49 + 56i - 16 = 33 + 56i$.

Перевірка: $|z| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65},\ \ |z|^2 = \left(\sqrt{65}\right)^2 = 65$;

$\left|z^2\right| = \sqrt{33^2 + 56^2} = \sqrt{1089 + 3136} = \sqrt{4225} = \sqrt{65^2} = 65.$

5. $(5+3i)^3 - (6-2i)^3 = (-10 + 198i) - (144 - 208i) = (-10 - 144) + (198 + 208)i = -154 + 406i.$

6. $(2-5i)^2 + (7+4i)^2 = (-21 - 20i) + (33 + 56i) = (-21 + 33) + (-20 + 56)i = 12 + 36i$.

7. $$\frac{(5+3i)^3 - (6-2i)^3}{(2-5i)^2 + (7+4i)^2} = \frac{-154 + 406i}{12 + 36i} = \frac{2\cdot(-77 + 203i)}{2\cdot 6\cdot(1+3i)} = \frac{-77 + 203i}{6\cdot(1+3i)} = \frac{(-77 + 203i)\cdot(1-3i)}{6\cdot(1+3i)\cdot(1-3i)} =$$

$$= \frac{-77\cdot 1 + 77\cdot 3i + 203\cdot 1i - 203\cdot 3i^2}{6\cdot(1+3i)\cdot(1-3i)} = \frac{-77 + 231i + 203i - 609i^2}{6\cdot\left(1^2 - (3i)^2\right)} = \frac{-77 + 434i + 609}{6\cdot\left(1 - 9i^2\right)} =$$

$$= \frac{532 + 434i}{6\cdot(1+9)} = \frac{532 + 434i}{60} = \frac{532}{60} + \frac{434}{60}i = \frac{133}{15} + \frac{217}{30}i = 8\frac{13}{15} + 7\frac{7}{30}i.$$

Перевірка:

$|z_1| = \sqrt{(-154)^2 + 406^2} = \sqrt{(-2\cdot 77)^2 + (2\cdot 203)^2} = 2\sqrt{77^2 + 203^2} = 2\sqrt{5929 + 41209} =$

$= 2\sqrt{47138} = 2\sqrt{2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 37} = 14\sqrt{962}$;

$|z_2| = \sqrt{12^2 + 36^2} = \sqrt{(12\cdot 1)^2 + (12\cdot 3)^2} = 12\sqrt{1^2 + 3^2} = 12\sqrt{10}$;

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{14\sqrt{962}}{12\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{481}}{6\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{2405}}{30}.$$

Модуль частки має дорівнювати частці модулів:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{133}{15}\right)^2 + \left(\frac{217}{30}\right)^2} = \sqrt{\frac{133^2\cdot 4 + 217^2}{30^2}} = \sqrt{\frac{(7\cdot 19)^2\cdot 4 + (7\cdot 31)^2}{30^2}} = \frac{7\sqrt{2405}}{30}.$$

Відповіді однакові, правильно.

Відповідь: $\operatorname{Re} z = 8\frac{13}{15}$; $\operatorname{Im} z = 7\frac{7}{30}$.

Наступні два завдання є стандартними завданнями на дії з комплексними числами у тригонометричній формі. Перед їхнім виконанням потрібно виконати самоперевірку, відповівши на питання [1]:

1. Комплексне число z записане в алгебраїчній формі. Як обчислити його модуль? Як правильно визначити аргумент комплексного числа: якщо тангенс кута додатний і комплексне число лежить у першій (третій) координатній чверті; якщо тангенс кута від'ємний і комплексне число лежить у другій (четвертій) координатній чверті? Як записати його у тригонометричній формі?

2. Якою є формула для добування кореня *n*-го степеня з комплексного числа? Скільки є коренів *n*-го степеня з комплексного числа?

3. На скільки частин поділяє коло множина коренів *n*-го степеня з комплексного числа, якого радіуса це коло? Яким співвідношенням пов'язані модуль (аргумент) вхідного числа z і модуль (аргументи) чисел-результатів?

4. Якою є формула для піднесення комплексного числа до *n*-го степеня (формула Муавра)?

