

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Центральноукраїнський державний університет
імені Володимира Винниченка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Харченко Діана Сергіївна

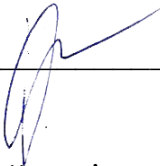
УДК 532.59

ДИСЕРТАЦІЯ
МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ В ТРИШАРОВІЙ
ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ

113 Прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.


Харченко Д. С.

Науковий керівник: Наратовий Володимир Володимирович,
кандидат технічних наук, доцент

Кропивницький – 2023

АНОТАЦІЯ

Харченко Д. С. Моделювання хвильових процесів в тришаровій гідродинамічній системі. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Центральноукраїнський державний університет
імені Володимира Винниченка, Кропивницький, 2023.

У дисертаційній роботі представлено дослідження задачі поширення слабконелінійних хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» з використанням методу багатомасштабних розвинень.

Необхідність дослідження внутрішніх хвиль у тришаровій гідродинамічній системі зумовлена тим, що стратифіковані ділянки спостерігаються в багатьох водах Світового океану і є предметом широкого кола досліджень. Математичні моделі, які описують поширення хвиль у рідинах із різним рівнем стратифікації, належать до класу задач гідродинаміки, пов'язаних із розвитком теорії нелінійних хвиль. Удосконалення сучасних систем комп'ютерної алгебри, які дозволяють суттєво пришвидшити роботу з громіздкими аналітичними перетвореннями при застосуванні асимптотичних методів, дають можливість досліджувати дані класи задач, ураховуючи наближення вищих порядків. Розв'язані сьогодні моделі гідродинамічних задач про поширення хвиль у рідинах не охоплюють усіх явищ та процесів. Отже, важливою проблемою стає дослідження поширення внутрішніх хвиль у тришаровій гідродинамічній системі та аналіз таких фізичних закономірностей та механічних ефектів як форми хвильових пакетів, умови модуляційної стійкості, явища резонансу тощо.

У роботі розглянуто задачу поширення хвиль у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» з урахуванням поверхневого натягу. Побудовано математичну модель та отримано постановку задачі в безрозмірному вигляді. З використанням методу багатомасштабних розвинень отримано перші три лінійні наближення задачі. Знайдено розв'язки задачі першого наближення. Також для задачі першого наближення отримано дисперсійне рівняння першого порядку, яке має дві пари незалежних розв'язків, які є центрами хвильових пакетів. Отримано аналітичні розв'язки задачі другого наближення. Для задач другого та третього наближення виведено умови існування нетривіальних розв'язків. На основі дисперсійного співвідношення та умов існування нетривіальних розв'язків другого та третього наближень отримано еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера. Для обох поверхонь контакту виведено умови модуляційної стійкості.

Для задач першого та другого наближень отримано вирази відношень амплітуд відхилень поверхонь контакту. Виконано побудову графіків залежностей відношень амплітуд від хвильового числа, товщини нижнього та верхнього шарів для різних фізичних параметрів. Виявлено, що для залежностей відношень амплітуд від товщини нижнього та верхнього шарів для першого наближення існують граничні значення, до яких наближаються абсолютні величини. Також для першого наближення виявлено випадки рівності абсолютних величин. Здійснено аналіз графіків залежностей відношень амплітуд для другого наближення, виявлено випадки максимумів та мінімумів, що допомогло виявити фізичні параметри системи, при яких хвилі роблять максимальний внесок у внутрішній хвильовий рух.

Досліджено умови модуляційної стійкості для обох пар коренів, побудовано та проаналізовано графіки залежності меж стійкості від різних фізичних параметрів. Виявлено помітний вплив таких фізичних параметрів системи, як товщина нижнього та верхнього шарів, густини середнього та

верхнього шарів на зміну меж модуляційної стійкості. Виявлено випадки злиття областей стійкості.

З урахуванням розв'язку нелінійного рівняння Шредінгера для перших двох наближень отримано формули відхилень поверхонь контакту. Виявлено умови, при яких змінюється форма хвильових пакетів. Для нижньої та верхньої поверхонь контакту для обох пар коренів виконано побудову та аналіз областей знакосталості коефіцієнтів при других гармоніках. Також побудовано та проаналізовано графіки відхилень поверхонь контакту. Досліджено різні випадки накладання максимумів та мінімумів першої та другої гармонік, при яких виникає асиметрія форми хвильових пакетів.

Досліджено залежність сумарного потоку енергії, яку переносять внутрішні хвилі, від хвильового числа та товщини при різних значеннях фізичних параметрів у першому наближенні. Розглянуто граничний випадок, який описується рівністю густин середнього та верхнього шарів. Установлено, що тришарова система «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» вироджується у двошарову систему «шар із твердим дном – шар із кришкою», що підтверджує достовірність отриманих результатів. Усі результати проілюстровано графічно.

Виконано дослідження явища резонансу других гармонік, побудовано та проаналізовано графіки областей резонансу. Здійснено оцінку застосовності методу багатомасштабних розвинень.

Гідродинамічна система «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» моделює подібні стратифіковані ділянки Світового океану в прибережних зонах за наявності льодового покриття або іншої твердої поверхні. Тому результати дисертаційної роботи можуть бути використані як теоретична база для досліджень, пов'язаних із вивченням поведінки внутрішніх хвиль в океані або гідродинамічних системах, створених у лабораторних умовах, та досліджень, які пов'язані з розробкою спеціальних пристроїв, які використовують енергію внутрішніх хвиль. Також отримані теоретичні та аналітичні дані можуть бути взяті за основу при проведенні

експериментальних досліджень в океанології, машино- та суднобудуванні, гідродинаміці, фізиці та ін. Отже, тема дисертаційної роботи враховує сучасні проблеми математичного моделювання та інших галузей математики.

Дисертаційну роботу виконано відповідно до індивідуального плану роботи аспіранта та в межах дослідження, здійсненого в Центральноукраїнському державному університеті імені Володимира Винниченка за темою «Прикладна математика у дослідженні складних систем з детермінованими та стохастичними процесами» (номер державної реєстрації 0116 U 005271).

Ключові слова: тришарова гідродинамічна система, поверхня контакту, хвильовий пакет, відношення амплітуд, внутрішня хвиля, потік енергії, резонанс, форма хвильового пакету, модуляційна стійкість, обвідна хвильового пакету.

ANNOTATION

Diana. S. Kharchenko Modeling of wave processes in a three-layer hydrodynamic system. – Qualifying scientific paper, manuscript.

Dissertation for the degree of a doctor of philosophy 113 – Applied Mathematic.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University,
Kropyvnytskyi, 2023.

The dissertation presents a study of the problem of the propagation of weakly nonlinear wave packets in a three-layer hydrodynamic system "layer with a solid bottom - layer - layer with a cover" using the method of multi-scale developments.

The need to study internal waves in a three-layer hydrodynamic system is caused by the fact that stratified areas are observed in many waters of the World Ocean and are the subject of a wide range of research. Mathematical models that describe the propagation of waves in fluids with different levels of stratification belong to the class of problems of hydrodynamics associated with the development of the theory of nonlinear waves. Improvements in modern computer algebra systems, which allow significantly speeding up work with cumbersome analytical transformations when using asymptotic methods, make it possible to study these classes of problems, taking into account approximations of higher orders. The models of hydrodynamic problems of wave propagation in fluids solved today do not cover all phenomena and processes. Thus, an important problem is the study of the propagation of internal waves in a three-layer hydrodynamic system and the analysis of such physical regularities and mechanical effects as the shape of wave packets, conditions of modulation stability, the phenomenon of resonance, etc.

The paper considers the problem of wave propagation in a three-layer hydrodynamic system "layer with a solid bottom - layer - layer with a cover" taking into account the surface tension. A mathematical model was built and the statement of the problem was obtained in a dimensionless form. Using the method of multiscale developments, the first three linear approximations of the problem

were obtained. The solutions of the first approximation problem were found. Also, for the first approximation problem, a dispersion equation of the first order is obtained, which has two pairs of independent solutions, which are the centers of the wave packets. Analytical solutions of the second approximation problem were obtained. Conditions for the existence of non-trivial solutions are derived for the problems of the second and third approximation. On the basis of the dispersion relation and the conditions for the existence of non-trivial solutions of the second and third approximations, the evolution equations of the contour wave packets on the contact surfaces are obtained in the form of the nonlinear Schrödinger equation. Modulation stability conditions are derived for both contact surfaces.

For the problems of the first and second approximations, the expressions of the ratios of the amplitudes of the deviations of the contact surfaces are obtained. Graphs of the dependence of the amplitude ratios on the wave number, the thickness of the lower and upper layers for various physical parameters were constructed. It was found that for the dependence of the amplitude ratios on the thickness of the lower and upper layers for the first approximation there are limit values to which the absolute values approach. Also, cases of equality of absolute values were found for the first approximation. An analysis of graphs of dependences of amplitude ratios for the second approximation was carried out, cases of maxima and minima were found, which helped to reveal the physical parameters of the system at which waves make the maximum contribution to the internal wave motion.

The conditions of modulation stability for both pairs of roots were studied, graphs of the dependence of stability limits on various physical parameters were constructed and analyzed. A noticeable influence of such physical parameters of the system as the thickness of the lower and upper layers, the density of the middle and upper layers on the change of the limits of modulation stability was revealed. Cases of fusion of regions of stability were found.

Taking into account the solution of the nonlinear Schrodinger equation for the first two approximations, the formulas for the deviations of the contact surfaces

were obtained. Conditions under which the shape of wave packets changes have been identified. For the lower and upper surfaces of contact for both pairs of roots, the construction and analysis of the regions of constancy of the coefficients at the second harmonics were performed. Graphs of deviations of the contact surfaces were also constructed and analyzed. Various cases of superimposition of maxima and minima of the first and second harmonics, in which asymmetry of the wave packet shape occurs, have been studied.

The dependence of the total flow of energy carried by internal waves on the wave number and thickness at different values of the physical parameters in the first approximation was studied. The limiting case is considered, which is described by the equality of the densities of the middle and upper layers. It was established that the three-layer system "layer with a solid bottom - layer - layer with a cover" degenerates into a two-layer system "layer with a solid bottom - layer with a cover", which confirms the reliability of the obtained results. All results are graphically illustrated.

The phenomenon of resonance of second harmonics was studied, graphs of resonance regions were constructed and analyzed. The applicability of the method of multi-scale developments was evaluated.

The hydrodynamic system "layer with a solid bottom - layer - layer with a cover" simulates similar stratified areas of the World Ocean in coastal zones in the presence of ice cover or other solid surface. Therefore, the results of the dissertation work can be used as a theoretical basis for research related to the study of the behavior of internal waves in the ocean or hydrodynamic systems created in laboratory conditions, and for research that deals with the development of special devices that use the energy of internal waves. Also, the obtained theoretical and analytical data can be taken as a basis for conducting experimental research in oceanology, machine and shipbuilding, hydrodynamics, physics, etc. So, the topic of the dissertation takes into account modern problems of mathematical modeling and other branches of mathematics.

The dissertation work was carried out in accordance with the individual work plan of the graduate student and within the framework of research carried out at the Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University on the topic "Applied mathematics in the study of complex systems with deterministic and stochastic processes" (state registration number 0116 U 005271).

Key words: three-layer hydrodynamic system, contact surface, wave packet, amplitude ratio, internal wave, energy flow, resonance, shape of wave packet, modulation stability, envelope of wave packet.

Список публікацій здобувача

Основні наукові результати дисертації

1. Naradovyi V. Investigation of the energy of wave motions in a three-layer hydrodynamic system / V. Naradovyi, D. Kharchenko // *Waves in Random and Complex Media*. – 2021. – Vol. 31(6). – P. 1729-1748. <https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1699674> (Scopus)
2. Наратовий В. В. Дослідження хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» / Математичне моделювання // В. В. Наратовий, Д. С. Харченко. – 2022. – № 1 (46). – С. 32-43. Doi: [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(46\)2022.258346](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(46)2022.258346)
3. Харченко Д. С. Форма хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі / Д. С. Харченко // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2021. – Том 94. – С. 77-90. Doi: <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2021-94-05>

Тези наукових доповідей

1. Харченко Д. С. Дослідження енергії хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі / Д. С. Харченко // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: Збірка матеріалів XIV міжнародної наукової конференції для молодих вчених / Під ред. проф. Жолткевича Г. М. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – С. 35-36.
2. Харченко Д. С. Дослідження модуляційної стійкості хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі / Д. С. Харченко // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: тези доповідей XVI Міжнародної наукової конференції для

- студентів та молодих вчених (12 - 13 березня 2021 р. м. Харків, Україна). – Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2021 – С. 27-29.
3. Харченко Д. С. Дослідження форми пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» / Д. С. Харченко // Пріоритетні шляхи розвитку науки і освіти: матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції м. Львів, 20-21 липня 2022 року. – Львів: Львівський науковий форум, 2022. – С. 23-25.
 4. Харченко Д. С. Дослідження явища резонансу у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» / Д. С. Харченко // Теорія і практика сучасної науки та освіти: матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції м. Львів, 20-21 червня 2022 року. – Львів: Львівський науковий форум, 2022. – С. 45-47.
 5. Харченко Д. С. Модуляційна стійкість хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» / Д. С. Харченко, В. В. Наратовий // Матеріали VI Всеукраїнської онлайн-конференції молодих науковців «Сучасні проблеми природничих і точних наук». – Ніжин: «Наука-сервіс», 2021. – С. 63-64.

**Статті у наукових виданнях України, що додатково
відображають результати дисертації**

1. Наратовий В. В. Резонанс другої гармоніки в тришаровій рідині / В. В. Наратовий, Д. С. Харченко // Наукові записки молодих учених. – 2021. – № 8. – <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1891/pdf>

ЗМІСТ

ВСТУП.....	14
РОЗДІЛ 1. СТАН ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМИ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У СИСТЕМАХ ІЗ ШАРУВАТОЮ СТРУКТУРОЮ	23
1.1. Загальний огляд досліджень поширення хвиль у рідинах із різною стратифікацією	23
1.2. Метод багатомасштабних розвинень	46
1.3. Модуляційна стійкість та дослідження потоку енергії	49
1.4. Теоретичні результати розділу 1	51
РОЗДІЛ 2. АНАЛІТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ПРО ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ «ШАР ІЗ ТВЕРДИМ ДНОМ – ШАР – ШАР ІЗ КРИШКОЮ»	53
2.1. Постановка та розв’язання задачі поширення хвильових пакетів у тришаровій системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою».....	53
2.2. Розв’язки першого наближення проблеми.....	59
2.3. Розв’язки другого наближення проблеми	60
2.4. Розв’язки третього наближення проблеми.....	69
2.5. Еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на нижній та верхній поверхнях контакту	72
2.6 Умова модуляційної стійкості	73
РОЗДІЛ 3. АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ ТА ВЗАЄМОДІЇ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ТРИШАРОВІЙ РІДИНІ.....	77
3.1. Аналіз розв’язків задачі першого наближення та дослідження умов проходження хвиль в залежності від зміни фізичних параметрів	77
3.2. Аналіз розв’язків задачі другого наближення та дослідження умов проходження хвиль в залежності від зміни фізичних параметрів	91
3.3. Дослідження умови модуляційної стійкості на поверхнях контакту тришарової гідродинамічної системи	112

3.3.1. Аналіз залежності модуляційної стійкості досліджуваної системи від різних фізичних параметрів для першої пари коренів	112
3.3.2. Аналіз залежності модуляційної стійкості досліджуваної системи від різних фізичних параметрів для другої пари коренів.....	118
3.4. Властивості хвильових пакетів на поверхнях контакту тришарової гідродинамічної системи.....	122
3.4.1. Аналіз форми хвильового пакету на нижній поверхні контакту .	122
3.4.2. Аналіз форми хвильового пакету на верхній поверхні контакту.	131
3.5. Дослідження потоку енергії хвильового руху	138
3.5.1. Аналіз залежності потоку енергії від товщини верхнього та нижнього шару при різних значеннях хвильового числа.....	141
3.5.2. Аналіз залежності потоку енергії хвиль від хвильового числа при різних значеннях товщини верхнього та нижнього шарів	142
3.5.3. Аналіз залежності потоку енергії хвиль від хвильового числа при різних значеннях густин	144
3.5.4. Аналіз залежності потоку енергії хвиль від хвильового числа при різних значеннях поверхневого натягу	145
3.5.5. Сумарний потік енергії хвильового руху в граничному випадку	147
3.6. Дослідження резонансу другої гармоніки хвильового руху в тришаровій рідині.....	148
3.7. Теоретичні результати до розділу 3	156
ВИСНОВКИ	160
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	163
ДОДАТКИ	174

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. В океанах, морях, озерах тощо наявні не лише рідини з постійною густиною, а й рідини, у яких стратифікація густини змінюється залежно від висоти. Дослідження особливостей поведінки внутрішніх хвиль та їх властивостей у стратифікованих природних водах у натурних умовах або в створених у лабораторних умовах подібних водних системах є основними напрямками значної кількості задач сучасної гідродинаміки, океанології, гідравліки, суднобудування, біомеханіки, фізики та низки суміжних наук.

Задачі даного класу пов'язані з розвитком теорії нелінійних хвиль, який припав на період XIX – XX ст., і характеризується здобутками таких видатних учених як К. Л. Нав'є, Г. Стокс, Ж. В. Буссінеск, С. Д. Пуассон та інших. Зокрема, дослідження внутрішніх хвиль у стратифікованих рідинах викладено в працях І. Т. Селезова, А. Х. Найфе, асимптотичні підходи до вивчення поширення внутрішніх хвиль представлено в роботах Ж. В. Буссінеска, Д. Кортвега, Г. де Фріза та інших. Математичні моделі та методи дослідження внутрішніх хвиль у стратифікованих рідинах представлено в працях Д. Уізема, Д. Лайтхілла, Дж. Стокера, Л. В. Овсяннікова тощо. На сучасному етапі експериментальні дослідження поведінки хвиль різних типів у стратифікованих рідинах висвітлені в працях таких науковців, як Р. Камасса, Г. Фалькі, Дж. Ортензі, І. Міндлін, М. Вінче, Б. Тамаш та інших.

Внутрішні хвилі можна спостерігати як на всій території Світового океану, так і в атмосфері у вигляді хвильових хмар. Параметри різних видів внутрішніх хвиль такі як амплітуда, довжина, швидкість поширення, форма можуть змінюватися в досить великих межах. У процесі поширення внутрішніх хвиль у стратифікованих рідинах фундаментальними є механізми дисперсії та нелінійності, що призводять до затушення або загострення форми хвиль відповідно. Інтерес викликає явище рівноваги ефектів нелінійності та дисперсії. Оскільки в тришаровій рідині скінченої глибини,

обмеженої зверху твердою кришкою, а знизу твердим дном, з'являється ще один додатковий параметр, який може мати помітний вплив на ефекти нелінійності та дисперсії – це співвідношення товщин відповідних шарів системи. Як наслідок даний параметр впливатиме і на стійкість та еволюцію хвильових пакетів при їх поширенні на поверхнях контакту.

Особливості хвильових процесів у подібних двошарових стратифікованих моделях досліджувалися В. В. Наратовим, Ю. В. Гуртовим, О. В. Авраменко та І. Т. Селезовим. Зокрема, задача про поширення хвиль у тришаровій гідродинамічній системі досліджувалася М. В. Луньовою. При отриманні аналітичних результатів використовувався метод багатомасштабних розвинень.

Актуальність проблеми поширення хвиль у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» полягає в тому, що дана математична модель дозволить дослідити поведінку хвиль у подібних стратифікованих ділянках Світового океану або в стратифікованих рідинах, створених у лабораторних умовах. Також дане дослідження дозволить вивчити вплив різних фізичних параметрів на еволюцію та стійкість обвідної та інших характеристик системи.

Результати роботи в майбутньому можуть бути використані як теоретична основа для практичних експериментів, пов'язаних зі стратифікованими рідинами та дослідженнями з розробки спеціальних пристроїв, які використовують енергію внутрішніх хвиль.

Крім того, досліджувана модель охоплює широкий клас задач, спрямованих на вивчення поведінки хвиль у стратифікованих рідинах та їх властивостей, і може бути застосована в океанології, суднобудуванні, гідродинаміці, фізиці та споріднених галузях.

Дисертаційну роботу виконано відповідно до індивідуального плану роботи аспіранта та в межах дослідження, здійсненого в Центральноукраїнському державному університеті імені Володимира Винниченка за темою «Прикладна математика у дослідженні складних

систем з детермінованими та стохастичними процесами» (номер державної реєстрації 0116 U 005271).

Мета дисертаційного дослідження передбачає аналіз слабконелінійних процесів у тришаровій рідині; побудову та дослідження математичної моделі поширення хвиль у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» на основі методу багатомасштабних розвинень із застосуванням пакетів символьних обчислень.

Досягнення мети передбачає виконання таких **завдань**:

- виконати огляд сучасних досліджень, присвячених моделюванню хвильових процесів у стратифікованих рідинах;
- побудувати математичну модель тришарової гідродинамічної системи «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою». За допомогою методу багатомасштабних розвинень отримати перші три лінійні задачі;
- вивести еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту та умови модуляційної стійкості;
- дослідити залежність модуляційної стійкості від різних фізичних параметрів;
- виявити нові фізичні закономірності та механічні ефекти в межах досліджуваної моделі: дослідити поведінку відношень амплітуд для першого та другого наближення; оцінити потік енергії, яку переносять внутрішні хвилі на поверхнях контакту; дослідити форму хвильових пакетів та явище резонансу.

Об’єкт дослідження – хвильові процеси в стратифікованих рідинах.

Предмет дослідження – моделювання хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі, обмеженій знизу твердим дном, зверху – твердою кришкою.

Методи дослідження. При дослідженні хвильових процесів у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» було використано наступні методи: метод багатомасштабних

розвинень, комп'ютерне моделювання, методи порівняння, аналізу та синтезу.

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Для математичної моделі задачі поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою», урахувуючи поверхневий натяг на поверхнях контакту, з використанням методу багатомасштабних розвинень отримано перші три лінійні задачі.
2. Для задачі першого наближення виведено дисперсійне рівняння першого порядку та отримано дві пари незалежних розв'язків.
3. За допомогою математичного пакету Maple отримано розв'язки другого наближення та умови існування нетривіальних розв'язків для другого та третього наближень. Також отримано основні аналітичні вирази для вказаних наближень для дослідження основних фізичних характеристик системи. Розроблено відповідні програмні коди.
4. Для перших двох наближень виведено формули відхилень поверхонь контакту з урахуванням розв'язку нелінійного рівняння Шредінгера. Виведено умови, при яких змінюється форма хвильових пакетів на верхній та нижній поверхнях контакту. Наведено та проаналізовано області знакосталості коефіцієнтів при других гармоніках на верхній та нижній поверхнях контакту для обох пар частот, які є коренями дисперсійного співвідношення. Для обох пар коренів дисперсійного співвідношення графічно проілюстровано та проаналізовано різні випадки, при яких виникає асиметрія форми хвильових пакетів.
5. На основі дисперсійного співвідношення та умов існування нетривіальних розв'язків другого та третього наближень виведено еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера. Для обох поверхонь контакту отримано умови модуляційної стійкості.

6. Проілюстровано та проаналізовано залежності меж модуляційної стійкості від товщини нижнього та верхнього шару та від густини середнього та верхнього шарів для капілярних та гравітаційних хвиль за відсутності поверхневого натягу.
7. Отримано вирази відношень амплітуд відхилень поверхонь контакту, які відповідають кореням дисперсійного рівняння для першого та другого наближень. Графічно проілюстровано та проаналізовано залежність відношень амплітуд від різних фізичних параметрів.
8. Досліджено явище резонансу других гармонік, отримано графіки областей резонансу.
9. Графічно проілюстровано та проаналізовано залежність потоку повної енергії від хвильового числа та товщини при різних значеннях фізичних параметрів, зокрема від товщини верхнього та нижнього шару, густини та поверхневих натягів. Розглянуто граничний випадок, за якого отримані результати порівнюються з розрахунком потоку енергії, що переносить хвиля в гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар із кришкою», яка була досліджена раніше [85, 86]. Графічно проілюстровано перехід даної тришарової системи в двошарову.

Практичне значення отриманих результатів. У даній дисертаційній роботі отримано нові результати для задачі поширення хвильових пакетів у тришаровій рідині, обмеженій зверху твердою поверхнею, а знизу твердим дном, яка моделює подібні стратифіковані ділянки в Світовому океані. Дослідження повністю відповідає сучасним потребам прикладних задач, які стосуються моделювання та вивчення хвильових процесів у рідинах різних типів. Отримані аналітичні вирази та програмні коди допомогли дослідити вплив різних фізичних параметрів на умови зміни модуляційної стійкості та форми хвильових пакетів на поверхнях контакту.

Досліджено залежність відношень амплітуд від хвильового числа та товщини для перших двох наближень, отримано аналітичні вирази для розрахунку потоку повної енергії в тришаровій гідродинамічній системі «шар

із твердим дном – шар – шар із кришкою». Досліджено вплив хвильовго числа, товщин нижнього та верхнього шарів, густин середнього та верхнього шарів, поверхневих натягів на зміну потоку повної енергії досліджуваної системи.

Отримані теоретичні та аналітичні дані можуть бути взяті за основу при проведенні експериментальних досліджень в океанології, машино- та суднобудуванні, гідродинаміці, фізиці та ін.

Окремі результати дисертаційного дослідження впроваджено в освітньому процесі в Центральнoукраїнському державному університеті імені В. Винниченка та Центральнoукраїнському національному технічному університеті.

Особистий внесок здобувача. У дисертаційній роботі автору належать отримані аналітичні та теоретичні результати та розробка програмних кодів. Із спільних публікацій [50], [82], [80] та одної одноосібної статті [87] до дисертаційної роботи включені наступні теоретичні, аналітичні та графічні результати, отримані автором: постановки задач, аналітичні та чисельні методи їх розв'язання, результати їх реалізації на комп'ютері, аналіз закономірностей і нових механічних ефектів. Постановка проблеми та загальний задум проведення дослідження належить науковому керівникові кандидату технічних наук, доценту Нарадовому В. В.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження представлено та обговорено в різний час на таких наукових конференціях і семінарах: XIV Міжнародна наукова конференція для молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (м. Харків, Україна 15 березня 2019 р., факультет математики і інформатики Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна); XVI Міжнародна наукова конференція студентів та молодих вчених «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (факультет математики і інформатики Харківського національного

університету імені В. Н. Каразіна, 13 березня, 2021 р.); VI Всеукраїнська онлайн-конференція молодих науковців «Сучасні проблеми природничих і точних наук» у Ніжинському державному університеті імені Миколи Гоголя (14 квітня 2021 року); Всеукраїнська конференція студентів та молодих науковців «Математичні, природничі та комп'ютерні науки, технології, навчання: науково-практичні рішення та підходи молодих науковців» (1 грудня 2021 р.); V Міжнародна науково-практична конференція «Теорія і практика сучасної науки та освіти» (20–21 червня 2022 року, м. Львів: Львівський науковий форум); V Міжнародна науково-практична конференція «Пріоритетні шляхи розвитку науки і освіти» (20–21 липня 2022 року, м. Львів: Львівський науковий форум). Також результати дослідження регулярно обговорювались на семінарі «Математика, її застосування та викладання» та на семінарах із прикладної математики (Центральноукраїнський державний університет імені В. Винниченка).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи та аспекти математичної методології опубліковано в 9 друкованих працях, із яких 2 публікації в наукових фахових виданнях України [80, 87] з фізико-математичних наук, що входять до міжнародних наукометричних баз даних, 1 стаття опублікована в університетському збірнику ЦДПУ ім. В. Винниченка [82], 1 публікація належить до іноземного журналу 1-го квартіля (на момент опублікування), який індексується в базі даних Scopus [50]. Додаткові результати опубліковано в 5 збірках матеріалів конференцій [88, 89, 91, 92, 90] у формі тез доповідей.

Структура роботи. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновку й списку літератури, який містить 92 найменування. Також робота містить 5 додатків. Загальний обсяг дисертації – 199 сторінок, 87 рисунків.

Основний зміст роботи

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, наукову новизну та практичне значення результатів роботи, сформульовано мету, завдання,

визначено об'єкт, предмет, окреслено методи дослідження; сформульовано положення, що виносяться на захист; подано короткий зміст роботи за розділами.

У першому розділі висвітлено загальний стан дослідження проблеми поширення хвиль у рідинах різних типів, зокрема в тришарових стратифікованих рідинах у різних умовах. Здійснено огляд експериментальних та теоретичних досліджень зарубіжних та вітчизняних науковців. Наведено приклад використання методу багатомасштабних розвинень на прикладі двошарової гідродинамічної системи, також наведено приклад виводу умови модуляційної стійкості та формул для дослідження потоку енергії.

У другому розділі досліджено проблему поширення хвиль у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» з урахуванням поверхневого натягу.

Отримано постановку задачі в безрозмірному вигляді. За допомогою методу багатомасштабних розвинень отримано перші три наближення задачі. Для задачі першого наближення виведено дисперсійне рівняння першого порядку та отримано дві пари незалежних розв'язків, які є частотами центрів хвильових пакетів. Отримано аналітичні розв'язки задачі другого наближення. Для другої та третьої лінійної задачі знайдено умови існування нетривіальних розв'язків.

Виведено еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера на основі дисперсійного співвідношення та умов існування нетривіальних розв'язків другого та третього наближень. Для обох поверхонь контакту отримано умови модуляційної стійкості.

У третьому розділі отримано вирази відношень амплітуд відхилень поверхонь контакту, які відповідають кореням дисперсійного рівняння для першого та другого наближень. Графічно проілюстровано та проаналізовано залежність відношень амплітуд від різних фізичних параметрів.

З урахуванням розв'язку нелінійного рівняння Шредінгера для першого та другого наближень виведено формули відхилень поверхонь контакту. Виведено умови, при яких змінюється форма хвильових пакетів. Побудовано та проаналізовано області знакосталості коефіцієнтів при других гармоніках на поверхнях контакту для обох пар частот. Досліджено різні випадки накладання максимумів та мінімумів першої та другої гармонік, при яких виникає асиметрія форми хвильових пакетів. Досліджено умови модуляційної стійкості, зокрема здійснено аналіз залежності модуляційної стійкості від товщин верхнього та нижнього шарів та густин середнього та верхнього шарів. Досліджено явище резонансу других гармонік. Для задачі першого наближення досліджено залежність сумарного потоку енергії, яку переносять внутрішні хвилі, від хвильового числа та товщини при різних значеннях фізичних параметрів. Розглянуто граничний випадок, за якого дана тришарова система вироджується у двошарову, яка була досліджена раніше. Усі результати проілюстровано графічно.

У **висновках** сформульовано основні теоретичні результати дослідження проблеми моделювання хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою», визначено їх практичний інтерес.

Автор висловлює щире подяку своєму науковому керівникові, кандидату технічних наук, доценту Нарядовому Володимирі Володимировичу за постійну увагу до роботи, цінні поради та пропозиції, що сприяли успішному проведенню дослідження.

РОЗДІЛ 1.

СТАН ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМИ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У СИСТЕМАХ ІЗ ШАРУВАТОЮ СТРУКТУРОЮ

Перший розділ присвячено розгляду загального стану досліджень, пов'язаних із вивченням поведінки хвиль у рідинах різного типу, з різною стратифікацією як у натурних умовах, так і в експериментальних. Здійснено огляд зарубіжних та вітчизняних науковців. Також наведено приклади використання методу багатомасштабних розвинень, виводу умови модуляційної стійкості та формул для дослідження потоку енергії.

1.1. Загальний огляд досліджень поширення хвиль у рідинах із різною стратифікацією

За останні роки вченими різних країн були проведені дослідження, що стосуються вивчення хвиль у рідинах та рідинних системах із різними властивостями. Так, наприклад, у дослідженні [2] виконується порівняння еволюції окремих хвильових пакетів, змодельованих із використанням повністю нелінійних моделей потенційного потоку, з пакетами, змодельованими з використанням нелінійних рівнянь типу Шредінгера. Модифіковане нелінійне рівняння Шредінгера точно моделює відносно великомасштабні нелінійні зміни форми хвильових груп із різким скороченням групи уздовж середнього напрямку поширення й відповідним розширенням ширини гребенів хвиль. Існує локальне нелінійне скорочення хвильової групи навколо гребеня як крайня форма хвилі, яке призводить до локалізованого розширення спектра хвиль, який намагаються вловити нелінійні рівняння Шредінгера, обмежені пропускнуою здатністю. Дане обмеження виникає для хвиль вузького основного спектра і середньої крутизни.

У дослідженні [3] американським науковцем Т. Р. Акіласом обговорюється нова парадигма, введена Девідом Дж. Бенні в дослідженні

нелінійних явищ, що виходить за межі механіки рідини, і висвітлює спільні теми його дослідницьких робіт, а саме: значення тривимірних збурень у нестійкості та переході зсувної течії; резонансні нелінійні хвильові взаємодії; вивід нелінійних еволюційних рівнянь, у тому числі знаменитого нелінійного рівняння Шредінгера для модульованих цугів хвиль.

Вплив змінного середовища на рівняння Островського зі змінним коефіцієнтом враховується у дослідженні [5]. В умовах фонового обертання вивчається вплив змінного середовища на поширення океанічних внутрішніх поодиноких хвиль. Отриманий ефект у рівнянні Островського може змінити розмір обвідної хвильового пакету та його амплітуду.

У статті [4] з використанням методів асимптотичних збурень та чисельного моделювання досліджуються нелінійні хвилі в стратифікованій рідині за наявності зсувного потоку. Отримане дисперсійне співвідношення системи, засноване на тришаровій моделі стратифікованого зсувного потоку, виявляє різні динамічні характеристики, включаючи існування нестационарних і сталих хвильових пакетів огинаючої.

Досліджуючи короткохвильові асимптотичні розв'язки хвильового рівняння з локалізованими збуреннями швидкості, А. І. Аллілуєва та А. І. Шафаревич описують поширення хвильових пакетів, у яких характерна довжина хвилі порівнюється з масштабом неоднорідності [6]. Хвильове рівняння з малим параметром, яке характеризує відношення масштабів локалізованої неоднорідності й загальної зміни швидкості (наприклад, товщини пікноклину до зовнішнього типового масштабу зміни густини океану), використовується для опису поширення хвиль у середовищах, що містять локалізовані швидкозмінні неоднорідності (наприклад, вузькі підводні хребти або пікноклини в океані, шари з різко змінною оптичною або акустичною густиною тощо).

Авторами статті [7] вільні внутрішні хвилі в наближенні Буссінеска розглядаються в двовимірному вертикально неоднорідному стратифікованому потоці з урахуванням обертання Землі. В результаті

дослідження встановлено, що уявна частина частоти мала й може бути як позитивною, так і негативною, звідси можливе як слабке затухання, так і слабке посилення хвилі в залежності від хвильового числа та номера моди. Потоки імпульсу вертикальної хвилі відмінні від нуля й можуть перевищувати відповідні турбулентні потоки.

Дослідженню внутрішніх хвиль великої амплітуди сильно нелінійної довгохвильової моделі в тришаровому потоці між двома твердими границями присвячена стаття Р. Барроса та інших [13]. Основну увагу приділено одиночним хвилям другого бароклінічного режиму та їх сильно нелінійним характеристикам, які не вдається захопити слабко нелінійними моделями. Результати показують, що відокремлені хвильові розв'язки моделі керуються гамільтоновою системою з двома ступенями свободи. Показано, що хвилі великої амплітуди другого режиму з односторонніми профілями можуть бути описані одиночними хвильовими розв'язками моделі МСС. За умови слабкої стратифікації густини й тонкого шару переходу густини з'являються нові класи одиночних хвильових розв'язків другого режиму великих амплітуд, що характеризуються багатогрбними хвильовими профілями. Для заданої конфігурації шару отримані багатогрбні розв'язки не можуть існувати для безперервного набору швидкостей хвилі.

У 2021 році Р. Б'янкіні, А. Л. Далібар та Л. Сен-Реймон розглядали явище опису внутрішніми хвилями відгуку нестисливої стабільно стратифікованої рідини на невеликі збурення [14]. Встановлено, що слабконелінійні й слабков'язкі хвильові рівняння мають розв'язок, що добре апроксимується сумою відбитої другої гармоніки, падаючого хвильового пакета та деяких членів прикордонного шару.

У статті [15] у рідині, що обертається, з безліччю конвективно стійких і нестійких шарів, які чергуються, досліджується передача хвиль у випадках, коли відбувається тунелювання хвилі та коли хвиля поширюється в кожному шарі. Встановлено, що навіть коли стабільні шари сильно стратифіковані, може бути досягнута ефективна передача хвиль за рахунок «резонансного

тунелювання» або «резонансного поширення». Також показано, що покращена передача хвиль відбувається тільки при непарній кількості шарів.

У лабораторному дослідженні [17] авторами отримано багатомасштабний розв'язок для середнього ейлерового потоку під хвильовими пакетами, який є справедливим для всіх глибин води відносно як довжини хвилі, так і довжини хвильового пакета. Для визначення середнього руху лагранжевих затравних частинок під хвильовими пакетами проведено відповідні експерименти з відстеження швидкості руху частинок у довгому жолобі, отримані результати добре узгоджуються. Методика вилучення дозволяє впоратися з невеликими фоновими рухами й хвилями субгармонійних помилок, пов'язаних з генерацією хвиль лопастю, причому остання відносно велика в експериментах з лотками кінцевої глибини.

Науковець Р. Камасса разом з групою вчених представив результати дослідження теорії ідеальних тришарових рідин, стратифікованих за густиною для узагальнення випадку, коли налічується n -шарів [18]. У статті досліджені структурні властивості, особливо розглядається випадок жорсткого обмеження верхньої кришки. Встановлено, що довгохвильова бездисперсійна межа є системою квазілінійних рівнянь, що не допускають інваріантів Рімана.

У наступному дослідженні Ю. Чашечкін за допомогою методів теорії сингулярних збурень у лінійному та слабонелінійному наближенні розглянув задачу генерації пучків періодичних внутрішніх хвиль у в'язкій експоненціально стратифікованій рідині смугою, що коливається вздовж похилої площини [20]. Також автором розглядається проблема генерації внутрішніх хвиль за допомогою швидкої бігармонічно коливної вертикальної смуги. Нелінійно взаємодіючі зв'язки також генерують періодичні хвилі, якщо частота плавучості більша за різницю частот спектральних складових руху смуги. Результати показують, що амплітуди таких хвиль досить великі, щоб їх можна було спостерігати в лабораторних умовах.

Структура течії періодичних сталих хвиль на воді фіксованого відносного потоку маси, що поширюються по обертальних течіях з кусково-постійною завихреністю чисельно досліджувалась Л. Ченом спільно з Б. Басу та К. І. Мартіном [21]. Також були обговорені результати розподілу тиску й траєкторій частинок під сталими хвилями великої амплітуди поблизу стагнації, розширені попередні результати, що стосуються амплітуди й масового потоку сталих хвиль на воді, що рухаються по обертальних потоках з переривчастою завихреністю.

У колективному дослідженні [23] за допомогою методу збурень, наближених нелінійних еволюційних рівнянь (НЕР) для міжфазно-внутрішніх підйомів, поданих на основі вільної верхньої межі поверхні і плоского непроникного дна, єдиної теорії поширення нелінійних міжфазно-внутрішніх хвиль та на основі малого параметра крутизни обговорюються тришарові стратифіковані за густиною, нестисливі, нев'язкі та іротаційні рідинні системи довільної глибини. Також обговорюються НЕР, які виникають у різних граничних випадках глибини рідини.

Також метод збурень використовувався для дослідження гравітаційно-капілярних водних хвиль у тришаровій стратифікованій рідині [24]. Асимптотичні розв'язки потенціалів швидкості другого порядку і розв'язки Стокса другого порядку, пов'язані з висотами гравітаційно-капілярних хвиль води, представлено на основі теорії хвиль малих амплітуд. Отримані розв'язки першого та другого порядку залежать не тільки від глибини та густини тришарової рідини, а й від поверхневого натягу.

У статті [25] в лабораторних масштабах дослідники Д. Діпвелл, К. Клеррі, К. Субіч та М. Стастна здійснили чисельне моделювання процесу поширення внутрішньої окремої хвилі повз ізольоване звуження бічної стінки. Результати показують, що збільшення співвідношення сторін звуження (висоти до ширини) і амплітуди хвилі призводить до більшого бокового і вертикального переносу, збільшення щільності перекидання та до більш сильних вихорів.

Авторами статті [26] за рахунок фокусуючих хвильових пакетів, що розриваються і не розриваються, досліджується перенос Лагранжа. Шляхом дослідження дрейфу Лагранжа через відстеження частинок-індикаторів у воді до, під час і після події розриву, представлено пряме чисельне моделювання двофазних рівнянь Нав'є-Стокса повітря-вода, що описують фокусуючі хвильові пакети. Чистий горизонтальний перенос нерозривних фокусуючих пакетів добре описується класичним стоксовим дрейфом як на поверхні, так і в основній масі рідини, де ϵ -кратний масштаб зникаючого вертикального профілю задається характеристичним хвильовим числом. Установлено, що викликане руйнуванням перенесення Лагранжа масштабується зі збільшенням міцності на розрив. Пропонується простий масштабний аргумент для опису цього додаткового дрейфу, який узгоджується з прямим чисельним моделюванням. Обговорюються додатки до процесів у верхніх шарах океану.

Тер-Крікоров А. М. досліджував еволюцію вихорів та внутрішніх хвиль у стратифікованій рідині [67]. Науковцем розглядалася задача про рух ідеальної стратифікованої рідини, яка формулювалася з використанням відстані положення рівноваги рідкої частинки в якості незалежної змінної замість звичайної вертикальної координати. Розв'язок шукається у вигляді ряду по малому параметру при малих відхиленнях від положення рівноваги.

У статті О. Держо досліджується поширення плоских капілярних гравітаційних відокремлених хвиль постійної форми в тришаровій постановці. Верхня та нижня рідина вважаються однорідними й нескінченно глибокими, проміжна рідина – стратифікованою. Одна або обидві границі розділу схильні до капілярності. Встановлено, що капілярно-гравітаційні відокремлені хвилі скінченної амплітуди підкоряються інтегрально-диференціальному рівнянню, яке містить закони дисперсії Кортвега-де Фріза (KdV) і Бенджаміна-Оно (БО), а також специфічну нелінійність, що залежить від властивостей стратифікованого шару [27].

Проведено також експериментальне дослідження поширення високих внутрішніх відокремлених хвиль (ISW) у потоці стратифікованої рідини по великому трикутному гребеню. За допомогою приладу для вимірювання хвиль у реальному часі та велосіметрії по зображеннях частинок були виміряні характеристики поширення піднесених ISW над гребенем [28].

У статті «Розрив внутрішніх гравітаційних хвиль, викликаний зсувом» К. Дж. Хауленда, Дж. Р. Тейлора та К. П. Колфілда взаємодія внутрішньої гравітаційної хвилі великої амплітуди і синусоїдального зсувного потоку досліджується шляхом використання прямого чисельного моделювання. Також здійснюється обговорення взаємодії між внутрішньою гравітаційною хвилею, середнім потоком і турбулентністю, та наслідків цієї взаємодії для внутрішнього хвильового перемішування в океані [31].

Стаття «Підхід Лагранжа до міжфазних хвиль у воді з вільною поверхнею» висвітлює теоретичні результати дослідження міжфазних водних хвиль в двошаровій системі з вільною поверхнею, де нижня рідина вважається важчою за верхню. Для фізичних полів, розділених інтерфейсом, введені умови узгодження Лагранжа. Встановлено узагальнений ефект, за яким середні рівні Лагранжа наближаються як до вільної поверхні, так і до внутрішньої поверхні розділу. Показано, що більша різниця густини або відносна висота хвилі призводить до більшої дрейфової швидкості. Напрямок руху частинок у верхньому шарі здійснюється проти годинникової стрілки, у нижньому шарі – навпаки. Чисельно продемонстрована краща конвергенція розв'язку Лагранжа, ніж розв'язку Ейлера для баротропного режиму, коли рух хвиль домінує на вільній поверхні [32].

Корейські дослідники Джо Те-Чанг та Чой Янг-Кванг досліджували динаміку внутрішніх відокремлених хвиль у мілководді за допомогою сильно нелінійної внутрішньої довгохвильової моделі в тришаровій рідині, яка є продовженням двошарової моделі МСС. Фазову швидкість було оцінено з метою аналізу стійкості відокремлених хвиль під час їх поширення. Було встановлено, що механізм нестійкості виявляється як нестабільність типу

Кельвіна-Гельмгольца, подібна до двошарової моделі МСС. Проведено чисельне дослідження тришарової моделі відносно впливу середнього шару та неоднорідної топографії дна, також досліджено генерацію відокремлених хвиль для демонстрації багатодинаміки тришарової моделі [34].

У дослідженні Е. Р. Джонсона розглядається аномальне рівняння Островського, що описує хвилі в океанічних потоках із вертикальним зсувом та магнітоакустичні хвилі, яке має стійко поширювані розв'язки кінцевої амплітуди у вигляді локалізованих хвильових пакетів [35]. Встановлено, що з використанням теорії модуляції Уізема як розв'язку нелінійної задачі на власні значення, дані розв'язки можуть бути отримані асимптотично. Це дозволяє описувати різні розв'язки хвильових пакетів і порівнювати їх із розв'язками повних рівнянь руху. Також побудовано періодичний розв'язок із вкладеним цугом хвиль.

О. Каргбо та інші дослідники в умовах плескання для взаємодії з жорсткою пористою структурою у вигляді Т-подібної перегородки в прямокутному резервуарі побудували чисельну модель, яка містить шари рідкої нафти та води, стратифіковані за густиною [36]. Довільний метод Лагранжа-Ейлера використовується для відстеження еволюції міжфазної та вільної поверхневої хвилі, при цьому рівняння Нав'є-Стокса та Брінкмана керують потоком нестисливої рідини та потоком через пористу область відповідно. Аналізується вплив пористої структури і її ефективність у демпфуванні пов'язаних з нею хвиль, що виплескуються, і ударного тиску на стінки резервуара при різних конфігураціях установки.

Автори П. Кунду та Б. Н. Мандал за рахунок осесимметричного початкового збурення поверхні досліджували проблему генерації хвиль для в'язкої рідини скінченної глибини [39]. Для отримання форми вільної поверхні в термінах кратного нескінченного інтеграла використовувалися методи перетворення Лапласа і Ханкеля. Асимптотику вільної поверхні для різних типів початкових збурень і різних значень параметра в'язкості проілюстровано графічно, зроблено відповідні висновки.

У спільному дослідженні А. І. Дяченко, С. А. Дяченко та В. Є. Захарова [29] вивчався двовимірний (2-D) потенційний потік ідеальної рідини з вільною поверхнею з умовами загасання на нескінченності. Ця робота пропонує новий погляд на динаміку рідини з вільною поверхнею шляхом об'єднання проблеми руху вихрових шарів і проблеми двовимірних хвиль у воді.

Довгі слабконелінійні внутрішні хвилі кінцевої амплітуди в тришаровій рідині, що складається з нев'язких шарів довільної товщини та постійної густини, обмежених горизонтальним жорстким дном знизу та жорсткою кришкою на поверхні, були предметом колективного дослідження О. Куркіної, А. Куркіна, Є. Рувінської та Т. Сомера [40]. Дані хвилі описано до другого порядку теорії збурень із малими параметрами нелінійності та дисперсії. Для переміщень обох мод внутрішніх хвиль і кожної межі розділу шарів виведено пару варіантів відповідних рівнянь типу КдФ із коефіцієнтами, що залежать від параметрів рідини. Представлено детальний аналіз взаємозв'язків для розв'язків для збурень на обох інтерфейсах і різних режимів виникнення та властивостей розповсюдження солітонових розв'язків цих рівнянь залежно від комбінацій параметрів рідини. Показано, що як квадратичні, так і кубічні нелінійні члени дорівнюють нулю для декількох реалістичних конфігурацій такої рідини.

Огляд океанографа Принстонського університету Соні Легг узагальнює сучасну теорію лінійних підвітряних хвиль та результати тривалих спостережень за генеруванням та змішуванням підвітряних хвиль, спричинених руйнуванням хвилі, розрізняючи стійке та припливно-коливальне форсування [41]. Окреслено існуючі параметризації перемішування, спричиненого підвітряною хвилею, засновані на теорії та спостереженнях, а також узагальнено вплив параметризованого змішування, спричиненого підвітряною хвилею, на моделювання великомасштабної циркуляції океану.

Робота [42] присвячена дослідженню тривалої за часом поведінки двовимірних стискуючих рівнянь Нав'є-Стокса-Кортевега, які використовуються для моделювання стисливих рідин із внутрішньою капілярністю. Спочатку виводиться плоска хвиля розрідження для двовимірних стискуючих рівнянь Нав'є-Стокса-Кортевега. Далі показано, що якщо початковими даними є досить малі збурення плоскої хвилі розрідження, то плоска хвиля розрідження асимптотично стійка. Отриманий доказ заснований на делікатному енергетичному методі. Це перший результат стійкості плоскої хвилі розрідження до багатовимірних в'язких рідин із внутрішньою капілярністю.

У колективному дослідженні Лобовікова П. В. та інших методами чисельного моделювання в межах повнонелінійної двовимірної системи рівнянь Нав'є-Стокса в тришаровій рідині з нерівним дном у вигляді згладженої сходинок розв'язується задача про поширення локалізованого внутрішнього збурення у вигляді осцилюючого хвильового пакета (бризера) першої моди [43]. Проведено розрахунки для різних значень ширини та висоти нижньої сходинок. Здійснено амплітудний і енергетичний аналіз вторинних відображених нелінійних хвиль. Проаналізовано модовий склад повнонелінійного хвильового поля. Показано, що найбільший внесок у вертикальну структуру повнонелінійного пакета робить перша мода. Однак також помітний внесок четвертої, другої і третьої мод.

У роботі [45] на вібростолі було випробувано горизонтальне коливання стратифікованих за густиною рідин. У частково заповненому прямокутному резервуарі проведено серію експериментів для аналізу впливу частоти збурення на плескання рідин, стратифікованих за густиною. Для моделювання проблем з розплескуванням двошарової рідини було використано програму MultiphaseInterFOAM в OpenFOAM. Отримані результати показують, що дана модель може точно моделювати явище сплеску стратифікованих рідин. Також у статті представлено закон реакції максимального підйому міжфазної хвилі на частоту зовнішнього збурення.

Науковцями Н. Макаренком, Я. Мальцевою та іншими напіваналітично досліджується задача про внутрішні хвилі у слабо стратифікованій двошаровій рідині. Розглянуто 2,5-шарові потоки рідини з експоненціальною стратифікацією обох шарів [46]. Довгохвильова модель, що описує бігові хвилі, будується за допомогою процедури масштабування з невеликим параметром Буссінеска. Показано, що на режим одиночної хвилі може впливати нестабільність Кельвіна-Гельмгольца, що виникає внаслідок зсуву міжфазної швидкості у верхньому потоці.

У статті І. Міндіна [48] в резервуарі з водою експериментально перевірено аналітичні результати нелінійної теорії хвильових пакетів, які зіставлено з аналітичними результатами теорії слабонелінійних гравітаційних хвиль на нескінченній вільній поверхні рідини та результатами лінійної теорії малоамплітудних хвиль.

У дослідженні А. Островського та Ю. Степанянца розроблено кінематичний підхід до опису взаємодії солітонів, який дозволяє отримати важливі характеристики взаємодії відокремлених хвиль, що поширюються під кутом один до одного [52]. Розроблена теорія порівнюється з точними розв'язками рівняння Кадомцева-Петвіашвілі та застосовується до спостережуваної взаємодії відокремлених внутрішніх хвиль у двошаровій рідині в рамках двовимірної моделі Бенджаміна-Оно.

Вивченню внутрішніх хвиль в стратифікованій рідині з постійною частотою плавучості присвячене дослідження зарубіжних учених [53]. Значна увага приділяється режимам-убивцям, екстремальним хвилям, динамічній еволюції і явищам повторюваності типу Фермі-Паста-Улама-Цінгоу. В результаті дослідження виникли повторювані типи циклів зростання й розпаду Фермі-Паста-Улама-Цінгоу, подібні до тих, що спостерігаються для груп поверхневих гравітаційних хвиль, що керуються кубічним нелінійним рівнянням Шредінгера. Досліджені механізми поглиблюють розуміння транспортних процесів в океанах.