5. Яким співвідношенням пов'язані модуль вхідного числа z і модуль числа-результату z^n? Яким співвідношенням пов'язані аргумент вхідного числа z і аргумент числа-результату z^n?

Задача 4. Обчислити і зобразити на комплексній площині число z та

а) корені третього степеня із $z = -14\sqrt{7} - 14\sqrt{7}\,i$;

б) корені четвертого степеня із $z = -10 + 10\sqrt{3}\,i$.

Задача 5. Зобразити на комплексній площині число $z = \sqrt{33} - \sqrt{11}\,i$ та обчислити z^{18}.

Виконану роботу студент має захистити в строки, визначені графіком навчального процесу. Захист передбачає знання студентом відповідного теоретичного матеріалу, практичні навички розв'язання типових прикладів, уміння застосовувати засоби перевірки.

Висновки з дослідження і перспективи подальших розробок напряму. У даній роботі автор ділиться власним досвідом організації самостійної роботи студентів при вивченні теми «Комплексні числа», при якій особлива увага приділяється двоїстій природі комплексного числа, пов'язуються декартові і полярні координати, алгебраїчна і тригонометрична форми запису комплексного числа та акцентується особлива увага на критичності оцінки отриманих результатів. Подальші дослідження будуть спрямовані на поширенні цієї методики на інші розділи лінійної алгебри.

Самостійне виконання ІДЗ дозволяє систематизувати знання з теми та привчає студентів до виконання перевірки з метою оцінки отриманих аналітичних результатів. Успішне оволодіння знаннями, розв'язання нових завдань приносить студентам неабияке задоволення, сприяє виробленню професійних якостей особистості, формуванню творчої особистості фахівця, здатного до саморозвитку та самоосвіти.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Ізюмченко, Л.В. Практикум з лінійної алгебри: навч.-метод. посіб. / Л.В. Ізюмченко – Кіровоград: ЦОП Авангард, 2013. – 136 с.

2. Слєпкань, З.І. Методика навчання математики: підручник для студ. мат. спец. пед. навч. закл. / З.І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

3. Щоголєв, С.А. Комплексні числа: навч.-метод. посіб. / С.А. Щоголєв. – Одеса: ОНУ імені І.І. Мечникова, 2015. – 44 с.

REFERENCES

1. Iziumchenko, L.V. (2013) Praktykum z liniinoi alhebry: navchalno-metodychnyi posibnyk. [Practice on linear algebra: teacher edition]. Kirovohrad: Tsentr Operatyvnoi Polihrafii Avanhard. [in Ukrainian].

2. Sliepkan, Z.I. (2000) Metodyka navchannia matematyky: pidruchnyk dlia studentiv matematychnykh spetsialnostei pedahohichnykh navchalnykh zakladiv.

[Methods of teaching mathematics: Textbook for students of mathematical specialties of pedagogical educational institutions]. Kyiv: Zodiak-EKO. [in Ukrainian].

3. Shchoholiev, S.A. (2015) Kompleksni chysla: navchalno-metodychnyi posibnyk. [Complex numbers: teacher edition]. Odesa: ONU imeni I.I. Mechnykova. [in Ukrainian].

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА

Ізюмченко Людмила Володимирівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Коло наукових інтересів: особливості роботи з обдарованими дітьми, олімпіадні задачі, методика навчання математики, проблеми організації самостійної роботи студентів та школярів.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Iziumchenko Liudmyla Volodymyrivna candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of Department of Mathematics at the Central Ukrainian State Pedagogical University named after Volodymyr Vynnychenko.

Circle of scientific interests: specific aspects of work with gifted pupils, competition problems, methods of teaching mathematics, organization problems of independent work of students and pupils.