С. Панда у своєму дослідженні [54] аналізує явище відбиття та передачі водних хвиль у двошаровій системі, покритій кригою. Верхній шар покритий крижаним листом, тоді як дно нижнього шару є хвилеподібним і проникним. За допомогою регулярного аналізу збурень та методу перетворення Фур'є визначено коефіцієнти відбиття та пропускання першого порядку. Ці коефіцієнти залежать від форми та проникності хвилеподібного дна. Обговорено роль пористості, кута падіння й параметрів льоду для аналізу трансформації енергії падаючої хвилі води від одного шару до іншого. Результати демонструються графічно.

В іншій роботі С. Панди в співавторстві з С. Ч. Мартою досліджено явище відбивання і передачі водних хвиль через хвилеподібне проникне дно в двошаровій рідинній системі з використанням двовимірної лінеаризованої теорії [56]. Ураховується вплив поверхневого натягу. Виявлено, що коефіцієнти відбиття та пропускання отримано в термінах інтегралів, які залежать від функції форми хвилеподібного дна. Для визначення цих коефіцієнтів досліджуються два різних типи хвилеподібного дна. Для синусоїдального хвилеподібного дна графічно продемонстровано вплив різних фізичних параметрів. Також у роботі уточнюються співвідношення енергетичного балансу з коефіцієнтами відбиття та передачі для перевірки правильності усіх обчислювальних результатів.

Разом з Ж. К. Саутом Х. А. Пава досліджував систему проміжних довгих хвиль разом з її межею Бенджаміна-Оно та дисперсійну систему Буссінеска-Фулла. Метою авторів було встановлення існування відокремлених хвильових розв'язків для двох класів двошарових систем, що моделюють поширення внутрішніх хвиль [57].

У статті Є. Пеліновського, Т. Таліпової, І. Діденкулової та Е. Діденкулової висвітлено результати дослідження поширення довгих хвиль у двошаровій рідині змінної глибини для конкретних конфігурацій дна, які дозволяють хвилям поширюватися на великі відстані [58]. Подібні конфігурації визначаються сімейством розв'язків звичайного

диференціального рівняння другого порядку з трьома довільними константами й зустрічаються в межах лінійної теорії мілководдя. Результати статті розширюють теорію професора Роджера Грімшоу про внутрішні хвилі в неоднорідних стратифікованих рідинах до нових типів розв'язків.

Вплив повторюваних тропічних циклів на амплітуду та частоту хвильових пакетів Россбі синоптичного масштабу в південній частині Індійського океану, західній частині північної частини Тихого океану та в Північній Атлантиці за 30-річний період вивчається Джуліаном Ф. Квінтінгом та Сарою Джонс [61]. Спостерігається значне збільшення частоти хвильових пакетів Россбі вниз за течією від тропічних циклів Тихого океану та південної частини Індійського океану. Передбачається, що хвильові пакети Россбі, пов'язані з тропічними циклами, більш сильні, ніж ті, які зазвичай виникають у середніх широтах. Дослідники припускають, що тропічні цикли в Північній Атлантиці не пов'язані зі статистично значущим збільшенням амплітуди та частоти хвильових пакетів Россбі нижче за течією.

У роботі [63] досліджується поширення одновимірних нестационарних хвиль в насиченому багат шаровому ґрунті з рідким поверхневим шаром. На чисельних прикладах аналізується вплив коефіцієнтів динамічної проникності для рідини на перехідну характеристику моделі, що важливо в додатках для морської сейсміки та акустики океану.

У дослідженні Донг Су [64] виведено розв'язок, який описує азимутальні екваторіальні хвилі Лагранжа, що поширюються на схід у стратифікованій рідині, що обертається.

Дослідженням внутрішніх хвиль займалась вітчизняна дослідниця К. Терлецька. Спільно з В. Мадеричем та вченими Корейського інституту океанічних наук і технологій К. Терлецька чисельно досліджувала динаміку і енергетику лобового зіткнення внутрішніх відокремлених хвиль першої моди в стратифікованій рідині з двома однорідними шарами, розділеними тонким міжфазним шаром, в рамках рівнянь Нав'є-Стокса [68]. Отримано такі результати: лобове зіткнення внутрішніх відокремлених хвиль малої та

помірної амплітуди призводить до малого фазового зсуву й генерації цуга дисперсійних хвиль, що біжить за минулою відокремленою хвилею; збільшення амплітуд взаємодіючих хвиль призводить до зростання фазового зсуву; при зіткненні хвиль максимальна амплітуда нахату досягає значення, яке перевищує суму амплітуд падаючих відокремлених хвиль; зі збільшенням амплітуди взаємодіючих хвиль малої і помірної амплітуд перевищення максимальної амплітуди нахату над сумою амплітуд зустрічних хвиль зростає, для зустрічних хвиль великої амплітуди – зменшується.

В іншій своїй роботі Терлецька розглядала актуальні проблеми океанографії, пов'язані зі стратифікованими течіями, такими як гравітаційні потоки на континентальному схилі біля Антарктичного півострова, де розташована українська антарктична станція імені Вернадського, генерація та поширення внутрішніх хвиль у морях та океанах та їх вплив на перемішування в шельфових зонах [69].

Угорські дослідники М. Вінче та Б. Тамаш експериментально вивчали міжфазні внутрішні хвилі в стратифікованій рідині, порушеній періодичними збуреннями вільної поверхні в закритому резервуарі [70]. Також досліджено зв'язок між амплітудами внутрішніх хвиль і горизонтальними поверхневими швидкостями, якісно описано моделі потоку, що розвиваються, швидкості внутрішніх хвиль систематично проаналізовано та порівняно з лінійними дво- і тришаровими теоріями.

У роботі [73] з метою дослідження взаємодії між внутрішніми відокремленими хвилями (ISW) і платформами натяжних опор (TLP) з використанням запропонованого числового водостоку та великомасштабного стратифікованого за густиною резервуара проведено серію численних випадків. Встановлено, що амплітуди крутного моменту й безрозмірної горизонтальної сили лінійно збільшуються з безрозмірною амплітудою, амплітуди вертикальної сили збільшуються по параболічній кривій. Також вертикальні та горизонтальні сили, що діють на TLP через ISW, можна

розділити на три компоненти: сили в'язкого перепаду тиску, сили хвильового перепаду тиску та сила тертя, якою можна знехтувати.

У колективному дослідженні японських науковців Я. Ватанабе, Й. Цуди та А. Саруватарі для довільної глибини води виводяться загальні умови фокусування хвильового пакета [74]. В експериментах на мілководді запропоновані умови використовувалися для моделювання обмілення хвильового пакета, що фокусується на плоскому й похилому дні. Також у фокусуючих хвильових групах обговорено ефекти глибинного обвалу хвиль.

У статті [75] гравітаційні хвилі стоксового типу в системі двох горизонтальних шарів нев'язкої стратифікованої рідини, що змішується, вивчаються норвезькими дослідниками Я. Е. Х. Вебером та К. Х. Крістенсеном за допомогою лагранжевого опису руху рідини. Показано, що для того, щоб повний вертикально-інтегрований потік Стокса став рівним нулю, густина повинна бути неперервною на границі розділу.

Робота [76] присвячена дослідженню внутрішніх відокремлених хвиль великої амплітуди в двошаровій рідинній системі з вільною поверхнею. Для глибокої конфігурації проведено лабораторні експерименти над сильнонелінійними внутрішніми відокремленими хвилями з вільною поверхнею. Виявлено, що модель MCC-FS (Міята-Чой-Камасса) неточно розраховує внутрішні відокремлені хвилі з вільною поверхнею. Отже, для глибокої конфігурації розроблено сильно нелінійну двошарову високорівневу модель Гріна-Нагді (HLGN-FS), яка включає ефекти вільної поверхні. Встановлено, що модель MCC-FS може дати точні результати для неглибоких конфігурацій, у той час як модель HLGН-FS точно описує внутрішні відокремлені хвилі як для мілкої, так і для глибокої конфігурації.

Вивчення поведінки хвиль у рідинах також стосується досліджень, пов'язаних з енергією хвиль та перетворенням її в електричну енергію та створенням відповідних пристроїв. Наведемо приклади таких досліджень.

Португальські вчені Кел, Діас, Перейра та Відеман досліджували крайові хвилі та захват енергії хвиль уздовж періодичних берегових ліній у

двошаровій рідині [16]. Отримано умови на прибережному схилі, які, якщо вони виконуються, гарантують існування крайових хвиль. Дані умови показують, що багато простих берегових профілів, таких як шельфові та скелясті узбережжя, а також похилі пляжі, витримують крайові хвилі.

Польський океанограф С. Р. Массель розглядав концепцію збереження потоку енергії для внутрішніх хвиль, що поширюються в неоднорідній мілкій воді [47]. У його дослідженні акцент зроблено на застосуванні розв'язку рівняння Кортевега-де Фріза в заданій формі кноідальних і відокремлених хвиль. Чисельне моделювання було застосовано для південної частини Балтійського моря, уздовж розрізу від басейну Борнхольм, через Слупський поріг до Гданського басейну. Також розглянуто тришарову структуру густини, характерну для Балтійського моря. Виявлено, що динаміка внутрішньої хвилі по обидва боки Слупського порогу відрізняється у зв'язку з різною вертикальною стратифікацією густини в цих областях. Нижнє тертя має незначний вплив на динаміку внутрішніх хвиль, а нестабільність зсуву може бути важливою тільки для дуже високих хвиль. Область можливої нестабільності, виражена числом Річардсона, дуже мала й розташована в межах неоднорідного за густиною шару, близько до границі з верхнім однорідним шаром. Вивчено кінематичні критерії руйнування та визначено критичні висоти внутрішньої хвилі.

Науковці С. Панда та С. Ч. Марта проводили дослідження з вивчення трансформації енергії водної хвилі в двошаровій рідині з нерегулярним дном із урахуванням впливу поверхневого натягу [55]. У їх роботі аналіз збурень із наступним перетворенням Фур'є використовується для вивчення явищ відбиття та передачі. Коефіцієнти відбиття та передачі оцінюються до першого порядку. Дані коефіцієнти продемонстровано графічно з метою демонстрації впливу деяких фізичних параметрів, таких як кількість пульсацій, поверхневий натяг, на перетворення хвильової енергії між хвилями двох різних мод.

Стаття [72] присвячена дослідженню внутрішніх хвиль та їх ролі у змішуванні океану. Представлено методологію розрахунку збурень густини й потоку енергії внутрішніх хвиль лише з використанням поля швидкостей, яке базується на лінеаризованих рівняннях для внутрішніх хвиль. Розроблений метод було протестовано шляхом чисельного моделювання внутрішніх хвиль, що генеруються припливною течією над топографією Гаусса в стратифікованій рідині. За допомогою даного методу були визначені збурення густини та потоки енергії з використанням лише даних про швидкість, узгоджених із збуреннями густини й потоками енергії, що визначаються рівнянням стану за даними температури.

Італійський дослідник Джакомо Моретті та інші представили діелектричний еластомірний генератор (DEG), здатний перетворювати енергію коливань, що переноситься водними хвилями, в електрику [49]. Прототип DEG побудовано з використанням комерційної поліакрілатної плівки, і експериментальна кампанія проводиться у хвилеподібній установці, тобто в штучному басейні, який дозволяє генерувати запрограмовані маломасштабні хвилі з різними частотами та амплітудами. Представлені результати є багатообіцяючою демонстрацією роботи й ефективності перетворювачів енергії океанських хвиль на основі пружних ємнісних генераторів.

Об'єктом дослідження [44] є новий адаптивний пристрій генерації енергії реверсивних хвиль океану, що належить генератору енергії мікрохвиль. Використовуючи верхні та нижні групи лопатей поглинача, енергія хвилі низької швидкості та великого крутного моменту може бути перетворена на електричну енергію, яку можна використовувати для навантаження та зарядки літійового акумулятора.

Хвильові процеси в рідинах також перетинаються з дослідженнями модуляційної стійкості та явища резонансу.

Одним із прикладів є дослідження А. А. Абрашкіна та Ю. Н. Пеліновського, в якому отримано нелінійне рівняння Шредінгера, яке описує

слабконелінійні хвильові пакети в неоднорідно вихровій нескінченно глибокій рідині [1]. Показано, що критерії модуляційної нестійкості для слабковихрових хвиль і потенційних стоксових хвиль на глибокій воді збігаються. Ефект завихренності проявляється в зміщенні хвильового числа високочастотного заповнення.

Дослідженню модуляційної стійкості присвячені роботи Роджера Грімшоу у співавторстві з Хіу Нін Чаном та Квок Вінг Чоу. У дослідженні [19] автори розглядають резонансну взаємодію, в результаті якої можуть виникати хвилі-убивці, що моделюються як спеціальні бризери для внутрішніх хвиль у рідині, стратифікованій за густиною. Досліджуються полярність, амплітуда й стійкість цих хвиль-убивць. Продемонстровано, що ці властивості критично залежать від стратифікації питомої густини й вибору мод. Розглядаються три приклади: двошарова рідина, стратифікована рідина з постійною частотою плавучості й випадок змінної частоти плавучості. Показано, що можливі як підйомні, так і депресивні хвилі-убивці, і максимальні зміщення не обов'язково обмежуються фіксованим відношенням фонові плоскої хвилі. Також немає обмежень на ознаки нелінійності й дисперсії та на вимоги до глибини рідини. Коли зміна густини шаруватої або стратифікованої рідини менша, амплітуда даних хвиль-убивць зазвичай збільшується. При постійній частоті плавучості критичні хвильові числа викликають нелінійну динаміку еволюції для «довгохвильового короткохвильового резонансу», а також розділяють режими фокусування й дефокусування для вузькосмугових хвильових пакетів нелінійного рівняння Шредінгера.

Інша їх робота присвячена дослідженню модуляційної нестійкості внутрішніх хвиль у плавно стратифікованій неглибокій рідині з постійною частотою плавучості [22]. Несподівано великі зміщення в надрах океанів вивчаються через динаміку пакетів внутрішніх хвиль, де еволюція цих зміщень регулюється нелінійним рівнянням Шредінгера. Встановлено, що у випадках з постійною частотою плавучості можна проводити аналітичну

обробку. Хоча модуляційна нестійкість у пакетах поверхневих хвиль виникає лише для досить глибокої води, на мілководді та в режимах середньої глибини можуть виникати внутрішні хвилі-убивці. Спонтанне породження хвиль-убивць перевіряється за допомогою чисельного моделювання.

Ще в одній їх спільній роботі в моделях мілкої води досліджувався зв'язок між існуванням хвиль-убивць і модуляційною нестійкістю [30]. Також цей зв'язок розглядався для набору довгохвильових моделей, таких, як рівняння Кортевега-де Фріза, розширене рівняння Кортевега-де Фріза (Гарднера), яке використовується для опису поверхневих і внутрішніх хвиль на мілководді, рівняння Буссінеска а також пов'язаний набір рівнянь Кортевега-де Фріза.

Результати дослідження стійкості та нестійкості періодичних біжучих хвиль для рівнянь типу Кортевега-де Фріза з дробовою дисперсією й пов'язаних із ними нелінійних дисперсійних рівнянь, проведеного В. М. Хур та М. А. Джонсоном, показали, що локальний обмежений мінімізатор для відповідної варіаційної задачі нелінійно стійкий до збурень, які зберігають період, коли пов'язаний із ним лінеаризований оператор має блокову структуру Жордана [33].

У теоретичному дослідженні К. Харіфа та інших розглянуто модуляційну нестійкість двовимірних нелінійних розв'язків рівняння Візема у вигляді біжучої хвилі за наявності постійної завихреності [37]. Показано, що завихреність істотно впливає на діапазон нестійких хвильових чисел і швидкість росту збурень. Хвилі з kh , що перевищують критичне значення, є модуляційно нестійкими. Виявлено, що хвилі з достатньо великою амплітудою завжди нестабільні незалежно від довжини хвилі, сили завихреності й глибини рідини.

У дослідженні А. Найфе метод багатомасштабних розвинень використовується для виведення двох рівнянь у частинних похідних, які описують еволюцію двовимірних хвильових пакетів на межі двох напівнескінченних нестисливих нев'язких рідин довільної густини з

урахуванням впливу поверхневого натягу [51]. Перше рівняння використовується, щоб показати, що стійкість однорідних хвильових ланцюгів залежить від довжини хвилі, поверхневого натягу й відношення густин. Результати показують, що гравітаційні хвилі нестійкі для всіх співвідношень густин, крім одиниці, в той час як капілярні хвилі стійкі, якщо співвідношення густини не нижче приблизно 0,1716. Більш того, наявність поверхневого натягу призводить до стабілізації деяких хвиль, які в іншому випадку нестійкі. Хоча перше рівняння справедливе для широкого діапазону хвильових чисел, воно не дійсне поблизу граничного хвильового числа, що відокремлює стійкий рух від нестійкого. Показано, що друге рівняння Шредінгера справедливе поблизу граничного хвильового числа, і, таким чином, його можна використовувати для визначення залежності граничного хвильового числа від амплітуди, тим самим уникаючи звичайного процесу визначення нового розкладу, справедливого тільки поблизу граничних умов.

А. Пуркайт та С. Дебсарма виконали вивід двох еволюційних рівнянь двох похило взаємодіючих хвильових пакетів у двошаровій рідинній області, у якій нижня рідина має нескінченну глибину [59]. Отримані рівняння використовуються для аналізу модуляційної стійкості двох похило взаємодіючих однорідних хвильових пакетів. Результати аналізу представлено графічно. Спостерігається, що збільшення товщини верхньої легшої рідини призводить до збільшення швидкості росту нестійкості. Зі збільшенням кута взаємодії між двома хвилями швидкість зростання нестійкості зменшується за умови, що цей кут є гострим. Якщо кут взаємодії тупий, то результат змінюється на протилежний. Також встановлено, що швидкість зростання нестійкості одного хвильового пакета зростає зі збільшенням амплітуди іншого хвильового пакета.

Також автори досліджували модуляційну нестійкість двох похило взаємодіючих хвиль при наявності тонкого пікноклину [60]. Для пари похило взаємодіючих хвильових пакетів виведено нелінійні еволюційні рівняння з точністю до четвертого порядку по крутизні хвилі. Ці еволюційні рівняння

використовуються для аналізу стійкості пари похило взаємодіючих однорідних хвильових цугів. Представлені графіки показують, що зі збільшенням глибини пікноклину та різниці густини по пікноклину швидкість росту нестійкості зменшується. У випадку коли кут взаємодії між двома хвильовими пакетами менший за певне критичне значення, збільшення кута призводить до зменшення швидкості зростання нестійкості, за межами цього критичного значення результат протилежний.

У гравітаційному полі в стратифікованій рідині з невеликою різницею густини T . Таліповою та іншими дослідниками була розвинена теорія довгих нелінійних коливальних хвильових пакетів (бризерів), заснована на рівнянні Гарднера і його модифікаціях, що повністю інтегруються з сучасними методами теорії нелінійних хвиль [65]. Також автори наводять приклади генерації бризерів і обговорюють умови їх стійкості.

У статті [71] викладено результати дослідження системи АВ, що описує гранично нестабільні пакети барокліїних хвиль в геофізичних рідинах. За допомогою n -кратного модифікованого перетворення Дарбу отримано напівраціональні розв'язки в термінах визначників системи АВ. Виявлено зв'язок між модуляційною нестійкістю в основній смузі та умовою існування деяких хвиль-убивць.

Варто також вказати на вагомий внесок вітчизняних науковців при дослідженні хвильових процесів у відповідних гідродинамічних системах.

Селезов І. Т. та Кривонос Ю. Г. [84] досліджували берег моря, що постійно зазнає руйнівного впливу хвиль, підтримуючи його початковий стан. У роботі моделюється підтримання рівноважного стану екологічної системи у деякому оптимальному режимі. Досліджувана модель враховує суттєво нелінійні ефекти та керування шляхом підживлення пляжу, що можна інтерпретувати як зворотний зв'язок. Аналіз виконано методом теорії стійкості. Отримано характеристики граничного циклу та проаналізовано його стійкість.

У дослідженні [78] Л. В. Черкесов та інші досліджували формування полів течій та вітрових хвиль у Каркінітській затоці Чорного моря за допомогою методу математичного моделювання. Вченими використовувалися спектральна модель вітрового хвилювання SWAN та модифікований варіант моделі морської динаміки POM. Встановлено, що при різних напрямках вітру швидкість та висота хвиль змінюються більше ніж у 1,5 рази і є мінімальними при північно-західному вітрі й максимальними — при південно-східному.

Пацегоном Н. Ф. та Поцелуєвим С. І. [83] досліджувалась стійкість вільної поверхні в'язкої рідини, що намагнічується, при багатопараметричному збудженні. Також досліджувалась структура областей нестійкості для вільної поверхні феррорідини, яка параметрично збуджується полігармонічною дією.

Лимарченко О. С. разом із Семенович К. О. розглядали задачу про рух системи циліндричний резервуар-рідина з вільною поверхнею при маятниковому підвісі резервуара. [79] Авторами досліджений перерозподіл кінетичної енергії в системі та пояснено згасання поверхневого хвильового руху. Отримані результати якісно співпадають із експериментальними даними.

Інша робота О. С. Лимарченко у співавторстві із О. В. Константиновим [38] присвячена динамічним методам демпфування коливань у системі структура–вільна поверхня. Установлено, що маятниковий підвіс суттєво зменшує механічну взаємодію рідини та конструкції та амплітуди хвиль на вільній поверхні, особливо для високочастотних збурень. Авторами наведені численні приклади, що ілюструють переваги запропонованих методів.

Зокрема, статті [12, 77, 8] присвячено проблемі поширення та взаємодії хвиль уздовж поверхонь контакту в тришаровій гідродинамічній системі «рідкий півпростір – шар – шар із твердою кришкою». Отримано відповідні результати: на відповідних поверхнях контакту при різних значеннях геометричних та фізичних параметрів проаналізовано залежність відношення

амплітуд та досліджено структуру хвильових рухів; для третього наближення отримано умову розв'язуваності, виведено еволюційне рівняння у формі нелінійного рівняння Шредінгера та умову модуляційної стійкості його розв'язків. Отримано та проаналізовано діаграму стійкості для розв'язку, який існує при балансі між дисперсією та нелінійністю; для кожного шару отримано співвідношення для енергії хвильового руху та повної енергії системи. Проаналізовано залежність енергії хвильового руху для різних геометричних та фізичних параметрів системи.

У роботах [9, 11, 62] досліджено стійкість поширення хвильових пакетів у гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар із вільною поверхнею». Побудовано діаграми модуляційної стійкості для різних значень товщини нижнього шару. Для різних співвідношень густин і різної товщини двох шарів рідини отримано графіки меж областей модуляційної стійкості для капілярних і гравітаційних хвиль. Установлено, що зменшення товщини нижнього шару призводить до збільшення області модуляційної нелінійної нестійкості хвильового пакета. Також проаналізовано залежності енергії внутрішніх і поверхневих хвиль від геометричних і фізичних параметрів, оцінено внесок другого наближення в повну енергію системи. Результати графічно проілюстровано. Показано існування внутрішньої і поверхневої складових хвильового поля та проаналізовано їх взаємодію.

У дослідженні О. Авраменко та В. Нарядового здійснено аналіз поширення слабонелінійних хвильових пакетів у двошаровій рідині кінцевої глибини з вільною поверхнею [10]. Еволюційні рівняння хвильових пакетів на вільній поверхні та межі розділу отримано у вигляді нелінійних диференціальних рівнянь Шредінгера другого порядку. З урахуванням поверхневого натягу в залежності від співвідношення густини шарів і хвильового числа проаналізовано форму поверхневих та внутрішніх хвиль. Також при моделюванні хвильових рухів у двошаровій системі виявлено ефекти врахування другого наближення, що призводять до затуплення або

загострення гребенів і западин хвиль. Аналітичні результати підтверджуються натурними спостереженнями.

Стійкість хвильових пакетів, що розповсюджуються вздовж поверхні розділу двох рідких шарів із різними густинами з врахуванням сил поверхневого натягу досліджувалася І. Т. Селезовим спільно з О. Авраменко та О. В. Гуртовим [85]. Отримано діаграми нелінійної стійкості в залежності від товщини нижнього шару. Виявлено значний перерозподіл областей нелінійної стійкості при зміні співвідношень товщин рідких шарів.

У статті [86] виконується дослідження поширення хвильових пакетів на поверхні контакту двох рідких шарів із різними властивостями з урахуванням поверхневого натягу. Методом багатомасштабних розвинень отримано еволюційне рівняння в третьому наближенні. Аналізується структура хвильового пакета і проведено порівняння з аналогічними хвильовими пакетами в системах «півпростір – півпростір» і «шар – півпростір». Досліджується форма хвильового пакета, а також умови резонансу другої гармоніки. Представлено умови поширення хвильових пакетів і встановлені характерні особливості резонансної області для системи «шар – шар».

1.2. Метод багатомасштабних розвинень

Застосування методу багатомасштабних розвинень проілюструємо на прикладі раніше досліджуваної задачі про поширення хвильових пакетів у двошаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар із вільною поверхнею» [9, 11, 62].

Шари $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$ та $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ з густинами ρ_1 та ρ_2 відповідно розділені поверхнею контакту $z = \eta(x, t)$, нижній шар Ω_1 обмежений твердим дном, верхній шар Ω_2 обмежений вільною поверхнею $z = \eta_0(x, t)$.

Математична постановка проблеми виглядає наступним чином:

$$\varphi_{j,xx} + \varphi_{j,zz} = 0 \quad \text{у } \Omega_j, j=1,2,$$

$$\eta_{,t} - \varphi_{j,z} = -\eta_{,x} \varphi_{j,x}, \quad z = \eta(x,t), \quad j = 1, 2$$

$$\eta_{0,t} - \varphi_{2,z} = -\eta_{0,x} \varphi_{2,x}, \quad z = \eta_0(x,t)$$

$$\rho_1 \varphi_{1,t} - \rho_2 \varphi_{2,t} + g(\rho_1 - \rho_2) \eta + 0.5 \rho_1 (\nabla \varphi_1)^2 - 0.5 \rho_2 (\nabla \varphi_2)^2 - T \left(1 + (\eta_{,x})^2 \right)^{-3/2} \eta_{,xx} = 0,$$

$$z = \eta(x,t)$$

$$\rho_1 \varphi_{2,t} + g \rho_1 \eta_0 + 0.5 \rho_1 (\nabla \varphi_2)^2 - T_0 \left(1 + (\eta_{0,x})^2 \right)^{-3/2} \eta_{0,xx} = 0, \quad z = \eta_0(x,t),$$

$$\varphi_{1,z} = 0, \quad z = -h_1, \tag{1.1}$$

Тут $\varphi_{j,z} = \partial \varphi_j / \partial z$ – позначення похідних, T, T_0 – коефіцієнти поверхневих натягів на поверхні контакту та на вільній поверхні, φ_j ($j = 1, 2$) – потенціали швидкостей.

Перед застосуванням методу багатомасштабних розвинень невідомі функції записуються так:

$$\eta(x,t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3),$$

$$\eta_0(x,t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{0n}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3),$$

$$\varphi_j(x,z,t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2, \tag{1.2}$$

де $x_j = \alpha^j x$, $t_j = \alpha^j t$ ($j = 1, 2, 3$), α – малий безрозмірний параметр.

Формули (1.2) підставляємо в постановку задачі (1.1). Перші три лінійні задачі отримуються шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях α .

Перша лінійна задача α :

$$\varphi_{j1,x_0x_0} + \varphi_{j1,zz} = 0, \quad \Omega_j$$

$$\eta_{1,t_0} - \varphi_{j1,z} = 0, \quad z = 0$$

$$\eta_{01,t_0} - \varphi_{21,z} = 0, \quad z = h_2$$

$$\varphi_{11,t_0} - \rho \varphi_{21,t_0} + (1 - \rho) \eta_1 - T \eta_{1,x_0x_0} = 0, \quad z = 0$$

$$\begin{aligned}\varphi_{21,t_0} + \eta_{01} - T_0 \eta_{01,x_0x_0} &= 0, \quad z = h_2 \\ \varphi_{11,z} &= 0, \quad z = -h_1\end{aligned}\tag{1.3}$$

Друга лінійна задача (при α):

$$\begin{aligned}\varphi_{j2,x_0x_0} + \varphi_{j2,zz} &= -2\varphi_{j1,x_0x_1}, \quad \Omega_j \\ \eta_{2,t_0} - \varphi_{j2,z} &= -\eta_{1,t_1} - \eta_{1,x_0} \varphi_{j1,x_0} + \eta_1 \varphi_{j1,zz}, \quad z = 0 \\ \eta_{02,t_0} - \varphi_{22,z} &= -\eta_{01,t_1} - \eta_{01,x_0} \varphi_{21,x_0} + \eta_{01} \varphi_{21,zz}, \quad z = h_2 \\ \varphi_{12,t_0} - \rho \varphi_{22,t_0} + (1-\rho)\eta_2 - T\eta_{2,x_0x_0} &= -\varphi_{11,t_1} - \eta_1 \varphi_{11,t_0z} + \rho(\varphi_{21,t_1} + \eta_1 \varphi_{21,t_0z}) - \\ -0.5(\varphi_{11,x_0}^2 + \varphi_{11,z}^2) + 0.5\rho(\varphi_{21,x_0}^2 + \varphi_{21,z}^2) + 2T\eta_{1,x_0x_1}, \quad z = 0 \\ \varphi_{22,t_0} + \eta_{02} - T_0 \eta_{02,x_0x_0} &= -\varphi_{21,t_1} - \eta_{01} \varphi_{21,t_0z} - 0.5(\varphi_{21,x_0}^2 + \varphi_{21,z}^2) + 2T_0 \eta_{01,x_0x_1}, \quad z = h_2 \\ \varphi_{12,z} &= 0, \quad z = -h_1\end{aligned}\tag{1.4}$$

Третя лінійна задача (при α^2):

$$\begin{aligned}\varphi_{j3,x_0x_0} + \varphi_{j3,zz} &= -\varphi_{j3,x_1x_1} - 2\varphi_{j3,x_0x_1} - 2\varphi_{j3,x_0x_2} = 0 \text{ в } \Omega_j \\ \eta_{3,t_0} - \varphi_{j3,z} &= -\eta_{2,t_1} - \eta_{1,t_2} + \eta_1 \varphi_{j2,zz} + \eta_2 \varphi_{j1,zz} + 0.5\eta_1^2 \varphi_{j1,zzz} - \\ -\eta_{1,x_1} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{2,x_0} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{1,x_0} \varphi_{j1,x_1} - \eta_{1,x_0} \varphi_{j2,x_0} - \eta_1 \eta_{1,x_0} \varphi_{j1,x_0z} \\ \eta_{03,t_0} - \varphi_{23,z} &= -\eta_{02,t_1} - \eta_{01,t_2} + \eta_{01} \varphi_{22,zz} + \eta_{02} \varphi_{21,zz} + 0.5\eta_{01}^2 \varphi_{21,zzz} - \\ -\eta_{01,x_1} \varphi_{21,x_0} - \eta_{02,x_0} \varphi_{21,x_0} - \eta_{01,x_0} \varphi_{21,x_1} - \eta_{01,x_0} \varphi_{22,x_0} - \eta_{01} \eta_{01,x_0} \varphi_{21,x_0z} \\ \varphi_{13,t_0} - \rho \varphi_{23,t_0} + (1-\rho)\eta_3 - T\eta_{3,x_0x_0} &= -\varphi_{11,t_2} - \varphi_{12,t_1} - \eta_2 \varphi_{11,t_0z} - \eta_1 \varphi_{11,t_1z} - \\ -0.5\eta_1^2 \varphi_{11,t_0zz} + \rho(\varphi_{21,t_2} + \varphi_{22,t_1} + \eta_2 \varphi_{21,t_0z} + \eta_1 \varphi_{21,t_1z} + 0.5\eta_1^2 \varphi_{21,t_0zz}) - \\ -\eta_1 \varphi_{12,t_0z} - \varphi_{11,x_0} \varphi_{11,x_1} - \varphi_{11,x_0} \varphi_{12,x_1} - \eta_1 \varphi_{11,x_0} \varphi_{11,x_0z} - \varphi_{11,z} \varphi_{11,z} - \eta_1 \varphi_{11,z} \varphi_{11,zz} + \text{на } z = 0 \\ +\rho(\eta_1 \varphi_{22,t_0z} + \varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_1} + \varphi_{21,x_0} \varphi_{22,x_1} + \eta_1 \varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_0z} + \varphi_{21,z} \varphi_{21,z}) + \\ +\rho \eta_1 \varphi_{21,z} \varphi_{21,zz} + T\eta_{1,x_1x_1} + 2T\eta_{2,x_0x_1} + 2T\eta_{2,x_0x_2} - 1.5T(\eta_{1,x_0})^2 \eta_{1,x_0x_0} \\ \varphi_{23,t_0} + \eta_{03} - T_0 \eta_{03,x_0x_0} &= -\varphi_{21,t_2} - \varphi_{22,t_1} - \eta_{02} \varphi_{21,t_0z} - \eta_{01} \varphi_{21,t_1z} - \\ -0.5\eta_{01}^2 \varphi_{21,t_0z} - \eta_{01} \varphi_{22,t_0z} - \varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_1} - \varphi_{21,x_0} \varphi_{22,x_1} - \eta_{01} \varphi_{21,x_0z} \varphi_{21,x_0} - \\ -\varphi_{21,z} \varphi_{22,z} - \eta_{01} \varphi_{21,z} \varphi_{21,zz} + T_0 \eta_{01,x_1x_1} + 2T_0 \eta_{02,x_0x_1} + 2T_0 \eta_{01,x_0x_2} + \\ + 1.5T_0(\eta_{01,x_0})^2 \eta_{01,x_0x_0} \\ \varphi_{13,z} &= 0 \text{ на}\end{aligned}\tag{1.5}$$

Розв'язок першої лінійної задачі (1.3) та дисперсійне рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta} \\ \varphi_{11} &= -\frac{i\omega}{k}(Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta})\frac{\text{ch}(k(h_1 + z))}{\text{sh}(kh_1)} \\ \varphi_{21} &= \frac{i\omega}{k}\left(\frac{\omega^2 \text{sh}(k(h_2 - z)) - (k + T_0k^3)\text{ch}(k(h_2 - z))}{\omega^2 \text{ch}(kh_2) - (k + T_0k^3)\text{sh}(kh_2)}\right)(Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \\ \eta_{01} &= \frac{\omega^2}{\omega^2 \text{ch}(kh_2) - (k + T_0k^3)\text{sh}(kh_2)}(Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \omega^4(\rho + \text{cth}(kh_1)\text{cth}(kh_2)) - \omega^2[\text{cth}(kh_1)(k + T_0k^3) + \rho\text{cth}(kh_2)(k + T_0k^3) + \\ + \text{cth}(kh_2)(k - \rho k + Tk^3)] + (k + T_0k^3)(k - \rho k + Tk^3) = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Аналогічно одержано розв'язок другого наближення.

1.3. Модуляційна стійкість та дослідження потоку енергії

Умови існування нетривіальних розв'язків другої та третьої лінійної задачі, що досліджувалися в роботах [9, 11, 62] відповідно мають вигляд:

$$A_{,t_1} + \omega' A_{,x_1} = 0 \quad (1.8)$$

$$A_{,t_2} + \omega' A_{,x_2} - 0.5\omega'' A_{,x_1x_1} = iIA^2\bar{A} \quad (1.9)$$

Еволюційне рівняння обвідної на поверхні контакту записується так:

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - 0.5\omega'' A_{,xx} = i\alpha^2 IA^2\bar{A}. \quad (1.10)$$

Тут $A(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – обвідна хвильового пакету, $\bar{A}(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – комплексно спряжена до $A(x_1, x_2, t_1, t_2)$, k – хвильове число, ω – частота центру хвильового пакету, $\omega' = d\omega/dk$ – групова швидкість, $\omega'' = d^2\omega/dk^2$.

Умова модуляційної стійкості отримується шляхом переходу до системи, яка рухається з груповою швидкістю аналогічно до [85]. Після заміни $t = \zeta$ і $\xi = x - \omega't$ рівняння (1.10) набуває вигляду:

$$A_{,\zeta} - 0.5i\omega'' A_{,\xi\xi} = i\alpha^2 IA^2\bar{A}, \quad (1.11)$$

Розв'язок даного еволюційного рівняння має вигляд $A = ae^{i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} I \zeta}$ і залежить від часу. Надавши йому збурення $A = (a + \alpha_0) \exp(i\alpha^2 a^2 I + i\beta_0) \zeta$ та підставивши в рівняння (1.11), отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \alpha_{0,\zeta} + 0.5\omega'' a \beta_{0,\xi\xi} &= 0 \\ \alpha \beta_{0,\zeta} - 0.5\omega'' \alpha_{0,\xi\xi} &= 2\alpha_0 \alpha^2 I a^2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Розв'язавши дану систему, отримуємо дисперсійне рівняння, яке набуває вигляду:

$$\omega_1^2 = 0.25\omega''^2 k_1^2 (k_1^2 - 4\alpha^2 I a^2)$$

Таким чином, отримуємо умову модуляційної стійкості:

$$I\omega'' < 0 \quad (1.13)$$

Для дослідження отриманої умови модуляційної стійкості (1.13) в системі (ρ, k) отримано ряд діаграм із метою виявлення впливу різних фізичних параметрів на межі стійкості. На рис.1.1. представлено графіки меж стійкості та нестійкості (позначені «МС» та «МН» відповідно) для товщин нижнього шару $h_1 = \{1; 1,73\}$.

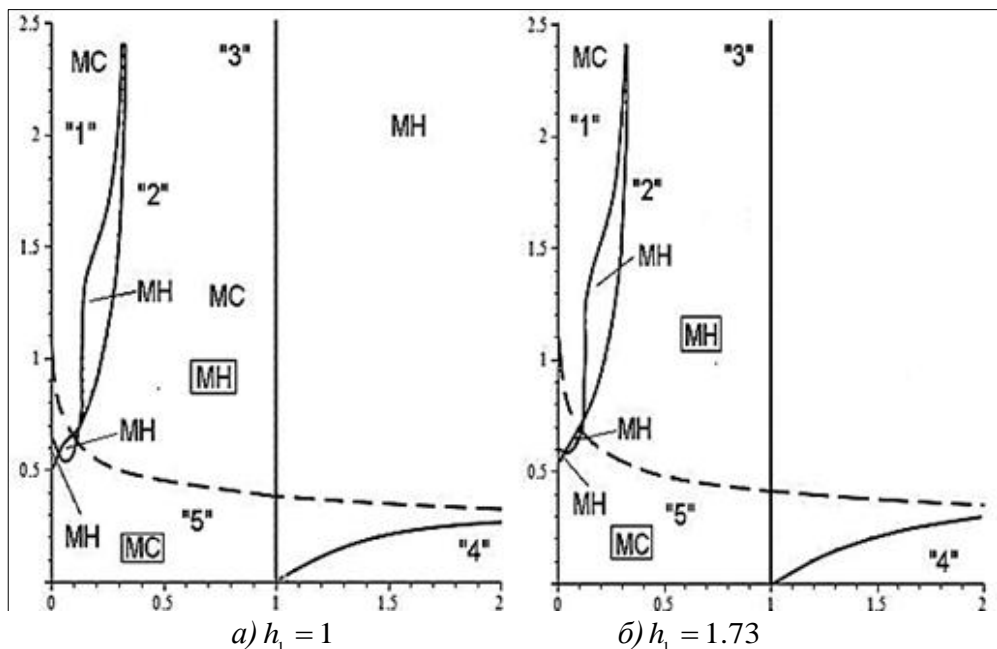


Рис. 1.1. Діаграми меж модуляційної стійкості при $h_2 = 1$

Для розрахунку потоку енергії хвильового руху були використані наступні формули:

$$E_{vn} = -\frac{\rho}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h_1}^0 \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (1.14)$$

$$E_{pov} = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (1.15)$$

де $\varphi_{11}^{(1)}$, $\varphi_{11}^{(2)}$, $\varphi_{21}^{(1)}$, $\varphi_{21}^{(2)}$ - розв'язки для кожної пари частот ω_1 та ω_2 відповідно, E_{vn} - потік енергії внутрішньої хвилі, E_{pov} - потік енергії поверхневої хвилі.

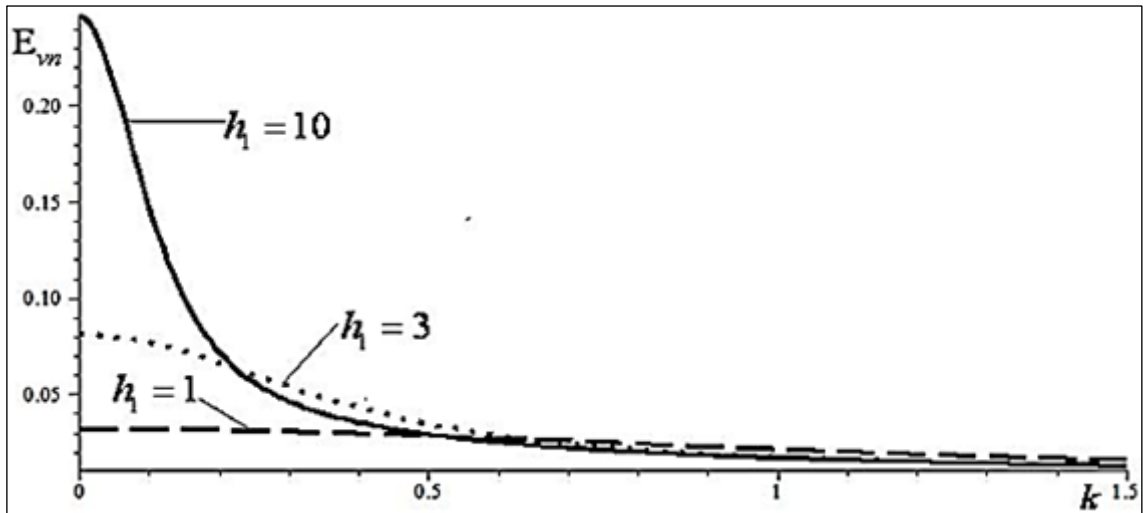


Рис. 1.2. Залежність потоку енергії внутрішньої хвилі E_{vn} від k

На рис. 1.2. наведено графік потоку енергії внутрішньої хвилі від хвильового числа. Дослідження залежності потоку енергії для довгих та коротких внутрішніх та поверхневих хвиль від різних фізичних параметрів для даної двошарової системи наведено в [11].

1.4. Теоретичні результати розділу 1

Огляд досліджень останніх років показав, що проблема поширення хвиль у рідких системах із різним рівнем стратифікації зберігає свою актуальність. Серед численних експериментальних та теоретичних досліджень по вивченню поведінки хвиль та їх властивостей у рідинах, досить мала частина присвячена вивченню внутрішніх хвиль, довжина яких значно менша від товщини рідкого шару. Дослідження, присвячені нелінійним проблемам хвильового руху, також мають вибіркового характеру.

На сьогоднішній час вченими розглянуто велику кількість математичних моделей, проте вони не охоплюють усі варіанти стратифікації води, що зустрічаються в природі Світового океану.

Удосконалення математичного апарату, асимптотичних методів, технологій та функцій програмного забезпечення дало змогу досліджувати нелінійні задачі, враховуючи розв'язки першого наближення та розв'язки наближень вищих порядків.

Таким чином, виникає необхідність дослідження поширення хвильових пакетів у слабконелінійній тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» з урахуванням поверхневого натягу на поверхнях контакту, якісного й кількісного аналізу основних фізичних характеристик даної математичної моделі та впливу різних фізичних параметрів.

Використання методу багатомасштабних розвинень, вивід умови модуляційної стійкості та формул для розрахунку потоку енергії внутрішньої та поверхневої хвиль продемонстровано на прикладі аналогічної двошарової гідродинамічної системи «шар із твердим дном – шар із вільною поверхнею».

РОЗДІЛ 2.

АНАЛІТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ПРО ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ «ШАР ІЗ ТВЕРДИМ ДНОМ – ШАР – ШАР ІЗ КРИШКОЮ»

В даному розділі виконується постановка задачі про поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою». Отримано перші три наближення задачі з використанням методу багатомасштабних розвинень. Знайдено розв'язки перших двох наближень та умови існування нетривіальних розв'язків для задач другого та третього наближення. Отримано еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту. Для обох поверхонь контакту введена умова модуляційної стійкості. Результати розділу опубліковано в статтях [50, 81, 82, 87].

2.1. Постановка та розв'язання задачі поширення хвильових пакетів у тришаровій системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою»

Досліджується задача поширення двовимірних хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні рідкого шару $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z \leq 0\}$ з густиною ρ_1 , рідкого шару над ним $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ з густиною ρ_2 та верхнього рідкого шару $\Omega_3 = \{(x, z) : |x| < \infty, h_2 \leq z \leq h_2 + h_3\}$ з густиною ρ_3 .

Шари Ω_1 і Ω_2 розділені поверхнею контакту $z = \eta_1(x, t)$, шари Ω_2 і Ω_3 розділені поверхнею контакту $z = \eta_2(x, t)$. Верхній шар обмежений згори кришкою, нижній шар обмежений твердим дном.

При розв'язанні враховуються сили поверхневих натягів на поверхнях контакту, рідини вважаються нестисливими. Сила тяжіння направлена у від'ємному z-напрямку перпендикулярно до поверхонь розподілу (рис. 2.1.).

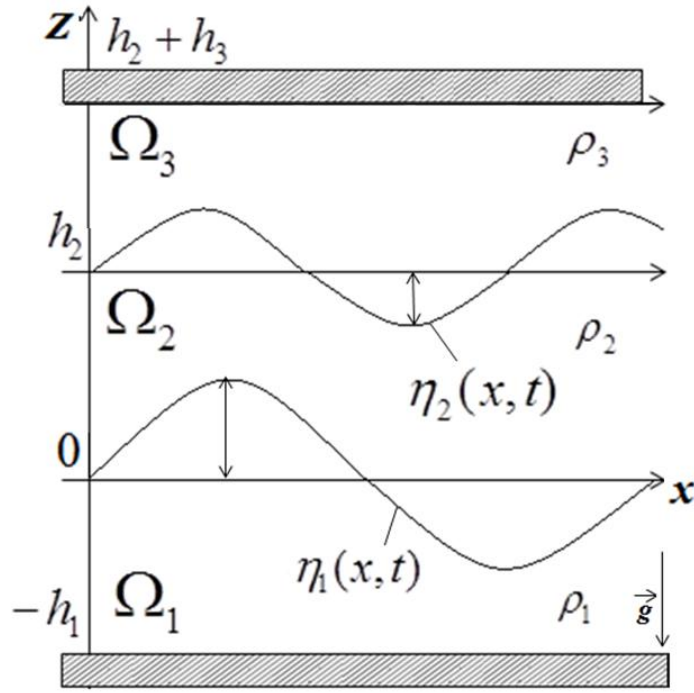


Рис 2.1. Постановка задачі

Математична постановка задачі виглядає наступним чином:

швидкість поширення пакетів у відповідних областях виражені через градієнти потенціалів і задовольняють рівнянням:

$$\varphi_{j,xx} + \varphi_{j,zz} = 0 \text{ у } \Omega_j, \text{ де } j=1,2,3 \quad (2.1)$$

кінематичні умови на поверхнях контакту:

$$\eta_{1,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x}\eta_{1,x} \text{ при } z = \eta_1(x,t), \quad j=1,2 \quad (2.2)$$

$$\eta_{2,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x}\eta_{2,x} \text{ при } z = h_2 + \eta_2(x,t), \quad j=2,3 \quad (2.3)$$

динамічні умови на поверхнях контакту описуються рівняннями:

$$\rho_1\varphi_{1,t} - \rho_2\varphi_{2,t} + g(\rho_1 - \rho_2)\eta_1 + \frac{1}{2}\rho_1(\nabla\varphi_1)^2 - \frac{1}{2}\rho_2(\nabla\varphi_2)^2 - T_1\left(1 + (\eta_{1,x})^2\right)^{\frac{3}{2}}\eta_{1,xx} = 0$$

при $z = \eta_1(x,t)$ (2.4)

$$\rho_2\varphi_{2,t} - \rho_3\varphi_{3,t} + g(\rho_2 - \rho_3)\eta_2 + \frac{1}{2}\rho_2(\nabla\varphi_2)^2 - \frac{1}{2}\rho_3(\nabla\varphi_3)^2 - T_2\left(1 + (\eta_{2,x})^2\right)^{\frac{3}{2}}\eta_{2,xx} = 0$$

при $z = h_2 + \eta_2(x,t)$ (2.5)

умова непроникливості на дні:

$$\varphi_{1,z} = 0 \text{ при } z = -h_1, \quad (2.6)$$

умова непроникливості на поверхні з кришкою:

$$\varphi_{3,z} = 0 \text{ при } z = h_2 + h_3, \quad (2.7)$$

тут φ_j ($j=1,2,3$) потенціали швидкості частинок в Ω_j , η_1, η_2 – відхилення поверхонь контакту, T_1, T_2 – коефіцієнти поверхневого натягу на відповідних поверхнях контакту, g – прискорення вільного падіння.

Введемо безрозмірні величини за допомогою характерної довжини L та товщини H , максимального відхилення поверхні контакту a , характерного часу $L/(gH)^{1/2}$, густини нижнього шару ρ_1 . Зробимо перехід до безрозмірних величин, які позначимо зірочкою:

$$x = Lx^*, z = Hz^*, \eta_j = a\eta_j^*, j=1,2, t = \frac{L}{\sqrt{gH}}t^* \\ \varphi_j = \frac{gL a}{\sqrt{gH}}\varphi_j^* (j=1,2,3), T_j = L^2\rho_1 g T_j^* (j=1,2), \rho_j = \rho_1\rho_j^* (j=1,2,3) \quad (2.8)$$

$$\text{Позначивши величини } \alpha = \frac{a}{H}, \beta = \frac{H^2}{L^2}, \text{ отримуємо систему (2.1) – (2.7)}$$

в безрозмірному вигляді:

$$\varphi_{j,x^*x^*}^* + \frac{1}{\beta}\varphi_{j,z^*z^*}^* = 0 \text{ у } \Omega_j, j=1,2,3 \quad (2.9)$$

кінематичні умови на поверхнях контакту

$$\eta_{1,t^*}^* - \frac{1}{\beta}\varphi_{j,z^*}^* = -\alpha\varphi_{j,x^*}^*\eta_{1,x^*}^* \text{ при } z^* = \alpha\eta_1^*(x,t), j=1,2 \quad (2.10)$$

$$\eta_{2,t^*}^* - \frac{1}{\beta}\varphi_{j,z^*}^* = -\alpha\varphi_{j,x^*}^*\eta_{2,x^*}^* \text{ при } z^* = \frac{h_2}{H} + \alpha\eta_2^*(x,t), j=2,3 \quad (2.11)$$

динамічні умови на поверхнях контакту

$$\varphi_{1,t^*}^* - \rho_2^*\varphi_{2,t^*}^* + (1-\rho_2^*)\eta_1^* + \frac{1}{2}\alpha\left(\left(\varphi_{1,x^*}^*\right)^2 + \frac{1}{\beta}\left(\varphi_{1,z^*}^*\right)^2\right) - \\ - \frac{1}{2}\alpha\rho_2^*\left(\left(\varphi_{2,x^*}^*\right)^2 + \frac{1}{\beta}\left(\varphi_{2,z^*}^*\right)^2\right) - T_1^*\left(1 + \alpha^2\beta\left(\eta_{1,x^*}^*\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\eta_{1,x^*}^* = 0 \\ \text{при } z^* = \alpha\eta_1^*(x,t) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2^* \varphi_{2,t}^* - \rho_3^* \varphi_{3,t}^* + (\rho_2^* - \rho_3^*) \eta_2^* + \frac{1}{2} \alpha \rho_2^* \left((\varphi_{2,x}^*)^2 + \frac{1}{\beta} (\varphi_{2,z}^*)^2 \right) - \\ & - \frac{1}{2} \alpha \rho_3^* \left((\varphi_{3,x}^*)^2 + \frac{1}{\beta} (\varphi_{3,z}^*)^2 \right) - T_2^* \left(1 + \alpha^2 \beta (\eta_{2,x}^*)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \eta_{2,x}^* = 0 \\ & \text{при } z^* = \frac{h_2}{H} + \alpha \eta_2^*(x,t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

гранична умова на дні:

$$\varphi_{1,z}^* = 0 \text{ при } z^* = -\frac{h_1}{H} \quad (2.14)$$

гранична умова на кришці:

$$\varphi_{3,z}^* = 0 \text{ при } z^* = \frac{h_2 + h_3}{H}, \quad (2.15)$$

де α, β – коефіцієнти нелінійності, $\rho_i = \rho_{i1}^*$ ($i=1,2,3$) – відношення густин рідких шарів.