ІЗЮМЧЕНКО Людмила Володимирівна. ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ПЕДАГОГІЧНИХ ЗАКЛАДІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ ПРИ ВИВЧЕННІ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Анотація. *У статті розглянуто організацію самостійної роботи студентів педагогічного закладу вищої освіти під час вивчення теми «Комплексні числа»; описано авторську методику організації самостійної роботи під час виконання індивідуальних* *домашніх завдань (ІДЗ); наведено приклад ІДЗ та проілюстровано розв'язання декількох задач; пов'язані алгебраїчна та геометрична сутність комплексного числа у кожному прикладі, що дозволяє глибше розуміти природу комплексного числа; до кожного завдання наводяться теоретичні питання, які дозволяють перевірити готовність студента до їхнього розв'язування; особлива увага приділяється перевірці правильності отриманих результатів; аналізуються завдання, які заставляють знаходити і реалізувати способи їхнього виконання, здійснювати контроль і оцінку результатів виконаної роботи; відмічено позитивний вплив застосовуваних підходів організації самостійної роботи на підвищення освітнього рівня студентів педагогічних закладів вищої освіти.*

***Ключові слова**: самостійна робота студентів, індивідуальне домашнє завдання, алгебраїчна і тригонометрична форми запису комплексного числа, дії над комплексними числами.*

Изюмченко Людмила Владимировна. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

***Аннотация.** В статье рассмотрено организацию самостоятельной работы студентов педагогического высшего ученого заведения при изучении темы «Комплексные числа»; описано авторскую методику организации самостоятельной работы при выполнении индивидуальных домашних заданий (ИДЗ); приведен пример ИДЗ и проиллюстрировано решение нескольких задач; связаны алгебраическая и геометрическая сущность комплексного числа в каждом примере, что позволяет глубже понимать природу комплексного числа; к каждому заданию приводятся теоретические вопросы, позволяющие проверить готовность студента к их решению; особое внимание уделяется проверке правильности полученных результатов; анализируются задачи, которые заставляют находить и реализовать способы их выполнения, осуществлять контроль и оценку результатов выполненной работы; отмечено положительное влияние применяемых подходов организации самостоятельной работы на повышение образовательного уровня студентов педагогических высших учебных заведений.*

***Ключевые слова:** самостоятельная работа студентов, индивидуальное домашнее задание, алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа, действия над комплексными числами.*

Iziumchenko Liudmyla Volodymyrivna. ORGANIZATION OF INDEPENDENT WORK OF STUDENTS OF HIGHER EDUCATION PEDAGOGICAL INSTITUTIONS DURING STUDY OF COMPLEX NUMBERS

***Abstract**: The article considers organization aspects of independent work of students of the first year at the higher education institution during the implementation of practical individual homework on the topic «Complex Numbers»; argues in favor of importance of independent work for the formation of ability to independently master the new knowledge and to analyze the given information, as well as for the development of creative thinking.*

The article reveals various methodological aspects of organizing and conducting independent work of students during the implementation of individual homework on the topic «Complex Numbers»; special attention is paid to the ability to run check of final and all the midline results, since the future teacher must be able to control the correctness of solving each task, to find errors and correct them, which is extremely important for performing the future professional duties.

In this paper, the author shares her own experience of organizing independent work of students in the study of the topic «Complex Numbers», in which particular attention is paid to the dual nature of a complex number, as well as to the connection of Cartesian and polar coordinates, algebraic and trigonometric forms of the recording of a complex number; the example of an individual homework on the topic is given. Individual tasks are formed in such a way that some of them are only partially considered at lectures and practical classes, that is, they require an independent research work; and the others are familiar to students, but when solving them, students are required to carry out a verification by means of analytical geometry in the prospect of broadening the student's horizons and contributing to the development of professional qualities of the individual.

The article illustrates the solution of several different types of problems, which show the algebraic and geometric nature of a complex number; the tasks are accompanied by theoretical questions, which allow to check the readiness of the student to solve them; special attention is paid to the step-by-step verification of the correctness of received results in order to avoid erroneous decision; analyzes the tasks that demand to find and implement the methods of their solution, as also to monitor and evaluate the results of the performed work.

The author points to the positive influence of applied approaches of organization of independent work on development of cognitive abilities and activity of students, their ability to self-development and self-improvement; and in general – on the increase of the educational level of students of higher education institutions.

***Keywords*:** *independent work of students, individual homework, algebraic and trigonometric forms of the recording of a complex number, operations on complex numbers.*