Будемо вважати, що коефіцієнт α значно менший за одиницю, тому дана модель описує слабконелінійну тришарову систему з дисперсією. В подальшому вважатимемо, що $L=H$, тобто будемо розглядати хвилі, довжина яких співрозмірна характерній товщині $H=h_2^*$. В цьому випадку коефіцієнт не лінійності $\beta=1$. В обезрозміреній постановці та подальшому аналізі $h_2^*=1$ та $\rho_1^*=1$. Щоб полегшити записи, далі зірочку опускатимемо.

Для розв'язування задачі використаємо метод багатомасштабних розвинень до третього порядку. Шукані функції відхилення першої та другої поверхонь контакту та потенціали швидкостей представимо у вигляді:

$$\eta_j(x,t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{jn}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j=1,2 \quad (2.16)$$

$$\varphi_j(x,t,z) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j=1,2,3 \quad (2.17)$$

де $x_j = \alpha^j x$ та $t_j = \alpha^j t$ ($j=0,1,2$).

Підставивши (2.16) – (2.17) у (2.9) – (2.15) та прирівнявши вирази при однакових степенях α , отримаємо три лінійні задачі.

Задача першого наближення (при α^0):

$$\begin{aligned}
\varphi_{j1,x_0x_0} + \varphi_{j1,zz} &= 0 \text{ у } \Omega_j, \quad j=1,2,3 \\
\eta_{11,t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ на } z=0, \quad j=1,2 \\
\eta_{21,t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ на } z=h_2, \quad j=2,3 \\
\varphi_{11,t_0} - \rho_2\varphi_{21,t_0} + (1-\rho_2)\eta_{11} - T_1\eta_{11,x_0x_0} &= 0 \text{ на } z=0 \\
\rho_2\varphi_{21,t_0} - \rho_3\varphi_{31,t_0} + (\rho_2-\rho_3)\eta_{21} - T_2\eta_{21,x_0x_0} &= 0 \text{ на } z=h_2 \\
\varphi_{11,z} &= 0 \text{ на } z=-h_1 \\
\varphi_{31,z} &= 0 \text{ при } z=h_2+h_3
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Задача другого наближення (при α):

$$\begin{aligned}
\varphi_{j2,x_0x_0} + \varphi_{j2,zz} &= -2\varphi_{j1,x_0x_1} \text{ у } \Omega_j, \quad j=1,2,3 \\
\eta_{12,t_0} - \varphi_{j2,z} &= -\eta_{11,x_0}\varphi_{j1,x_0} - \eta_{11,t_1} + \eta_{11}\varphi_{j1,zz} \text{ на } z=0, \quad j=1,2 \\
\eta_{22,t_0} - \varphi_{j2,z} &= -\eta_{21,x_0}\varphi_{j1,x_0} - \eta_{21,t_1} + \eta_{21}\varphi_{j1,zz} \text{ на } z=h_2, \quad j=2,3 \\
\varphi_{12,t_0} - \rho_2\varphi_{22,t_0} + (1-\rho_2)\eta_{12} - T_1\eta_{12,x_0x_0} &= -\varphi_{11,t_1} - \eta_{11}\varphi_{11,t_0z} + \rho_2(\varphi_{21,t_1} + \eta_{11}\varphi_{21,t_0z}) - \\
&- \frac{1}{2}((\varphi_{11,x_0})^2 + (\varphi_{11,z})^2) + \frac{1}{2}\rho_2((\varphi_{21,x_0})^2 + (\varphi_{21,z})^2) + 2T_1\eta_{11,x_0x_1} \\
\text{на } z=0 \\
\rho_2\varphi_{22,t_0} - \rho_3\varphi_{32,t_0} + (\rho_2-\rho_3)\eta_{22} - T_2\eta_{22,x_0x_0} &= -\rho_2(\varphi_{21,t_1} + \eta_{21}\varphi_{21,t_0z}) + \\
&+ \rho_3(\varphi_{31,t_1} + \eta_{21}\varphi_{31,t_0z}) - \frac{1}{2}\rho_2((\varphi_{21,x_0})^2 + (\varphi_{21,z})^2) + \frac{1}{2}\rho_3((\varphi_{31,x_0})^2 + (\varphi_{31,z})^2) + \\
&+ 2T_2\eta_{21,x_0x_1} \\
\text{на } z=h_2 \\
\varphi_{12,z} &= 0 \text{ при } z=-h_1 \\
\varphi_{32,z} &= 0 \text{ при } z=h_2+h_3.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Задача третього наближення (при α^2):

$$\varphi_{j3,x_0x_0} + \varphi_{j3,zz} = -\varphi_{j1,x_1x_1} - 2\varphi_{j1,x_0x_2} - 2\varphi_{j2,x_0x_1} \text{ у } \Omega_j, \quad j=1,2,3$$

$$\eta_{13,t_0} - \varphi_{j3,z} = -\eta_{11,x_0} \varphi_{j1,x_1} - \eta_{11,x_0} \varphi_{j2,x_0} - \eta_{11,x_1} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{12,x_0} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{11,t_2} -$$

$$-\eta_{12,t_1} + \eta_{11} \varphi_{j2,zz} + \eta_{12} \varphi_{j1,zz} + \frac{1}{2} \eta_{11}^2 \varphi_{j1,zzz} - \eta_{11} \eta_{11,x_0} \varphi_{j1,x_0z}$$

на $z = 0$, $j = 1, 2$

$$\eta_{23,t_0} - \varphi_{j3,z} = -\eta_{21,x_0} \varphi_{j1,x_1} - \eta_{21,x_0} \varphi_{j2,x_0} - \eta_{21,x_1} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{22,x_0} \varphi_{j1,x_0} - \eta_{21,t_2} -$$

$$-\eta_{22,t_1} + \eta_{21} \varphi_{j2,zz} + \eta_{22} \varphi_{j1,zz} + \frac{1}{2} \eta_{21}^2 \varphi_{j1,zzz} - \eta_{21} \eta_{21,x_0} \varphi_{j1,x_0z}$$

на $z = h_2$, $j = 2, 3$

$$\varphi_{13,t_0} - \rho_2 \varphi_{23,t_0} + (1 - \rho_2) \eta_{13} - T_1 \eta_{13,x_0x_0} = -\varphi_{12,t_1} - \varphi_{11,t_2} - \eta_{12} \varphi_{11,t_0z} - \eta_{11} \varphi_{11,t_1z} -$$

$$-\frac{1}{2} \eta_{11}^2 \varphi_{11,t_0zz} + \rho_2 (\varphi_{22,t_1} + \varphi_{21,t_2} + \eta_{12} \varphi_{21,t_0z} + \eta_{11} \varphi_{21,t_1z} + \frac{1}{2} \eta_{11}^2 \varphi_{21,t_0zz}) -$$

$$-(\eta_{11} \varphi_{12,t_0z} + \varphi_{11,x_0} \varphi_{12,x_0} + \varphi_{11,x_0} \varphi_{11,x_1} + \eta_{11} \varphi_{11,x_0} \varphi_{11,x_0z} + \varphi_{11,z} \varphi_{12,z} + \eta_{11} \varphi_{11,z} \varphi_{11,zz}) +$$

$$+\rho_2 (\eta_{11} \varphi_{22,t_0z} + \varphi_{21,x_0} \varphi_{22,x_0} + \varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_1} + \eta_{11} \varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_0z} + \varphi_{21,z} \varphi_{22,z} + \eta_{11} \varphi_{21,z} \varphi_{21,zz}) +$$

$$+T_1 (2\eta_{12,x_0x_1} + 2\eta_{11,x_0x_2} + \eta_{11,x_1x_1}) - \frac{3}{2} T_1 (\eta_{11,x_0})^2 \eta_{11,x_0x_0}$$

на $z = 0$

$$\rho_2 \varphi_{23,t_0} - \rho_3 \varphi_{33,t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{23} - T_2 \eta_{23,x_0x_0} = -\rho_2 (\varphi_{22,t_1} + \varphi_{21,t_2} + \eta_{22} \varphi_{21,t_0z} +$$

$$+\eta_{21} \varphi_{21,t_1z} + \frac{1}{2} \eta_{21}^2 \varphi_{21,t_0zz}) + \rho_3 (\varphi_{32,t_1} + \varphi_{31,t_2} + \eta_{22} \varphi_{31,t_0z} + \eta_{21} \varphi_{31,t_1z} + \frac{1}{2} \eta_{21}^2 \varphi_{31,t_0zz}) -$$

$$-\rho_2 (\eta_{21} \varphi_{22,t_0z} + \varphi_{21,x_0} \varphi_{22,x_0} + \varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_1} + \eta_{21} \varphi_{21,x_0} \varphi_{21,x_0z} + \varphi_{21,z} \varphi_{22,z} + \eta_{21} \varphi_{21,z} \varphi_{21,zz}) +$$

$$+\rho_3 (\eta_{21} \varphi_{32,t_0z} + \varphi_{31,x_0} \varphi_{32,x_0} + \varphi_{31,x_0} \varphi_{31,x_1} + \eta_{21} \varphi_{31,x_0} \varphi_{31,x_0z} + \varphi_{31,z} \varphi_{32,z} + \eta_{21} \varphi_{31,z} \varphi_{31,zz}) +$$

$$+T_2 (2\eta_{22,x_0x_1} + 2\eta_{21,x_0x_2} + \eta_{21,x_1x_1}) - \frac{3}{2} T_2 (\eta_{21,x_0})^2 \eta_{21,x_0x_0}$$

на $z = h_2$

$$\varphi_{13,z} = 0 \text{ на } z = -h_1$$

$$\varphi_{33,z} = 0 \text{ на } z = h_2 + h_3.$$

(2.20)

Отже, отримано задачі перших трьох наближень проблеми, де η_{11} , η_{21} , η_{12} , η_{22} , η_{13} , η_{23} , φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} , φ_{12} , φ_{22} , φ_{32} , φ_{13} , φ_{23} , φ_{33} – невідомі функції, які визначають доданки багатомасштабних розвинень для відхилень поверхонь контакту та потенціалів даної тришарової рідини.

У постановці задачі (2.1) – (2.7), змінна t грає роль часу. Після процедури безрозмірювання (2.8) у безрозмірній постановці (2.9) – (2.15), змінна t також відіграє роль часу. Після застосування методу багатомасштабних розвинень (2.16) – (2.17) з'являються нові змінні t_0, t_1, t_2 , що характеризують масштаби часу [51].

2.2. Розв'язки першого наближення проблеми

Розв'язок задачі першого наближення (2.18) отримано у вигляді хвиль, що біжать:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{11} &= -\frac{i\omega}{k\text{sh}(kh_1)} \text{ch}(k(h_1+z))(Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \\
 \varphi_{21} &= \left(\frac{i\omega \text{ch}(k(h_2-z))}{k\text{sh}(kh_2)} + \frac{i((1-\rho_2)k + T_1k^3 - \omega^2 \text{cth}(kh_1) - \rho_2\omega^2 \text{cth}(kh_2)) \text{ch}(kz)}{\rho_2\omega k} \right) \times \\
 &\times (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \\
 \varphi_{31} &= -\frac{i \cdot \text{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1k^3 - \omega^2 \text{cth}(kh_1) - \rho_2\omega^2 \text{cth}(kh_2)) \text{ch}(k(h_2+h_3-z))}{\rho_2\omega k \text{sh}(kh_3)} \times \\
 &\times (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}) \\
 \eta_{11} &= Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta} \\
 \eta_{21} &= -\frac{\text{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1k^3 - \omega^2 \text{cth}(kh_1) - \rho_2\omega^2 \text{cth}(kh_2))}{\omega^2 \rho_2} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}) \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

де $A(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – обвідна хвильового пакету на нижній поверхні контакту, $\bar{A}(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – комплексно спряжена до A , $\theta = kx_0 - \omega t_0$, k та ω – хвильове число та частота центру хвильового пакету відповідно.

Зв'язок між обвідною хвильового пакету на нижній поверхні контакту A та обвідною на верхній поверхні контакту B описується наступним співвідношенням:

$$B = -\frac{\text{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1k^3 - \omega^2 \text{cth}(kh_1) - \rho_2\omega^2 \text{cth}(kh_2))}{\omega^2 \rho_2} A \tag{2.22}$$

У результаті розв'язання задачі першого порядку та підстановки розв'язків у динамічну умову для другої поверхні контакту (2.18), отримано наступне дисперсійне співвідношення:

$$\frac{\rho_2^2 \omega^4}{\text{sh}^2(kh_2)} - \left((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega^2 (\text{cth}(kh_1) + \rho_2 \text{cth}(kh_2)) \right) \times \\ \times \left((\rho_2 - \rho_3)k + T_2 k^3 - \omega^2 (\rho_2 \text{cth}(kh_2) + \rho_3 \text{cth}(kh_3)) \right) = 0. \quad (2.23)$$

Отримане дисперсійне співвідношення має дві пари коренів, які є частотами центру хвильового пакету:

$$\omega_1^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \omega_2^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.24)$$

де

$$a = \frac{\rho_2^2}{\text{sh}^2(kh_2)} - (\rho_2 \text{cth}(kh_2) + \rho_3 \text{cth}(kh_3))(\text{cth}(kh_1) + \rho_2 \text{cth}(kh_2)) \\ b = (\rho_2 \text{cth}(kh_2) + \rho_3 \text{cth}(kh_3))((1 - \rho_2)k + T_1 k^3) + \\ + (k(\rho_2 - \rho_3) + T_2 k^3)(\text{cth}(kh_1) + \rho_2 \text{cth}(kh_2)) \\ c = -(k(\rho_2 - \rho_3) + T_2 k^3)((1 - \rho_2)k + T_1 k^3) \quad (2.25)$$

Через громіздкість обчислень для одержання результатів для задач другого та третього наближень використовувався комп'ютерний пакет Maple.

2.3. Розв'язки другого наближення проблеми

Після підстановки розв'язків задачі першого наближення (2.21) у задачу другого наближення (2.19), використовуючи програмний пакет Maple, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\Phi_{12, x_0 x_0} + \Phi_{12, zz} = 2K_1 k e^{i\theta} \text{ch}(k(h_1 + z))A_{,x_1} + cc, \\ \Phi_{22, x_0 x_0} + \Phi_{22, zz} = -2ike^{i\theta} (iK_2 \text{ch}(k(h_2 - z)) + iK_3 \text{ch}(kz))A_{,x_1} + cc \\ \Phi_{32, x_0 x_0} + \Phi_{32, zz} = 2K_4 k e^{i\theta} \text{ch}(k(z - h_2 - h_3))A_{,x_1} + cc$$

$$\eta_{12,t_0} - \varphi_{12,z} = -A_{,t_1} e^{i\theta} + 2iA^2 e^{2i\theta} K_1 \operatorname{ch}(kh_1) k^2 + cc \text{ при } z=0$$

$$\eta_{12,t_0} - \varphi_{22,z} = -A_{,t_1} e^{i\theta} + 2i(K_2 \operatorname{ch}(kh_2) + K_3) e^{2i\theta} k^2 A^2 + cc \text{ при } z=0$$

$$\eta_{22,t_0} - \varphi_{22,z} = -K_5 A_{,t_1} e^{i\theta} + 2i(K_3 \operatorname{ch}(kh_2) + K_2) K_5 e^{2i\theta} k^2 A^2 + cc \text{ при } z=h_2$$

$$\eta_{22,t_0} - \varphi_{32,z} = -K_5 A_{,t_1} e^{i\theta} + 2iK_4 \operatorname{ch}(kh_3) K_5 e^{2i\theta} k^2 A^2 + cc \text{ при } z=h_2$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12,t_0} - \rho_2 \varphi_{22,t_0} + (1 - \rho_2) \eta_{12} - T_1 \eta_{12,x_0 x_0} = & (-k\omega(K_1 \operatorname{sh}(kh_1) + \rho_2 K_2 \operatorname{sh}(kh_2)) - \\ & - 0.5K_1^2 k^2 (\operatorname{ch}^2(kh_1) - \operatorname{sh}^2(kh_1)) + 0.5\rho_2 (-iK_2 \operatorname{ch}(kh_2) + iK_3)^2 k^2 - \\ & - K_2^2 \operatorname{sh}^2(kh_2) k^2) e^{2i\theta} A^2 + (-iK_1 \operatorname{ch}(kh_1) + \rho_2 (iK_2 \operatorname{ch}(kh_2) + iK_3)) e^{i\theta} A_{,t_1} + \\ & + 2iT_1 k e^{i\theta} A_{,x_1} - 0.5k((\operatorname{ch}^2(kh_1) + \operatorname{sh}^2(kh_1)) k K_1^2 + 2K_1 \operatorname{sh}(kh_1) \omega + (((-\operatorname{ch}^2(kh_2) - \\ & - \operatorname{sh}^2(kh_2)) K_2^2 - 2K_2 K_3 \operatorname{ch}(kh_2) - K_3^2) k + 2K_2 \operatorname{sh}(kh_2) \omega) \rho_2) A \bar{A} + cc \end{aligned}$$

при $z=0$

$$\begin{aligned} \rho_2 \varphi_{22,t_0} - \rho_3 \varphi_{32,t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{22} - T_2 \eta_{22,x_0 x_0} = & 2iT_2 K_5 k e^{i\theta} A_{,x_1} + e^{2i\theta} ((-\rho_2 K_3 \operatorname{sh}(kh_2) - \\ & - \rho_3 K_4 \operatorname{sh}(kh_3)) K_5 k \omega - 0.5\rho_2 (-iK_2 + iK_3 \operatorname{ch}(kh_2))^2 k^2 - K_3^2 \operatorname{sh}^2(kh_2) k^2) + \\ & + 0.5\rho_3 K_4^2 k^2 (\operatorname{ch}^2(kh_3) - \operatorname{sh}^2(kh_3)) A^2 + e^{i\theta} (-\rho_2 (iK_2 + iK_3 \operatorname{ch}(kh_2)) + i\rho_3 K_4 \times \\ & \times \operatorname{ch}(kh_3)) A_{,t_1} - 0.5k(K_3^2 \operatorname{sh}^2(kh_2) k \rho_2 + K_3^2 \operatorname{ch}^2(kh_2) k \rho_2 - K_4^2 \operatorname{sh}^2(kh_3) k \rho_3 - \\ & - K_4^2 \operatorname{ch}^2(kh_3) k \rho_3 + 2K_2 K_3 \operatorname{ch}(kh_2) k \rho_2 + 2K_3 K_5 \operatorname{sh}(kh_2) \omega \rho_2 + 2K_4 K_5 \operatorname{sh}(kh_3) \omega \rho_3 + \\ & + K_2^2 k \rho_2) A \bar{A} + cc \end{aligned}$$

при $z=h_2$

(2.26)

де cc – комплексно спряжена величина до попередніх членів.

$$K_1 = -\frac{\omega}{k \operatorname{sh}(kh_1)},$$

$$K_2 = \frac{\omega}{k \operatorname{sh}(kh_2)},$$

$$K_3 = \frac{((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega^2 \operatorname{cth}(kh_2))}{\rho_2 \omega k},$$

$$K_4 = -\frac{\operatorname{sh}(kh_2)((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega^2 \operatorname{cth}(kh_2))}{\operatorname{sh}(kh_3) \rho_2 \omega k},$$

$$K_5 = -\frac{\operatorname{sh}(kh_2)((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega^2 \operatorname{cth}(kh_2))}{\rho_2 \omega^2} \quad (2.27)$$

Із врахуванням граничних умов у загальному випадку розв'язки другого наближення мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\eta_{12} &= B_0^{[2]} + B_1^{[2]}e^{i\theta} + B_2^{[2]}e^{2i\theta} + cc \\
\eta_{22} &= C_0^{[2]} + C_1^{[2]}e^{i\theta} + C_2^{[2]}e^{2i\theta} + cc \\
\Phi_{12} &= F_{11}^{[2]}(z + h_1)\text{sh}(k(z + h_1))e^{i\theta} + F_{10}^{[2]}\text{ch}(k(z + h_1))e^{i\theta} + \\
&+ F_{20}^{[2]}\text{ch}(2k(z + h_1))e^{2i\theta} + cc \\
\Phi_{22} &= (N_{10}^{[2]} + N_{11}^{[2]}z)e^{i\theta+k(h_2-z)} + N_{20}^{[2]}e^{2i\theta+2k(h_2-z)} + \\
&+ (M_{10}^{[2]} + M_{11}^{[2]}z)e^{i\theta-k(h_2-z)} + M_{20}^{[2]}e^{2i\theta-2k(h_2-z)} + cc \\
\Phi_{32} &= L_{11}^{[2]}(z - (h_2 + h_3))\text{sh}(k(z - (h_2 + h_3)))e^{i\theta} + \\
&+ L_{10}^{[2]}\text{ch}(k(z - (h_2 + h_3)))e^{i\theta} + L_{20}^{[2]}\text{ch}(2k(z - (h_2 + h_3)))e^{2i\theta} + cc
\end{aligned} \tag{2.28}$$

де $F_{ij}^{[2]}, L_{ij}^{[2]}, M_{ij}^{[2]}, N_{ij}^{[2]}, B_i^{[2]}, C_i^{[2]}$ – невизначені коефіцієнти, cc – комплексно спряжена величина до попередніх виразів.

Підставивши вирази (2.28), розв'язки задачі першого наближення (2.21) в перші три рівняння системи (2.26), з використанням системи комп'ютерної алгебри Maple, одержуємо наступні коефіцієнти:

$$\begin{aligned}
F_{11}^{[2]} &= K_1 A_{,x_1}, \\
M_{11}^{[2]} &= \frac{1}{2} A_{,x_1} K_2 + \frac{1}{2} A_{,x_1} K_3 e^{kh_2}, \\
L_{11}^{[2]} &= K_4 A_{,x_1}, \\
N_{11}^{[2]} &= -\frac{1}{2} A_{,x_1} K_2 - \frac{1}{2} A_{,x_1} K_3 e^{-kh_2}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Після підстановки (2.21), (2.28) та (2.29) у наступні шість рівнянь системи (2.26) з використанням пакету символьних обчислень Maple отримаємо дві незалежні системи рівнянь відносно коефіцієнтів, що залишилися. Прирівнюючи вирази при функції $e^{i\theta}$, отримуємо систему відносно коефіцієнтів $B_1^{[2]}, F_{10}^{[2]}, M_{10}^{[2]}, N_{10}^{[2]}, C_1^{[2]}, L_{10}^{[2]}$, яка має наступний вигляд:

$$-iB_1^{[2]}\omega - F_{10}^{[2]}\text{sh}(kh_1)k = b_1$$

$$\begin{aligned}
-iB_1^{[2]}\omega - M_{10}^{[2]}ke^{-kh_2} + N_{10}^{[2]}ke^{kh_2} &= b_2 \\
-iC_1^{[2]}\omega - M_{10}^{[2]}k + N_{10}^{[2]}k &= b_3 \\
-iC_1^{[2]}\omega + L_{10}^{[2]}\text{sh}(kh_3)k &= b_4 \\
T_1B_1^{[2]}k^2 - iF_{10}^{[2]}\text{ch}(kh_1)\omega + i\omega\rho_2(M_{10}^{[2]}e^{-kh_2} + N_{10}^{[2]}e^{kh_2}) - B_1^{[2]}(\rho_2 - 1) &= b_5 \\
-i\omega\rho_3(-L_{10}^{[2]}\text{ch}(kh_3)) + C_1^{[2]}(T_2k^2 + \rho_2 - \rho_3) - & \\
-i\omega\rho_2(M_{10}^{[2]} + N_{10}^{[2]}) &= b_6
\end{aligned} \tag{2.30}$$

де $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ – вільні члени системи (2.30), які дорівнюють:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -A_{,t_1} + F_{11}^{[2]}(h_1\text{ch}(kh_1)k + \text{sh}(kh_1)), \\
b_2 &= -A_{,t_1} + M_{11}^{[2]}e^{-kh_2} + N_{11}^{[2]}e^{kh_2}, \\
b_3 &= -A_{,t_1}K_5 + h_2k(M_{11}^{[2]} - N_{11}^{[2]}) + (M_{11}^{[2]} + N_{11}^{[2]}), \\
b_4 &= -A_{,t_1}K_5 - L_{11}^{[2]}(h_3\text{ch}(kh_3)k + \text{sh}(kh_3)) \\
b_5 &= -i(-K_2\text{ch}(kh_2)\rho_2 + K_1\text{ch}(kh_1) - K_3\rho_2)A_{,t_1} + 2iT_1kA_{,x_1} + iF_{11}^{[2]}h_1\text{sh}(kh_1)\omega \\
b_6 &= -i(K_3\text{ch}(kh_2)\rho_2 - K_4\text{ch}(kh_3)\rho_3 + K_2\rho_2)A_{,t_1} + 2iK_5T_2kA_{,x_1} + \\
&+ i(-L_{11}^{[2]}\text{sh}(kh_3)h_3\omega\rho_3 + h_2\omega\rho_2(M_{11}^{[2]} + N_{11}^{[2]}))
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Після підстановки виразів (2.29) із використанням математичного пакету

Maple вирази $b_1 - b_6$ набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -A_{,t_1} + K_1A_{,x_1}(h_1\text{ch}(kh_1)k + \text{sh}(kh_1)), \\
b_2 &= -A_{,t_1} + \frac{1}{2}K_2(e^{-kh_2} - e^{kh_2})A_{,x_1}, \\
b_3 &= -A_{,t_1}K_5 + A_{,x_1}(h_2k(K_2 + \frac{1}{2}K_3(e^{kh_2} + e^{-kh_2}))) + \frac{1}{2}K_3(e^{kh_2} - e^{-kh_2}), \\
b_4 &= -A_{,t_1}K_5 - K_4(h_3\text{ch}(kh_3)k + \text{sh}(kh_3))A_{,x_1} \\
b_5 &= -i(-K_2\text{ch}(kh_2)\rho_2 + K_1\text{ch}(kh_1) - K_3\rho_2)A_{,t_1} + i(2T_1k + K_1h_1\text{sh}(kh_1)\omega)A_{,x_1} \\
b_6 &= -i(K_3\text{ch}(kh_2)\rho_2 - K_4\text{ch}(kh_3)\rho_3 + K_2\rho_2)A_{,t_1} + i(2K_5T_2k - \\
&- K_4\text{sh}(kh_3)h_3\omega\rho_3 + h_2\omega\rho_2\frac{1}{2}K_3(e^{kh_2} - e^{-kh_2}))A_{,x_1}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Умова існування нетривіальних розв'язків системи (2.30), за умови, що $B_1 = 0$, виглядає так:

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 & -\text{sh}(kh_1)k & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & ke^{kh_2} & -ke^{-kh_2} & 0 \\ b_3 & -i\omega & 0 & k & -k & 0 \\ b_4 & -i\omega & 0 & 0 & 0 & \text{sh}(kh_3)k \\ b_5 & 0 & -ich(kh_1)\omega ie^{kh_2}\omega\rho_2 & ie^{-kh_2}\omega\rho_2 & 0 & 0 \\ b_6 T_2 k^2 + \rho_2 - \rho_3 & 0 & -i\omega\rho_2 & -i\omega\rho_2 & ich(kh_3)\omega\rho_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Розгорнутий вигляд вказаної умови записується таким чином:

$$\begin{aligned} & \left[-A_{,t_1} + K_1 A_{,x_1} (h_1 \text{ch}(kh_1)k + \text{sh}(kh_1)) \right] \times \\ & \times \left[((ik^2\omega((T_2 k^3 + \omega^2\rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3))\text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3)\omega^2\rho_3))e^{-kh_2} + \right. \\ & \left. + (-ik^2\omega((T_2 k^3 - \omega^2\rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3))\text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3)\omega^2\rho_3))e^{kh_2})\text{ch}(kh_1) \right] + \\ & \quad + \left[-A_{,t_1} + \frac{1}{2}K_2(e^{-kh_2} - e^{kh_2})A_{,x_1} \right] \times \\ & \quad \times \left[((-i((T_2 k^3 + \omega^2\rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3))\text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3)\omega^2\rho_3)\omega\rho_2 k^2)e^{-kh_2} + \right. \\ & \quad \left. + (-i((T_2 k^3 - \omega^2\rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3))\text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3)\omega^2\rho_3)\omega\rho_2 k^2)e^{kh_2})\text{sh}(kh_1) \right] + \\ & \quad + \left[-A_{,t_1} K_5 + A_{,x_1} (h_2 k (K_2 + \frac{1}{2}K_3(e^{kh_2} + e^{-kh_2}))) + \frac{1}{2}K_3(e^{kh_2} - e^{-kh_2}) \right] \times \\ & \quad \times \left[2i\text{sh}(kh_1)k^2\omega\rho_2((T_2 k^3 + k(\rho_2 - \rho_3))\text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3)\omega^2\rho_3) \right] + \\ & \quad + \left[-A_{,t_1} K_5 - K_4(h_3 \text{ch}(kh_3)k + \text{sh}(kh_3))A_{,x_1} \right] \times \\ & \quad \times \left[2i\omega^3 \text{sh}(kh_1)k^2\rho_2\rho_3 \text{ch}(kh_3) \right] + \\ & \quad + \left[-i(-K_2 \text{ch}(kh_2)\rho_2 + K_1 \text{ch}(kh_1) - K_3\rho_2)A_{,t_1} + i(2T_1 k + K_1 h_1 \text{sh}(kh_1)\omega)A_{,x_1} \right] \times \\ & \quad \times \left[((-k^3((T_2 k^3 + \omega^2\rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3))\text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3)\omega^2\rho_3))e^{-kh_2} + \right. \\ & \quad \left. + (k^3((T_2 k^3 - \omega^2\rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3))\text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3)\omega^2\rho_3))e^{kh_2})\text{sh}(kh_1) \right] + \quad (2.33) \\ & \quad + \left[-i(K_3 \text{ch}(kh_2)\rho_2 - K_4 \text{ch}(kh_3)\rho_3 + K_2\rho_2)A_{,t_1} + i(2K_5 T_2 k - \right. \\ & \quad \left. - K_4 \text{sh}(kh_3)h_3\omega\rho_3 + h_2\omega\rho_2 \frac{1}{2}K_3(e^{kh_2} - e^{-kh_2}))A_{,x_1} \right] \times \\ & \quad \times \left[-2\omega^2 \text{sh}(kh_1)k^3 \text{sh}(kh_3)\rho_2 \right] = 0 \end{aligned}$$

Аналітичні перетворення для отримання загального та розгорнутого виглядів умови існування нетривіальних розв'язків (2.33) виконано за допомогою програмного пакету Maple. Програмний код для перевірки даної умови наведено в додатку Б.

За виконання даної умови система відносно коефіцієнтів $L_{10}^{[2]}, F_{10}^{[2]}, M_{10}^{[2]}, N_{10}^{[2]}, C_1^{[2]}$ виглядатиме наступним чином:

$$\begin{aligned}
-F_{10}^{[2]} \operatorname{sh}(kh_1)k &= -A_{,t_1} + F_{11}^{[2]}(h_1 \operatorname{ch}(kh_1)k + \operatorname{sh}(kh_1)) \\
-M_{10}^{[2]}ke^{-kh_2} + N_{10}^{[2]}ke^{kh_2} &= -A_{,t_1} + M_{11}^{[2]}e^{-kh_2} + N_{11}^{[2]}e^{kh_2} \\
-iC_1^{[2]}\omega - M_{10}^{[2]}k + N_{10}^{[2]}k &= -A_{,t_1}K_5 + h_2k(M_{11}^{[2]} - N_{11}^{[2]}) + (M_{11}^{[2]} + N_{11}^{[2]}) \\
-iC_1^{[2]}\omega + L_{10}^{[2]}\operatorname{sh}(kh_3)k &= -A_{,t_1}K_5 - L_{11}^{[2]}(h_3 \operatorname{ch}(kh_3)k + \operatorname{sh}(kh_3)) \\
-iF_{10}^{[2]}\operatorname{ch}(kh_1)\omega + i\omega\rho_2(M_{10}^{[2]}e^{-kh_2} + N_{10}^{[2]}e^{kh_2}) &= \\
= -i(-K_2 \operatorname{ch}(kh_2)\rho_2 + K_1 \operatorname{ch}(kh_1) - K_3\rho_2)A_{,t_1} + 2iT_1kA_{,x_1} + iF_{11}^{[2]}h_1 \operatorname{sh}(kh_1)\omega & \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Виконавши необхідні перетворення, отримуємо вирази для коефіцієнтів $L_{10}^{[2]}, F_{10}^{[2]}, M_{10}^{[2]}, N_{10}^{[2]}, C_1^{[2]}, B_1^{[2]}$.

$$B_1^{[2]} = 0$$

$$F_{10}^{[2]} = -\frac{F_{11}^{[2]}h_1 \operatorname{ch}(kh_1)k + F_{11}^{[2]}\operatorname{sh}(kh_1) - A_{,t_1}}{\operatorname{sh}(kh_1)k}$$

$$\begin{aligned}
M_{10}^{[2]} &= \frac{1}{2} \frac{1}{e^{-kh_2}\omega\rho_2k} \left[k\omega(F_{11}^{[2]}\operatorname{sh}(kh_1)h_1 + F_{10}^{[2]}\operatorname{ch}(kh_1)) + A_{,t_1}(K_2 \operatorname{ch}(kh_2)k\rho_2 - \right. \\
&\quad \left. - K_1 \operatorname{ch}(kh_1)k + K_3k\rho_2 + \omega\rho_2) - \omega\rho_2(M_{11}^{[2]}e^{-kh_2} + N_{11}^{[2]}e^{kh_2}) + 2T_1k^2A_{,x_1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{10}^{[2]} &= \frac{1}{2} \frac{1}{e^{kh_2}\omega\rho_2k} \left[k\omega(F_{11}^{[2]}\operatorname{sh}(kh_1)h_1 + F_{10}^{[2]}\operatorname{ch}(kh_1)) + A_{,t_1}(K_2 \operatorname{ch}(kh_2)k\rho_2 - \right. \\
&\quad \left. - K_1 \operatorname{ch}(kh_1)k + K_3k\rho_2 - \omega\rho_2) + \omega\rho_2(M_{11}^{[2]}e^{-kh_2} + N_{11}^{[2]}e^{kh_2}) + 2T_1k^2A_{,x_1} \right]
\end{aligned}$$

$$C_1^{[2]} = -\frac{i((N_{11}^{[2]} - M_{11}^{[2]})h_2k - M_{10}^{[2]}k + N_{10}^{[2]}k - M_{11}^{[2]} - N_{11}^{[2]} + K_5A_{,t_1})}{\omega}$$

$$L_{10}^{[2]} = \frac{-L_{11}^{[2]}h_3 \operatorname{ch}(kh_3)k + iC_1^{[2]}\omega - K_5A_{,t_1} - L_{11}^{[2]}\operatorname{sh}(kh_3)}{\operatorname{sh}(kh_3)k} \quad (2.35)$$

Кінцевий вигляд системи (2.34) та вирази для коефіцієнтів (2.35) отримано за допомогою математичного пакету Maple.

Прирівнюючи вирази при функції $e^{2i\theta}$ у середовищі Maple, отримуємо систему відносно коефіцієнтів $N_{20}^{[2]}, M_{20}^{[2]}, F_{20}^{[2]}, L_{20}^{[2]}, C_2^{[2]}, B_2^{[2]}$, яка має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
& -2iB_2^{[2]}\omega - 2F_{20}^{[2]}\text{sh}(2kh_1)k = 2iA^2K_1\text{ch}(kh_1)k^2 \\
& -2iB_2^{[2]}\omega - 2M_{20}^{[2]}ke^{-2kh_2} + 2N_{20}^{[2]}ke^{2kh_2} = 2iA^2k^2(K_2\text{ch}(kh_2) + K_3) \\
& -2iC_2^{[2]}\omega - 2M_{20}^{[2]}k + 2N_{20}^{[2]}k = 2iK_5A^2k^2(K_3\text{ch}(kh_2) + K_2) \\
& -2iC_2^{[2]}\omega + 2L_{20}^{[2]}\text{sh}(2kh_3)k = 2iK_5A^2k^2K_4\text{ch}(kh_3) \\
& (4T_1k^2 - \rho_2 + 1)B_2^{[2]} - 4iF_{20}^{[2]}\omega\text{ch}^2(kh_1) + 2i\omega\rho_2(M_{20}^{[2]}e^{-2kh_2} + N_{20}^{[2]}e^{2kh_2}) + 2iF_{20}^{[2]}\omega = \\
& = -\frac{1}{2}A^2k(-2K_2K_3\text{ch}(kh_2)k\rho_2 - K_2^2k\rho_2 + 2K_2\rho_2\text{sh}(kh_2)\omega - K_3^2k\rho_2 + \\
& + K_1^2k + 2K_1\text{sh}(kh_1)\omega) \\
& (4T_2k^2 + \rho_2 - \rho_3)C_2^{[2]} + 2iL_{20}^{[2]}\text{ch}(2kh_3)\omega\rho_3 - 2i\omega\rho_2(M_{20}^{[2]} + N_{20}^{[2]}) = \\
& = -\frac{1}{2}A^2k(K_3^2k\rho_2 - K_4^2k\rho_3 + 2K_2K_3\text{ch}(kh_2)k\rho_2 + 2\rho_2K_5K_3\text{sh}(kh_2)\omega + \\
& + 2\rho_3K_5K_4\text{sh}(kh_3)\omega + K_2^2k\rho_2) \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Дана система є сумісною, через громіздкість обчислень розв'язки системи (2.36) отримано з використанням математичного пакету Maple. Відповідні коефіцієнти мають наступний вигляд:

$$N_{20}^{[2]} = -\frac{1}{2} \frac{iA^2k(S_1 + S_2\omega^4 + S_3\omega^3 + S_4\omega^2 + S_5\omega)}{S_6},$$

де вирази $S_1 - S_6$ для коефіцієнта $N_{20}^{[2]}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 2\text{sh}(2kh_3)\text{sh}(2kh_1)k^2(4T_2k^2 + \rho_2 - \rho_3)(4T_1k^2 - \rho_2 + 1) \times \\
& \times ((K_3\text{ch}(kh_2) + K_2)e^{-2kh_2}K_5 - K_2\text{ch}(kh_2) - K_3)
\end{aligned}$$

$$S_2 = [(-\text{sh}(2kh_1)\rho_2 + 2\text{ch}^2(kh_1) - 1)[8\text{ch}(2kh_3)\rho_3 K_5 K_2 + 4K_5((2\text{ch}(kh_2)\text{ch}(2kh_3)\rho_3 + \text{sh}(kh_2)\text{sh}(2kh_3)\rho_2)K_3 + (\text{sh}(2kh_3)\text{sh}(kh_3) - 2\text{ch}(2kh_3)\text{ch}(kh_3))\rho_3 K_4)]]e^{-2kh_2} + (\rho_3\text{ch}(2kh_3) + \text{sh}(2kh_3)\rho_2)[(4\text{ch}^3(kh_1) - \text{sh}(kh_1)\text{sh}(2kh_1) - 2\text{ch}(kh_1))4K_1 - 4(4\text{ch}(kh_2)\text{ch}^2(kh_1) + \text{sh}(2kh_1)\text{sh}(kh_2)\rho_2 - 2\text{ch}(kh_2))K_2 + (-2\text{ch}^2(kh_1) + 1)8K_3]$$

$$S_3 = 2\text{sh}(2kh_3)e^{-2kh_2}k(2\text{ch}^2(kh_1) - 1)((2K_2K_3\text{ch}(kh_2) + K_2^2 + K_3^2)\rho_2 - K_4^2\rho_3) - 2\text{sh}(2kh_1)k(\rho_2(-\rho_3e^{-2kh_2}K_4^2 + K_1^2)\text{sh}(2kh_3) + K_1^2\text{ch}(2kh_3)\rho_3) + 2\rho_2(2K_2K_3\text{ch}(kh_2) + K_2^2 + K_3^2)k\text{sh}(2kh_1)((-e^{-2kh_2} + 1)\rho_2\text{sh}(2kh_3) + \rho_3\text{ch}(2kh_3))$$

$$S_4 = [(4(K_3\text{ch}(kh_2) + K_2)K_5k\rho_2e^{-2kh_2} + 2k(K_2\text{sh}(kh_2)\rho_2 + K_1\text{sh}(kh_1))) \cdot \text{sh}(2kh_3)\text{sh}(2kh_1) + (4k(-K_5K_3e^{-2kh_2} + K_2)(2\text{ch}^2(kh_1) - 1)\text{ch}(kh_2) - 4k(2\text{ch}^2(kh_1) - 1) \cdot (K_2K_5e^{-2kh_2} + K_1\text{ch}(kh_1) - K_3))\text{sh}(2kh_3)](4T_2k^2 + \rho_2 - \rho_3) + [(4k\rho_2(K_2\text{ch}(kh_2) + K_3) - 2K_5e^{-2kh_2}k(K_3\text{sh}(kh_2)\rho_2 + K_4\text{sh}(kh_3)\rho_3))\text{sh}(2kh_3) + 4k\rho_3(-K_5K_3e^{-2kh_2} + K_2)\text{ch}(2kh_3)\text{ch}(kh_2) - 4\text{ch}(2kh_3)k\rho_3((-K_4\text{ch}(kh_3) + K_2)K_5e^{-2kh_2} - K_3)]\text{sh}(2kh_1)(4T_1k^2 - \rho_2 + 1)$$

$$S_5 = -k^2\text{sh}(2kh_3)\text{sh}(2kh_1)[(4T_1k^2 - \rho_2 + 1)((2K_2K_3\text{ch}(kh_2) + K_2^2 + K_3^2)\rho_2 - K_4^2\rho_3)e^{-2kh_2} + (4T_2k^2 + \rho_2 - \rho_3)((2K_2K_3\text{ch}(kh_2) + K_2^2 + K_3^2)\rho_2 - K_1^2)]$$

$$S_6 = [((-4T_1k^3 - 2\omega^2\rho_2 + k\rho_2 - k)(4T_2k^3 + 2\omega^2\rho_2 + k\rho_2 - k\rho_3)e^{-2kh_2} + (4T_1k^3 - (2\omega^2\rho_2 + k\rho_2 - k))(4T_2k^3 - 2\omega^2\rho_2 + k\rho_2 - k\rho_3)e^{2kh_2})\text{sh}(2kh_1) + 2\omega^2(2\text{ch}^2(kh_1) - 1)(k(4T_2k^2 + \rho_2 - \rho_3)(e^{-2kh_2} - e^{2kh_2}) + 2\rho_2\omega^2(e^{-2kh_2} + e^{2kh_2}))]\text{sh}(2kh_3) + 2\text{ch}(2kh_3)\text{sh}(2kh_1)\rho_3\omega^2[2\omega^2\rho_2(e^{-2kh_2} + e^{2kh_2}) + k(4T_1k^2 - \rho_2 + 1)(e^{-2kh_2} - e^{2kh_2})] - 4\omega^4\rho_3\text{ch}(2kh_3)(2\text{ch}^2(kh_1) - 1)(e^{-2kh_2} - e^{2kh_2})$$

$$M_{20}^{[2]} = \frac{1}{e^{-2kh_2}((-4T_1k^3 - 2\omega^2\rho_2 + k(\rho_2 - 1))\text{sh}(2kh_1) + (4\text{ch}^2(kh_1) - 2)\omega^2)} \left[-\frac{1}{2}i \cdot ((4i\rho_2\omega^2 - 8iT_1k^3 + 2ik\rho_2 - 2ik)\text{sh}(2kh_1) + (8\text{ich}^2(kh_1) - 4i)\omega^2)e^{2kh_2}N_{20}^{[2]} - \frac{1}{2}i(((-8T_1k^4 + (-2K_3\omega\rho_2 + 2\rho_2 - 2)k^2)K_2\text{ch}(kh_2) - 8K_3T_1k^4 + ((-K_2^2\omega - K_3^2\omega + 2K_3)\rho_2 + K_1^2\omega - 2K_3)k^2 + (K_2\text{sh}(kh_2)\rho_2 + K_1\text{sh}(kh_1))2\omega^2k)\text{sh}(2kh_1) + ((8K_2\text{ch}^2(kh_1) - 4K_2)\omega^2\text{ch}(kh_2) + (-8K_1\text{ch}^3(kh_1) + 8K_3\text{ch}^2(kh_1) + 4K_1\text{ch}(kh_1) - 4K_3)\omega^2)k)A^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
F_{20}^{[2]} &= -\frac{(iK_1 \operatorname{ch}(kh_1) - iK_2 \operatorname{ch}(kh_2) - iK_3)A^2 k - M_{20}^{[2]} e^{-2kh_2} + N_{20}^{[2]} e^{2kh_2}}{\operatorname{sh}(2kh_1)} \\
L_{20}^{[2]} &= -\frac{i(K_3 \operatorname{ch}(kh_2) - K_4 \operatorname{ch}(kh_3) + K_2)K_5 A^2 k + M_{20}^{[2]} - N_{20}^{[2]}}{\operatorname{sh}(2kh_3)} \\
C_2^{[2]} &= \frac{ik(iK_4 K_5 \operatorname{ch}(kh_3) A^2 k - L_{20}^{[2]} \operatorname{sh}(2kh_3))}{\omega} \\
B_2^{[2]} &= \frac{ik(iK_1 A^2 \operatorname{ch}(kh_1) k + F_{20}^{[2]} \operatorname{sh}(2kh_1))}{\omega} \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Із двох останніх рівнянь із використанням пакету Maple отримуємо коефіцієнти $B_0^{[2]}$ та $C_0^{[2]}$.

$$\begin{aligned}
B_0^{[2]} &= \frac{1}{2(\rho_2 - 1)} \left[\bar{A} A k ((\operatorname{ch}^2(kh_1) + \operatorname{sh}^2(kh_1)) k K_1^2 + 2K_1 \operatorname{sh}(kh_1) \omega + \right. \\
&\quad \left. + (((-\operatorname{ch}^2(kh_2) - \operatorname{sh}^2(kh_2)) K_2^2 - 2K_2 K_3 \operatorname{ch}(kh_2) - K_3^2) k + 2K_2 \operatorname{sh}(kh_2) \omega) \rho_2) \right] \\
C_0^{[2]} &= -\frac{1}{2(\rho_2 - \rho_3)} \left[\bar{A} A k (((-\operatorname{ch}^2(kh_3) - \operatorname{sh}^2(kh_3)) k K_4^2 + 2K_4 K_5 \operatorname{sh}(kh_3) \omega) \rho_3 + \right. \\
&\quad \left. + (((\operatorname{ch}^2(kh_2) + \operatorname{sh}^2(kh_2)) K_3^2 + 2K_2 K_3 \operatorname{ch}(kh_2) + K_2^2) k + 2K_3 K_5 \operatorname{sh}(kh_2) \omega) \rho_2) \right] \tag{2.38}
\end{aligned}$$

У рівностях (2.28) – (2.38) номер [2] позначає номер наближення і не є математичною операцією.

Отже, розв'язки другого наближення мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\eta_{12} &= \frac{1}{2(\rho_2 - 1)} \left[k ((\operatorname{ch}^2(kh_1) + \operatorname{sh}^2(kh_1)) k K_1^2 + 2K_1 \operatorname{sh}(kh_1) \omega + (((-\operatorname{ch}^2(kh_2) - \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{sh}^2(kh_2)) K_2^2 - 2K_2 K_3 \operatorname{ch}(kh_2) - K_3^2) k + 2K_2 \operatorname{sh}(kh_2) \omega) \rho_2) \right] A \bar{A} + \\
&\quad + \Lambda_1 A^2 e^{2i\theta} + cc \\
\eta_{22} &= -\frac{1}{2(\rho_2 - \rho_3)} \left[k (((-\operatorname{ch}^2(kh_3) - \operatorname{sh}^2(kh_3)) k K_4^2 + 2K_4 K_5 \operatorname{sh}(kh_3) \omega) \rho_3 + \right. \\
&\quad \left. + (((\operatorname{ch}^2(kh_2) + \operatorname{sh}^2(kh_2)) K_3^2 + 2K_2 K_3 \operatorname{ch}(kh_2) + K_2^2) k + 2K_3 K_5 \operatorname{sh}(kh_2) \omega) \rho_2) \right] A \bar{A} - \\
&\quad - \frac{i((N_{11}^{[2]} - M_{11}^{[2]}) h_2 k - M_{10}^{[2]} k + N_{10}^{[2]} k - M_{11}^{[2]} - N_{11}^{[2]} + K_5 A_{,t_1})}{\omega} e^{i\theta} + \\
&\quad + \Lambda_2 A^2 e^{2i\theta} + cc
\end{aligned}$$

2.4. Розв'язки третього наближення проблеми

Для третьої лінійної задачі загальний вигляд розв'язків наступний:

$$\begin{aligned}
 \eta_{13} &= B_0^{[3]} + B_1^{[3]} e^{i\theta} + B_2^{[3]} e^{2i\theta} + B_3^{[3]} e^{3i\theta} + cc, \\
 \eta_{23} &= C_0^{[3]} + C_1^{[3]} e^{i\theta} + C_2^{[3]} e^{2i\theta} + C_3^{[3]} e^{3i\theta} + cc \\
 \Phi_{13} &= F_{11}^{[3]}(h_1 + z) \operatorname{sh}(k(h_1 + z)) e^{i\theta} + \left(F_{10}^{[3]} + F_{12}^{[3]}(z + h_1)^2 \right) \operatorname{ch}(k(h_1 + z)) e^{i\theta} + \\
 &+ F_{20}^{[3]} \operatorname{ch}(2k(h_1 + z)) e^{2i\theta} + F_{21}^{[3]}(z + h_1) \operatorname{sh}(2k(h_1 + z)) e^{2i\theta} + \\
 &+ F_{30}^{[3]} \operatorname{ch}(3k(z + h_1)) e^{3i\theta} + cc \\
 \Phi_{23} &= \left(N_{10}^{[3]} + N_{11}^{[3]} z + N_{12}^{[3]} z^2 \right) e^{i\theta + k(h_2 - z)} + \left(M_{10}^{[3]} + M_{11}^{[3]} z + M_{12}^{[3]} z^2 \right) e^{i\theta - k(h_2 - z)} + \\
 &+ \left(N_{20}^{[3]} + N_{21}^{[3]} z \right) e^{2i\theta + 2k(h_2 - z)} + \left(M_{20}^{[3]} + M_{21}^{[3]} z \right) e^{2i\theta - 2k(h_2 - z)} + N_{30}^{[3]} e^{3i\theta + 3k(h_2 - z)} + \\
 &+ M_{30}^{[3]} e^{3i\theta - 3k(h_2 - z)} + cc \quad (2.39) \\
 \Phi_{33} &= L_{11}^{[3]}(z - (h_2 + h_3)) \operatorname{sh}(k(z - (h_2 + h_3))) e^{i\theta} + \\
 &+ \left(L_{10}^{[3]} + L_{12}^{[3]}(z - (h_2 + h_3))^2 \right) \operatorname{ch}(k(z - (h_2 + h_3))) e^{i\theta} + \\
 &+ L_{20}^{[3]} \operatorname{ch}(2k(z - (h_2 + h_3))) e^{2i\theta} + L_{21}^{[3]}(z - (h_2 + h_3)) \operatorname{sh}(2k(z - (h_2 + h_3))) e^{2i\theta} + \\
 &+ L_{30}^{[3]} \operatorname{ch}(3k(z - (h_2 + h_3))) e^{3i\theta} + cc
 \end{aligned}$$

У задачу третього наближення (2.20) підставляємо отримані розв'язки (2.21) першого наближення та розв'язки другої лінійної задачі (2.29), (2.35), (2.37) та (2.38). Із перших трьох рівнянь (2.20) отримуємо вирази для таких коефіцієнтів:

З 1 рівняння:

$$\begin{aligned}
 F_{21}^{[3]} &= -iF_{20,x_1}^{[2]}, \quad F_{12}^{[3]} = -\frac{1}{2}iF_{11,x_1}^{[2]}, \\
 F_{11}^{[3]} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{k} (iK_1 A_{,x_1 x_1} - 2K_1 A_{,x_2} k + 2iF_{10,x_1}^{[2]} k - iF_{11,x_1}^{[2]})
 \end{aligned}$$

З 2 рівняння:

$$\begin{aligned}
 N_{12}^{[3]} &= \frac{1}{2}iN_{11,x_1}^{[2]}, \quad N_{21}^{[3]} = iN_{20,x_1}^{[2]}, \\
 N_{11}^{[3]} &= \frac{1}{4} \frac{1}{k} \left((-2K_2 - 2e^{-kh_2} K_3) k A_{,x_2} + iA_{,x_1 x_1} (K_2 + e^{-kh_2} K_3) + 4iN_{10,x_1}^{[2]} k + 2iN_{11,x_1}^{[2]} \right)
 \end{aligned}$$

$$M_{21}^{[3]} = -iM_{20,x_1}^{[2]}, \quad M_{12}^{[3]} = -\frac{1}{2}iM_{11,x_1}^{[2]},$$

$$M_{11}^{[3]} = -\frac{1}{4} \frac{1}{ke^{-kh_2}} \left((-2A_{,x_2} kK_2 + iA_{,x_1x_1} K_2 + 4iM_{10,x_1}^{[2]} k - 2iM_{11,x_1}^{[2]}) e^{-kh_2} - \right. \\ \left. -2A_{,x_2} kK_3 + iA_{,x_1x_1} K_3 \right)$$

З 3 рівняння:

$$L_{12}^{[3]} = -\frac{1}{2}iL_{11,x_1}^{[2]}, \quad L_{21}^{[3]} = -iL_{20,x_1}^{[2]},$$

$$L_{11}^{[3]} = -\frac{1}{2} \frac{\left(iK_4 A_{,x_1x_1} - 2K_4 A_{,x_2} k + 2iL_{10,x_1}^{[2]} k - iL_{11,x_1}^{[2]} \right)}{k} \quad (2.40)$$

Отримані коефіцієнти (2.40), розв'язки першого наближення (2.21) та розв'язки другого наближення (2.29), (2.35), (2.37), (2.38) підставляємо у задачу третього наближення (2.20). Підстановка та аналітичні перетворення виконувалися за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple.

В результаті прирівнювання правих та лівих частин рівностей при $e^{i\theta}$, отримується система рівнянь відносно коефіцієнтів: $C_1^{[3]}, B_1^{[3]}, M_{10}^{[3]}, N_{10}^{[3]}, F_{10}^{[3]}, L_{10}^{[3]}$. Умова існування нетривіальних розв'язків утвореної системи має вигляд:

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 & -\text{sh}(kh_1)k & 0 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 & ke^{kh_2} & -ke^{-kh_2} & 0 \\ m_3 & -i\omega & 0 & k & -k & 0 \\ m_4 & -i\omega & 0 & 0 & 0 & \text{sh}(kh_3)k \\ m_5 & 0 & -i\text{ch}(kh_1)\omega ie^{kh_2}\omega\rho_2 ie^{-kh_2}\omega\rho_2 & 0 & 0 & 0 \\ m_6 T_2 k^2 + \rho_2 - \rho_3 & 0 & -i\omega\rho_2 & -i\omega\rho_2 & i\text{ch}(kh_3)\omega\rho_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.41)$$

де $m_1 - m_6$ виражаються через розв'язки та коефіцієнти попередніх наближень та коефіцієнти (2.40) наступним чином:

$$m_1 = \left((2k^2(2\text{ch}^2(kh_1) - 1))F_{20}^{[2]} + \frac{1}{2}iK_1 k^2(3\text{sh}(kh_1)kA^2 + 2\text{ch}(kh_1)B_2^{[2]}) \right) \bar{A} - \\ -A_{,t_2} - B_{1,t_1}^{[2]} + iK_1 \text{ch}(kh_1)k^2(B_0^{[2]} + \bar{B}_0^{[2]})A + (F_{11}^{[3]}k + 2F_{12}^{[3]})\text{ch}(kh_1)h_1 + \\ +(F_{12}^{[3]}h_1^2 k + F_{11}^{[3]})\text{sh}(kh_1)$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= \left(2k^2 N_{20}^{[2]} e^{2kh_2} + 2k^2 M_{20}^{[2]} e^{-2kh_2} + ik^2 B_2^{[2]} (K_2 \text{ch}(kh_2) + K_3) - \frac{3}{2} i K_2 \text{sh}(kh_2) k^3 A^2 \right) \bar{A} - \\
&- A_{,t_2} - B_{1,t_1}^{[2]} + i(K_2 \text{ch}(kh_2) + K_3) (B_0^{[2]} + \bar{B}_0^{[2]}) A k^2 + N_{11}^{[3]} e^{kh_2} + M_{11}^{[3]} e^{-kh_2} \\
m_3 &= \left(\frac{1}{2} k^2 (3i K_5^2 K_3 \text{sh}(kh_2) k A^2 + 2i(K_3 \text{ch}(kh_2) + K_2) C_2^{[2]} + 4K_5 (N_{20}^{[2]} + M_{20}^{[2]})) \right) \bar{A} - \\
&- K_5 A_{,t_2} - C_{1,t_1}^{[2]} + i(K_3 \text{ch}(kh_2) + K_2) A (C_0^{[2]} + \bar{C}_0^{[2]}) k^2 + 2N_{12}^{[3]} h_2 + N_{11}^{[3]} - \\
&- (N_{12}^{[3]} h_2^2 + N_{11}^{[3]} h_2) k + 2M_{12}^{[3]} h_2 + M_{11}^{[3]} + (M_{12}^{[3]} h_2^2 + M_{11}^{[3]} h_2) k \\
m_4 &= \left(-\frac{1}{2} i (K_4 (3K_5^2 \text{sh}(kh_3) A^2 k - 2 \text{ch}(kh_3) C_2^{[2]}) + 4i K_5 L_{20}^{[2]} (2 \text{ch}^2(kh_3) - 1)) k^2 \right) \bar{A} - \\
&- K_5 A_{,t_2} - C_{1,t_1}^{[2]} + i K_4 \text{ch}(kh_3) k^2 A (C_0^{[2]} + \bar{C}_0^{[2]}) - L_{11}^{[3]} \text{sh}(kh_3) - L_{11}^{[3]} h_3 \text{ch}(kh_3) k - \\
&- 2L_{12}^{[3]} h_3 \text{ch}(kh_3) - L_{12}^{[3]} h_3^2 \text{sh}(kh_3) k \\
m_5 &= \left(-\frac{3}{2} K_1 \text{ch}(kh_1) k^2 \omega - 4K_1^2 \text{sh}(kh_1) \text{ch}(kh_1) k^3 + \frac{3}{2} T_1 k^4 + \frac{1}{2} \rho_2 \omega k^2 (3K_2 \text{ch}(kh_2) + \right. \\
&+ 3K_3) + K_2 \text{sh}(kh_2) k^3 \rho_2 (-K_2 \text{ch}(kh_2) - K_3) - K_2 \text{sh}(kh_2) k^3 \rho_2 (3K_2 \text{ch}(kh_2) + 3K_3) A^2 + \\
&+ 2i \text{ch}(kh_1) (4K_1 \text{ch}^2(kh_1) k - 3K_1 k + 4\omega \text{sh}(kh_1)) k F_{20}^{[2]} - 2i \rho_2 k e^{2kh_2} (K_2 \text{sh}(kh_2) k + \\
&+ K_2 \text{ch}(kh_2) k + K_3 k - 2\omega) N_{20}^{[2]} + 2i \rho_2 k e^{-2kh_2} (K_2 \text{sh}(kh_2) k - K_2 \text{ch}(kh_2) k - K_3 k - \\
&- 2\omega) M_{20}^{[2]} - k\omega (K_2 \text{sh}(kh_2) \rho_2 + K_1 \text{sh}(kh_1)) B_2^{[2]} \bar{A} - Ak\omega (B_0^{[2]} + \bar{B}_0^{[2]}) (K_2 \text{sh}(kh_2) \rho_2 + \\
&+ K_1 \text{sh}(kh_1)) + (i \rho_2 (K_2 \text{ch}(kh_2) + K_3) - i K_1 \text{ch}(kh_1)) A_{,t_2} + 2iT_1 k (B_{1,x_1}^{[2]} + A_{,x_2}) + \\
&+ \rho_2 (N_{10,t_1}^{[2]} e^{kh_2} + M_{10,t_1}^{[2]} e^{-kh_2}) - F_{11,t_1}^{[2]} h_1 \text{sh}(kh_1) + T_1 A_{,x_1 x_1} - F_{10,t_1}^{[2]} \text{ch}(kh_1) + \\
&+ i F_{12}^{[3]} h_1^2 \text{ch}(kh_1) \omega + i F_{11}^{[3]} h_1 \text{sh}(kh_1) \omega \\
m_6 &= \left(-\frac{1}{2} K_5 k^2 (8K_3 \text{sh}(kh_2) k \rho_2 (K_3 \text{ch}(kh_2) + K_2) + K_4 \text{ch}(kh_3) \rho_3 (8k \text{sh}(kh_3) K_4 - \right. \\
&- 3\omega K_5) + 3K_5 (K_3 \text{ch}(kh_2) \omega \rho_2 - K_5 T_2 k^2 + K_2 \omega \rho_2)) A^2 - k\omega (K_3 \text{sh}(kh_2) \rho_2 + \\
&+ K_4 \text{sh}(kh_3) \rho_3) C_2^{[2]} + (-2i \text{ch}(kh_3) (4K_4 \text{ch}^2(kh_3) k - 4K_5 \omega \text{sh}(kh_3) - 3K_4 k) k \rho_3) L_{20}^{[2]} + \\
&+ 2i \rho_2 k (K_3 \text{sh}(kh_2) k + K_3 \text{ch}(kh_2) k + K_2 k + 2\omega K_5) M_{20}^{[2]} + 2i \rho_2 k (-K_3 \text{sh}(kh_2) k + \\
&+ K_3 \text{ch}(kh_2) k + K_2 k - 2\omega K_5) N_{20}^{[2]} \bar{A} - k\omega (C_0^{[2]} + \bar{C}_0^{[2]}) (K_3 \text{sh}(kh_2) \rho_2 + \\
&+ K_4 \text{sh}(kh_3) \rho_3) A + (i K_4 \text{ch}(kh_3) \rho_3 - i \rho_2 (K_3 \text{ch}(kh_2) + K_2)) A_{,t_2} + K_5 T_2 A_{,x_1 x_1} - \\
&- \rho_2 ((N_{11,t_1}^{[2]} + M_{11,t_1}^{[2]}) h_2 + N_{10,t_1}^{[2]} + M_{10,t_1}^{[2]}) + \rho_3 (L_{11,t_1}^{[2]} \text{sh}(kh_3) h_3 + L_{10,t_1}^{[2]} \text{ch}(kh_3)) + \\
&+ 2iT_2 k (K_5 A_{,x_2} + C_{1,x_1}^{[2]}) + \rho_2 i \omega (h_2 ((M_{12}^{[3]} + N_{12}^{[3]}) h_2 + M_{11}^{[3]} + N_{11}^{[3]})) - i \rho_3 h_3 \omega (\text{ch}(kh_3) \cdot \\
&\cdot L_{12}^{[3]} h_3 + \text{sh}(kh_3) L_{11}^{[3]})
\end{aligned}$$

(2.42)

Загальний вигляд умови (2.41):

$$W_1 A_{,t_2} + W_2 A_{,x_2} + W_3 A_{,x_1 x_1} + W_4 A^2 \bar{A} = 0, \quad (2.43)$$

Оскільки коефіцієнти $W_i(k, \rho_2, \rho_3, \omega, h_1, h_2, h_3, T_1, T_2)$ ($i = \overline{1,4}$) мають досить громіздкий вигляд, їх отримано за допомогою пакету символьних обчислень Maple. Програмний код для перевірки умови існування нетривіальних розв'язків для третього наближення наведено в додатку В.

2.5. Еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на нижній та верхній поверхнях контакту

Продиференціюємо умову (2.33) по k . Таким чином, умова існування нетривіальних розв'язків (2.33) у спрощеному вигляді запишеться так:

$$A_{,t_1} + \omega' A_{,x_1} = 0. \quad (2.44)$$

де $\omega' = d\omega/dk$ – групова швидкість.

Умова існування нетривіальних розв'язків другого наближення перевірена за допомогою математичного пакету Maple через громіздкість обчислень.

Аналогічним чином отримуємо спрощений вигляд умови існування нетривіальних розв'язків задачі третього наближення (2.43), знайшовши вираз для $\omega'' = d^2\omega/dk^2$:

$$A_{,t_2} + \omega' A_{,x_2} - 0.5\omega'' A_{,x_1 x_1} = iLA^2 \bar{A}. \quad (2.45)$$

Враховуючи частинні похідні:

$$\begin{cases} A_{,t} = \alpha A_{,t_1} + \alpha^2 A_{,t_2} + O(\alpha^3), \\ A_{,x} = \alpha A_{,x_1} + \alpha^2 A_{,x_2} + O(\alpha^3), \\ A_{,xx} = \alpha^2 A_{,x_1 x_1} + O(\alpha^3), \end{cases} \quad (2.46)$$

Внесок членів порядку α^n у загальне значення похідних $A_{,t}$ та $A_{,x}$ визначається похідними $A_{,t_n}$ та $A_{,x_n}$.

Помножимо умови (2.44) та (2.45) на α та α^2 відповідно. Додавши отримані вирази, отримаємо еволюційне рівняння обвідної для нижньої поверхні контакту:

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - 0.5\omega'' A_{,xx} = i\alpha^2 L A^2 \bar{A}, \quad (2.47)$$

де A – обвідна хвильових пакетів на нижній поверхні контакту. \bar{A} – комплексно спряжена до A . $\omega'' = d^2\omega/dk^2$ – групова швидкість.

$$\text{Враховуючи, що } B = K_5 A \quad (2.48)$$

отримуємо еволюційне рівняння для верхньої поверхні контакту:

$$B_{,t} + \omega' B_{,x} - 0.5\omega'' B_{,xx} = i\alpha^2 \frac{L}{K_5^2} B^2 \bar{B} \quad (2.49)$$

Аналогічно до задач, які досліджувалися раніше, еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів також отримано у формі нелінійного рівняння Шредінгера другого порядку.

2.6 Умова модуляційної стійкості

Перейшовши до системи, яка рухається з груповою швидкістю, замінивши $t = \zeta$ та $\xi = x - \omega' t$, перепишемо еволюційне рівняння (2.47) у вигляді:

$$A_{,\zeta} - 0.5i\omega'' A_{,\xi\xi} = i\alpha^2 L A^2 \bar{A}, \quad (2.50)$$

де $\omega'' = d^2\omega/dk^2$.

Дане рівняння має розв'язок:

$$A = a e^{i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} L \zeta}, \quad \bar{A} = a e^{-i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} L \zeta} \quad (2.51)$$

де a – стала. Отриманий розв'язок залежить лише від часу.

Згідно з [9], [77], [85] та пункту 1.3. умови модуляційної стійкості на нижній та верхній поверхнях відповідно мають такий вигляд:

$$L\omega'' < 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{L}{K_5^2} \omega'' < 0 \quad (2.53)$$

Оскільки коефіцієнт K_5^2 є невід'ємним виразом, що залежить від параметрів $(h_1, h_2, h_3, k, \rho_2, \rho_3, T_1, T_2)$, тому він не впливає на зміну знака в нерівностях (2.52) – (2.53). Отже, для дослідження модуляційної стійкості можна обмежитися лише дослідженням нерівності (2.52).

У нерівностях (2.52)-(2.53) коефіцієнт L розраховується наступним чином:

$$L = \frac{l_1 d_1 + l_2 d_2 + l_3 d_3 + l_4 d_4 + l_5 d_5 + l_6 d_6}{iS} \quad \text{при } A = 1, \bar{A} = 1 \quad (2.54)$$

де

$$\begin{aligned} d_1 &= ((ik^2 \omega((T_2 k^3 + \omega^2 \rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3)) \text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3) \omega^2 \rho_3)) e^{-kh_2} + \\ &+ (-ik^2 \omega((T_2 k^3 - \omega^2 \rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3)) \text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3) \omega^2 \rho_3)) e^{kh_2}) \text{ch}(kh_1) \\ d_2 &= ((-i((T_2 k^3 + \omega^2 \rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3)) \text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3) \omega^2 \rho_3) \omega \rho_2 k^2) e^{-kh_2} + \\ &+ (-i((T_2 k^3 - \omega^2 \rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3)) \text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3) \omega^2 \rho_3) \omega \rho_2 k^2) e^{kh_2}) \text{sh}(kh_1) \\ d_3 &= 2i \text{sh}(kh_1) k^2 \omega \rho_2 ((T_2 k^3 + k(\rho_2 - \rho_3)) \text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3) \omega^2 \rho_3) \\ d_4 &= 2i \omega^3 \text{sh}(kh_1) k^2 \rho_2 \rho_3 \text{ch}(kh_3) \\ d_5 &= ((-k^3 ((T_2 k^3 + \omega^2 \rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3)) \text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3) \omega^2 \rho_3)) e^{-kh_2} + \\ &+ (k^3 ((T_2 k^3 - \omega^2 \rho_2 + k(\rho_2 - \rho_3)) \text{sh}(kh_3) - \text{ch}(kh_3) \omega^2 \rho_3)) e^{kh_2}) \text{sh}(kh_1) \\ d_6 &= -2\omega^2 \text{sh}(kh_1) k^3 \text{sh}(kh_3) \rho_2 \\ l_1 &= ((2k^2 (2\text{ch}^2(kh_1) - 1)) F_{20}^{[2]} + \frac{1}{2} i K_1 k^2 (3\text{sh}(kh_1) k A^2 + 2\text{ch}(kh_1) B_2^{[2]})) \bar{A} + \\ &+ i K_1 \text{ch}(kh_1) k^2 (B_0^{[2]} + \bar{B}_0^{[2]}) A \\ l_2 &= (2k^2 N_{20}^{[2]} e^{2kh_2} + 2k^2 M_{20}^{[2]} e^{-2kh_2} + ik^2 B_2^{[2]} (K_2 \text{ch}(kh_2) + K_3) - \\ &- \frac{3}{2} i K_2 \text{sh}(kh_2) k^3 A^2) \bar{A} + i (K_2 \text{ch}(kh_2) + K_3) (B_0^{[2]} + \bar{B}_0^{[2]}) A k^2 \\ l_3 &= (\frac{1}{2} k^2 (3i K_5^2 K_3 \text{sh}(kh_2) k A^2 + 2i (K_3 \text{ch}(kh_2) + K_2) C_2^{[2]} + 4K_5 (N_{20}^{[2]} + \\ &+ M_{20}^{[2]})) \bar{A} + i (K_3 \text{ch}(kh_2) + K_2) A (C_0^{[2]} + \bar{C}_0^{[2]}) k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_4 &= \left(-\frac{1}{2}i(K_4(3K_5^2\text{sh}(kh_3)A^2k - 2\text{ch}(kh_3)C_2^{[2]}) + 4iK_5L_{20}^{[2]}(2\text{ch}^2(kh_3) - 1))k^2\right)\bar{A} + \\
&+ iK_4\text{ch}(kh_3)k^2A(C_0^{[2]} + \bar{C}_0^{[2]}) \\
l_5 &= \left(\left(-\frac{3}{2}K_1\text{ch}(kh_1)k^2\omega - 4K_1^2\text{sh}(kh_1)\text{ch}(kh_1)k^3 + \frac{3}{2}T_1k^4 + \frac{1}{2}\rho_2\omega k^2(3K_2\text{ch}(kh_2) + \right.\right. \\
&+ 3K_3) + K_2\text{sh}(kh_2)k^3\rho_2(-K_2\text{ch}(kh_2) - K_3) - K_2\text{sh}(kh_2)k^3\rho_2(3K_2\text{ch}(kh_2) + \\
&+ 3K_3))A^2 + 2i\text{ch}(kh_1)(4K_1\text{ch}^2(kh_1)k - 3K_1k + 4\omega\text{sh}(kh_1))kF_{20}^{[2]} - \\
&- 2i\rho_2ke^{2kh_2}(K_2\text{sh}(kh_2)k + K_2\text{ch}(kh_2)k + K_3k - 2\omega)N_{20}^{[2]} + 2i\rho_2ke^{-2kh_2}(K_2\text{sh}(kh_2)k - \\
&- K_2\text{ch}(kh_2)k - K_3k - 2\omega)M_{20}^{[2]} - k\omega(K_2\text{sh}(kh_2)\rho_2 + K_1\text{sh}(kh_1))B_2^{[2]}\right)\bar{A} - \\
&- Ak\omega(B_0^{[2]} + \bar{B}_0^{[2]})(K_2\text{sh}(kh_2)\rho_2 + K_1\text{sh}(kh_1)) \\
l_6 &= \left(\left(-\frac{1}{2}K_5k^2(8K_3\text{sh}(kh_2)k\rho_2(K_3\text{ch}(kh_2) + K_2) + K_4\text{ch}(kh_3)\rho_3(8k\text{sh}(kh_3)K_4 - \right.\right. \\
&- 3\omega K_5) + 3K_5(K_3\text{ch}(kh_2)\omega\rho_2 - K_5T_2k^2 + K_2\omega\rho_2))A^2 - k\omega(K_3\text{sh}(kh_2)\rho_2 + \\
&+ K_4\text{sh}(kh_3)\rho_3)C_2^{[2]} + (-2i\text{ch}(kh_3)(4K_4\text{ch}^2(kh_3)k - 4K_5\omega\text{sh}(kh_3) - 3K_4k)k\rho_3)L_{20}^{[2]} + \\
&+ 2i\rho_2k(K_3\text{sh}(kh_2)k + K_3\text{ch}(kh_2)k + K_2k + 2\omega K_5)M_{20}^{[2]} + 2i\rho_2k(-K_3\text{sh}(kh_2)k + \\
&+ K_3\text{ch}(kh_2)k + K_2k - 2\omega K_5)N_{20}^{[2]}\right)\bar{A} - k\omega(C_0^{[2]} + \bar{C}_0^{[2]})(K_3\text{sh}(kh_2)\rho_2 + \\
&+ K_4\text{sh}(kh_3)\rho_3)A \\
S &= -d_1 - d_2 - K_5d_3 - K_5d_4 + [-iK_1\text{ch}(kh_1) + i\rho_2(K_2\text{ch}(kh_2) + K_3)]d_5 + \\
&+ [-i\rho_2(K_3\text{ch}(kh_2) + K_2) + iK_4\text{ch}(kh_3)\rho_3]d_6
\end{aligned}$$

Вирази (2.54) для коефіцієнта L отримано за допомогою пакету символічних обчислень Maple.

2.7. Теоретичні результати другого розділу

У другому розділі виконано математичну постановку слабконелінійної задачі поширення та взаємодії хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою». Отримано постановку задачі в безрозмірному вигляді.

З використанням методу багатомасштабних розвинень отримано перші три лінійні задачі. Для задачі першого наближення виведено дисперсійне рівняння першого порядку та отримано дві пари коренів. Дані розв'язки виникли вперше серед задач такого класу. Встановлено зв'язок між

амплітудами поверхонь контакту. Наявність додаткової пари коренів пояснюється існуванням двох поверхонь контакту, вздовж яких поширюються внутрішні хвилі.

Отримано розв'язки задач другого та третього наближень. Шляхом виключення секулярних членів виведено відповідні умови існування нетривіальних розв'язків для другого та третього наближень.

Виведено еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на нижній та верхній поверхнях контакту у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера на основі дисперсійного співвідношення та умов існування нетривіальних розв'язків другого та третього наближень. На основі еволюційних рівнянь для обох поверхонь контакту отримано умови модуляційної стійкості.

РОЗДІЛ 3.

АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ ТА ВЗАЄМОДІЇ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ТРИШАРОВІЙ РІДИНІ

Даний розділ містить аналіз отриманих аналітичних результатів розділу 2 в залежності від різних фізичних параметрів системи «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою». Досліджено розв'язки задачі та умови проходження хвиль для перших двох наближень. Здійснено аналіз модуляційної стійкості для поверхонь контакту та побудовано графіки меж модуляційної стійкості. Отримано рівняння, якими визначається форма хвильових пакетів на нижній та верхній поверхнях контакту. Наведено та проаналізовано області знакосталості коефіцієнтів при других гармоніках на верхній та нижній поверхнях контакту для обох пар частот. Графічно проілюстровано та досліджено різні випадки асиметрії форми хвильових пакетів для обох поверхонь контакту. Досліджено явище резонансу других гармонік, на основі якого зроблено аналіз застосовності методу багатомасштабних розвинень для досліджуваної моделі. Досліджено потік енергії, яку переносять внутрішні прогресивні хвилі в першому наближенні. Отримані результати опубліковано в статтях [50, 80, 81, 82, 87].

3.1. Аналіз розв'язків задачі першого наближення та дослідження умов проходження хвиль в залежності від зміни фізичних параметрів

Проведемо аналіз модулів відношень амплітуд відхилень нижньої та верхньої поверхонь контакту $\eta_{11}(x,t)$ та $\eta_{21}(x,t)$, що відповідають ω_1^2 та ω_2^2 для першої лінійної задачі.

Відповідні модулі відношень позначено наступним чином:

$$a_1 = \left| \frac{\text{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_1^2 \text{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_1^2 \text{cth}(kh_2))}{\rho_2 \omega_1^2} \right|,$$

$$a_2 = \left| \frac{\rho_2 \omega_2^2}{\text{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_2^2 \text{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_2^2 \text{cth}(kh_2))} \right| \quad (3.1)$$

Тут a_1 та a_2 характеризують внесок хвилі з частотою ω_1 та ω_2 відповідно у хвильовий рух на поверхнях контакту. Корені ω_1 та ω_2 задаються формулами (2.24).

Графіки залежності відношень амплітуд a_1 та a_2 від різних фізичних параметрів отримано в системі Maple.

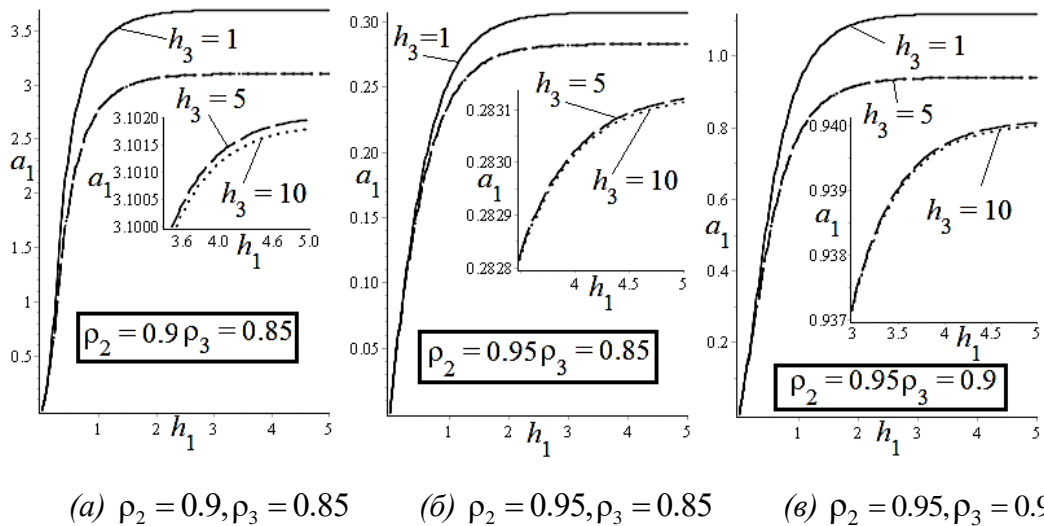


Рис. 3.1. Залежність відношення амплітуд a_1 від товщини нижнього шару

На рис. 3.1. представлено графіки залежності відношення амплітуд a_1 від товщини нижнього шару h_1 при різних значеннях h_3 та фіксованих параметрів густин середнього та верхнього шарів. Інші параметри набувають таких значень: $T_1 = 0, T_2 = 0, h_2 = 1, k = 1$.

Із графіків видно, що для всіх трьох випадків для кожного значення h_3 існують граничні значення, до яких наближається абсолютна величина a_1 . Причому зі збільшенням товщини верхнього шару граничне значення зменшується. Чим більше значення товщини верхнього шару, тим повільніше зменшується граничне значення.

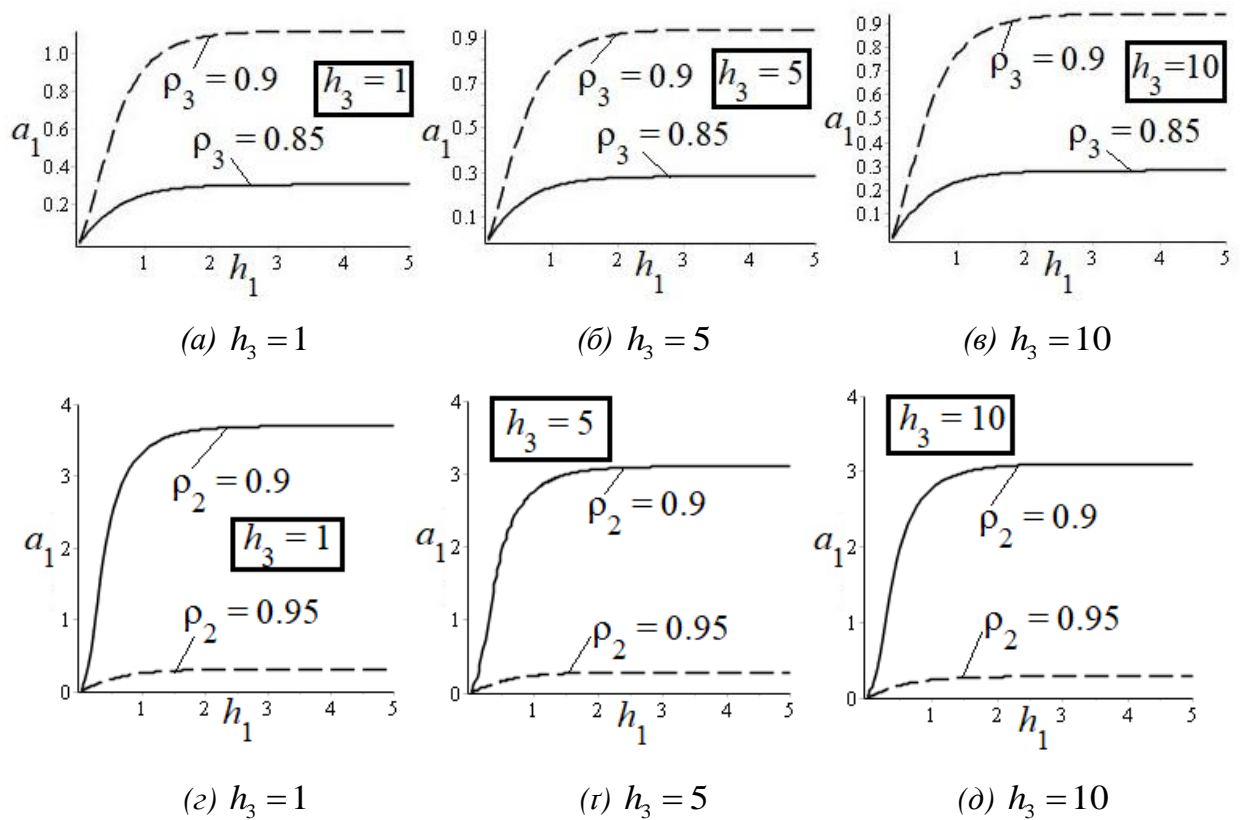
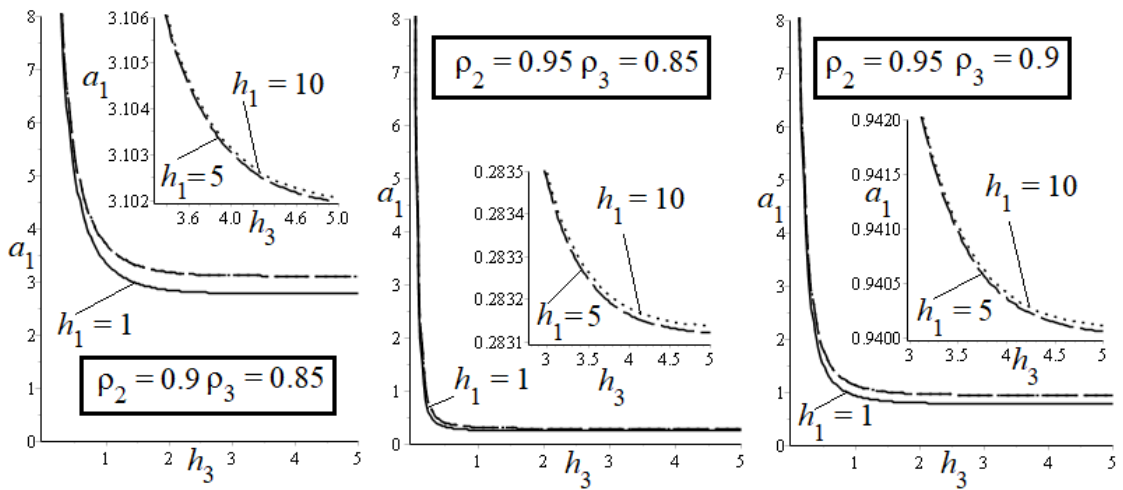


Рис. 3.2. Залежність відношення амплітуд a_1 від товщини нижнього шару при фіксованому значенні товщини верхнього шару

На рис. 3.2. представлено графіки залежності відношення a_1 від товщини нижнього шару при різних значеннях густин ρ_3 рис. 3.2. *a-в* та ρ_2 рис. 3.2. *г-д* для різних фіксованих значень h_3 .

При фіксованому значенні $\rho_2 = 0.95$ (рис. 3.2. *a-в*) граничне значення відношення a_1 збільшується зі збільшенням густини верхнього шару. При фіксованому значенні густини $\rho_3 = 0.85$ (рис. 3.2. *г-д*) зі збільшенням густини ρ_2 граничні значення величини a_1 зменшуються. Для всіх випадків (рис. 3.2. *a-г*) графіки відношення a_1 зростають.

Зі збільшенням h_3 граничні значення зменшуються. Для великих значень $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ відповідні граничні значення майже не відрізняються. Отже, в даному випадку вплив зміни густин середнього та верхнього шару на значення величини a_1 більш істотний ніж вплив зміни висоти h_3 .



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$ (б) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$ (e) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

Рис. 3.3. Залежності величини a_1 від товщини верхнього шару

На рис. 3.3. представлені графіки залежності величини a_1 від товщини верхнього шару h_3 для різних значеннях h_1 при фіксованих значеннях густин ρ_2 та ρ_3 . У всіх трьох випадках графіки спадають на всій області визначення, для кожного h_1 існують граничні значення, причому зі збільшенням висоти h_1 граничне значення збільшується. Зміна товщини нижнього шару слабо впливає на зміну граничного значення величини a_1 .

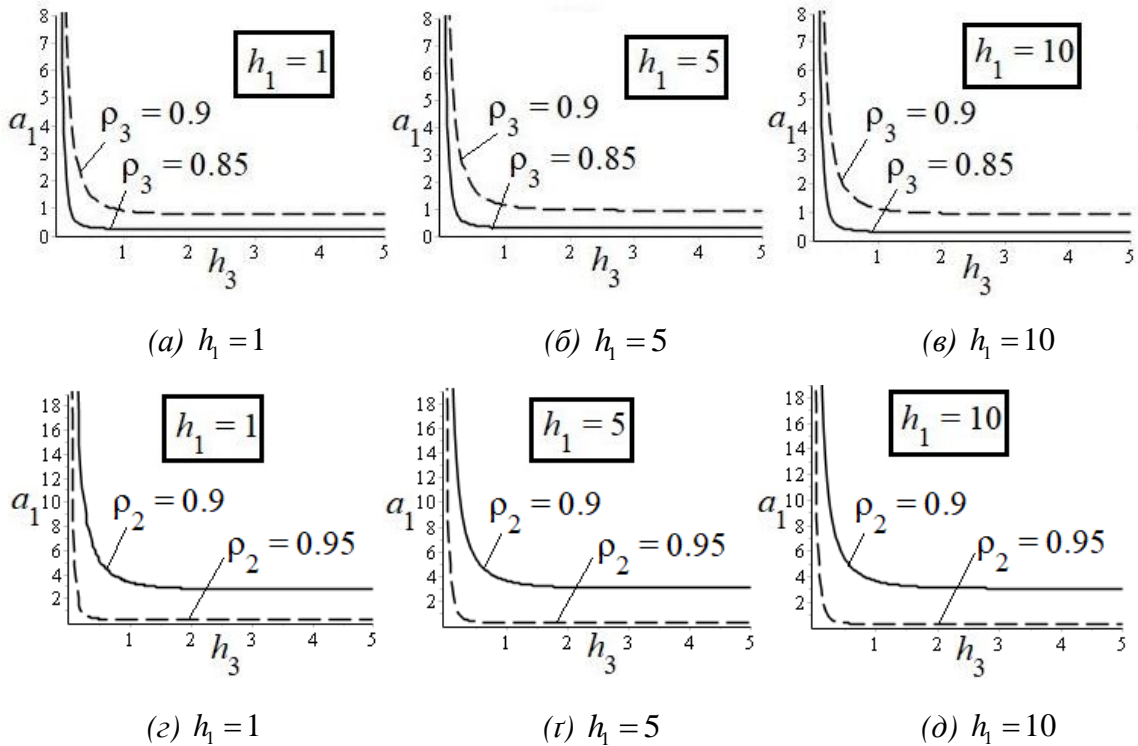


Рис. 3.4. Залежність відношення a_1 від товщини h_3 для фіксованих h_1

На рис. 3.4. наведено графіки залежності відношення a_1 від товщини верхнього шару h_3 для різних значень густини верхнього шару ρ_3 та середнього шару ρ_2 для фіксованих значень $h_1 = 1, 5, 10$. З графіків помітно, що при всіх трьох значеннях h_1 при збільшенні густини верхнього шару (густина середнього шару $\rho_2 = 0.95$) граничне значення a_1 збільшується, при збільшенні густини середнього шару (коли фіксованим є $\rho_3 = 0.85$) граничне значення зменшується. Для великих значень товщини $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ графіки відношення a_1 майже співпадають. Графіки величини a_1 спадають на всій області визначення. Порівняно з випадком 3.2. вплив зміни густин ρ_3 та ρ_2 на зміну граничного значення величини a_1 менший.

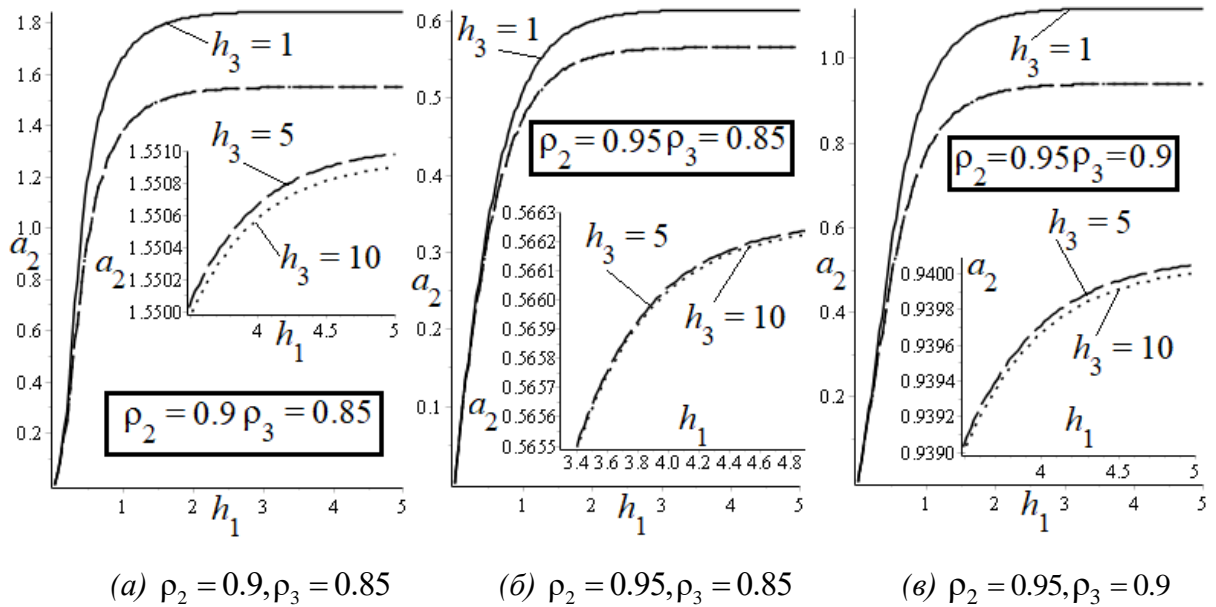


Рис. 3.5. Залежність відношення амплітуд a_2 від товщини нижнього шару

Рис. 3.5. ілюструє залежність абсолютної величини a_2 від товщини нижнього шару h_1 . З графіку помітно, що зі збільшенням товщини верхнього шару h_3 в усіх випадках граничне значення зменшується, причому для $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ граничні значення знаходяться дуже близько один від одного.

При порівнянні випадків 3.1. в та 3.5. в, помітно, що при $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$ графіки величин a_1 та a_2 співпадають.

Рис. 3.6. *a-в* показує залежність величини a_2 від товщини нижнього шару при різних значеннях густини ρ_3 . Зі збільшенням товщини нижнього шару абсолютне значення величини a_2 зростає. Для кожного ρ_3 для відношення a_2 існують граничні значення, більше значення густини верхнього шару відповідає більшому граничному значенню.

На рис. 3.6. *г-д* представлено залежність абсолютного значення a_2 від товщини нижнього шару при різних значеннях густини ρ_2 . Для кожного ρ_2 для відношення a_2 також існують граничні значення. Більше значення густини середнього шару ρ_2 відповідає меншому граничному значенню величини a_2 . Вплив зміни густин середнього та верхнього шарів на зміну значення a_2 більший ніж вплив товщини верхнього шару.

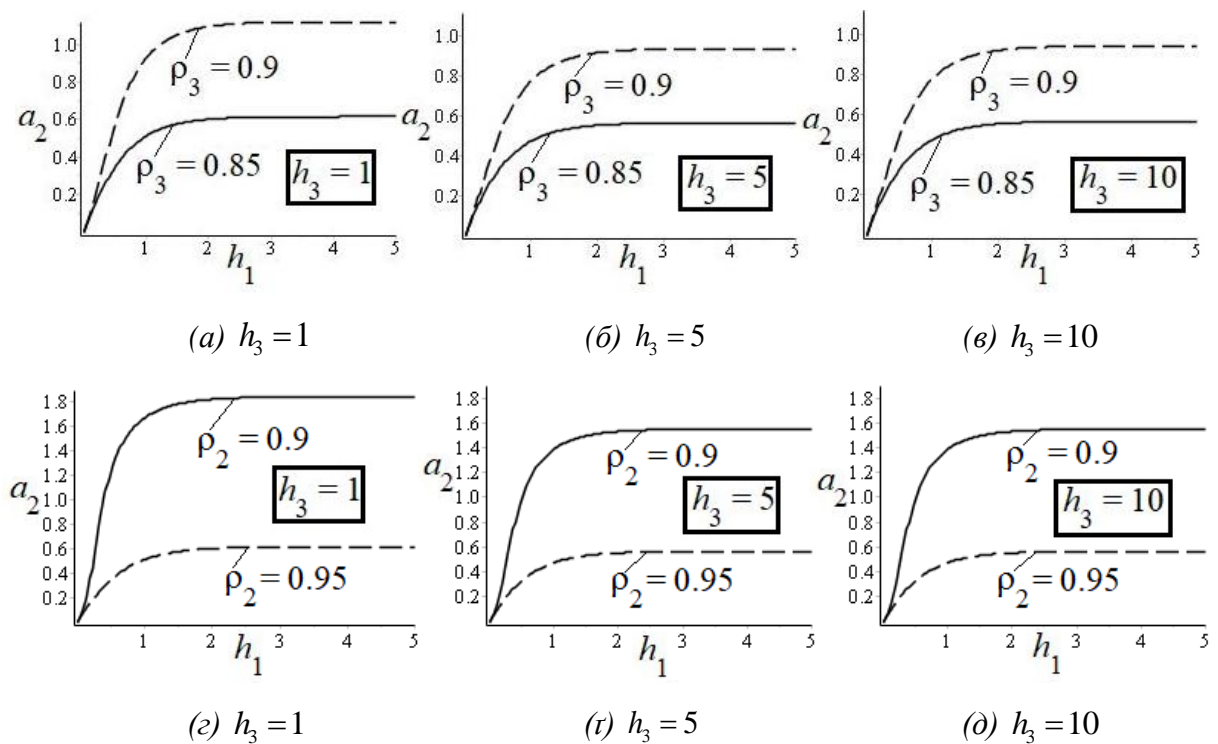
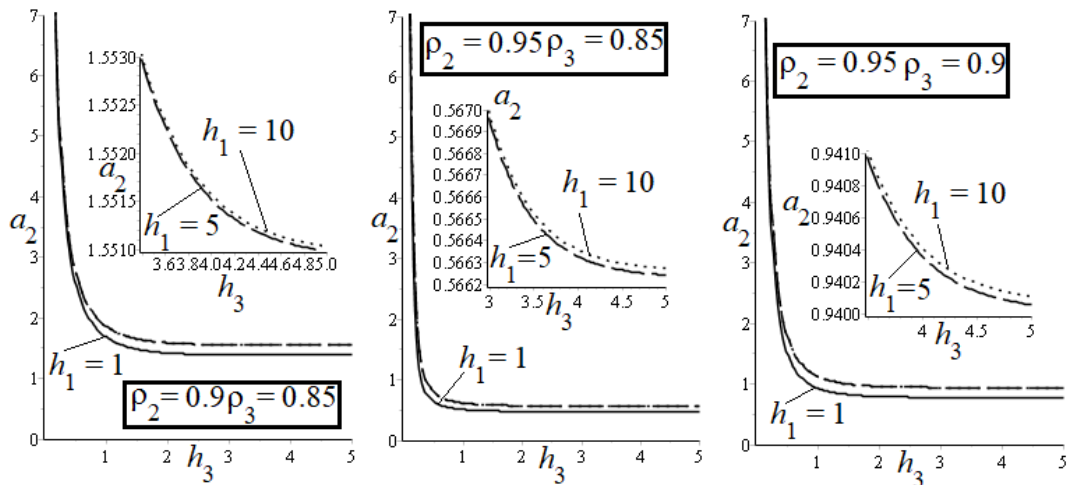


Рис. 3.6. Залежність a_2 від товщини нижнього шару при зміні густин середнього та верхнього шарів

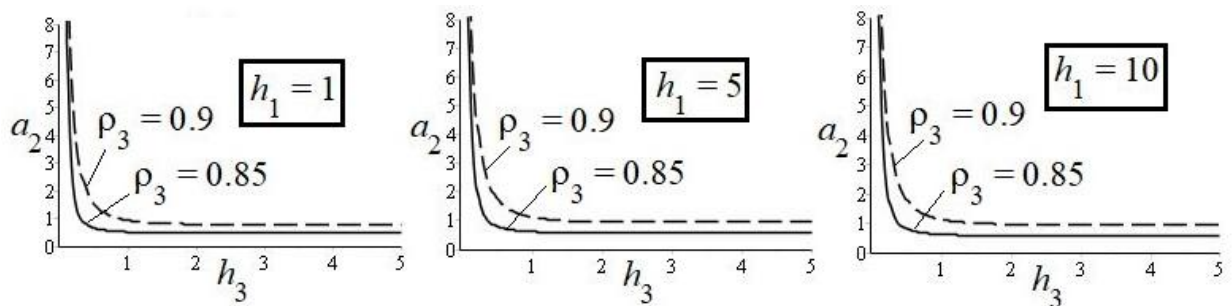


(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$ (б) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$ (e) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

Рис. 3.7. Залежність a_2 від товщини верхнього шару

На рис. 3.7. представлено графіки залежності відношення a_2 від товщини верхнього шару h_3 . Усі графіки абсолютної величини спадають зі збільшенням товщини верхнього шару. Для кожного випадку існують граничні значення, до яких наближаються графіки відношення a_2 . Зі збільшенням товщини h_1 граничні значення збільшуються, проте при великих значеннях $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ графіки відношення a_2 знаходяться дуже близько один від одного.

Рис. 3.8. а-в ілюструють залежність абсолютної величини a_2 від товщини верхнього шару h_3 для різних значень ρ_3 . В усіх випадках графіки спадають до деякого граничного значення, збільшення густини ρ_3 призводить до збільшення граничного значення величини a_2 .



(a) $h_1 = 1$

(б) $h_1 = 5$

(e) $h_1 = 10$

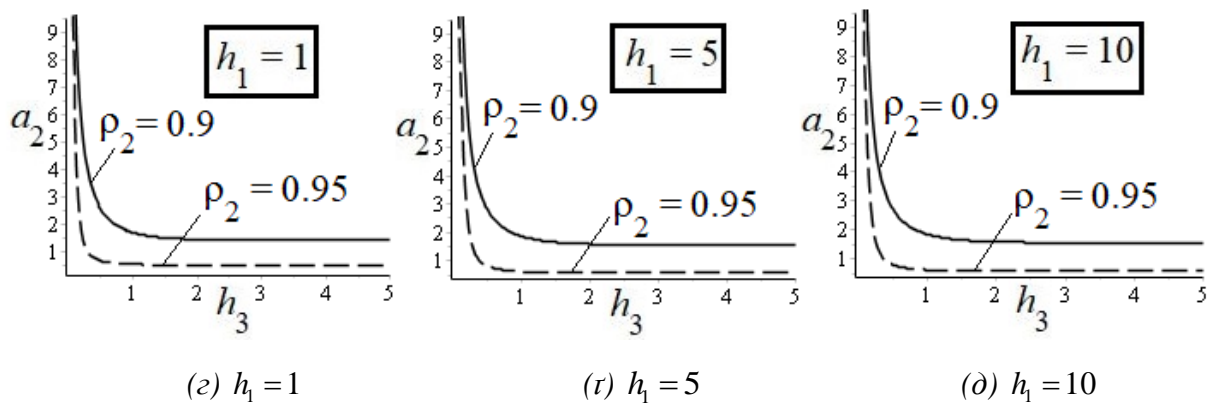
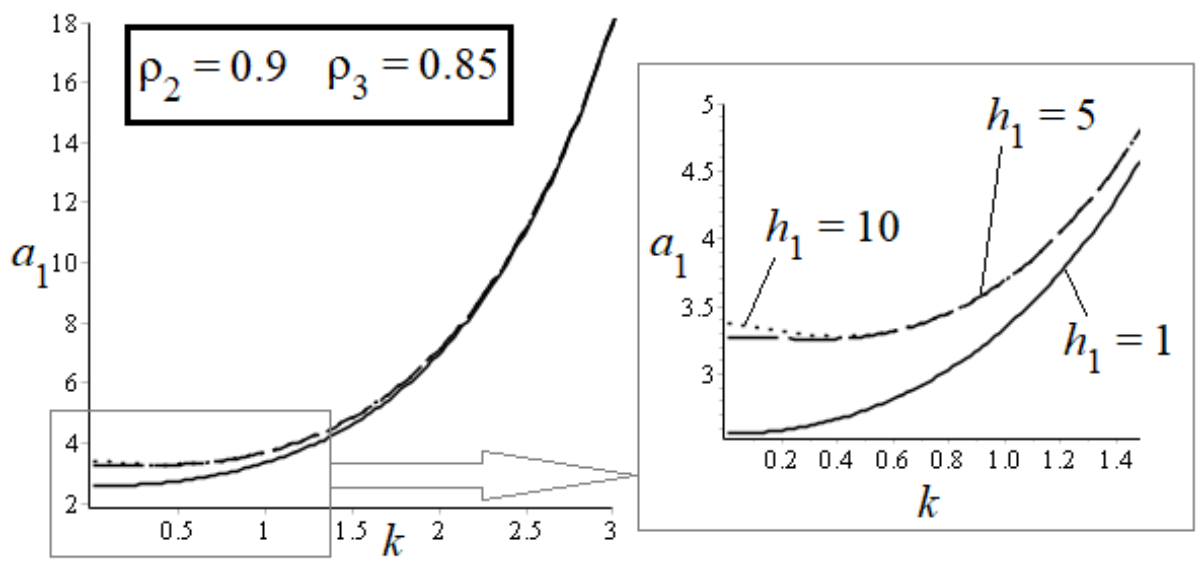


Рис. 3.8. Залежність a_2 від товщини h_3 для різних значень ρ_3 та ρ_2

На рис. 3.8. z-d представлено залежність абсолютної величини a_2 від товщини верхнього шару h_3 для різних значень ρ_2 . Аналогічно до графіків 3.8. a-в збільшення h_3 призводить до зменшення величини a_2 до деякого граничного значення, проте більшому значенню густини середнього шару відповідає менше граничне значення відношення a_2 .

При $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$ (рис. 3.3. в, рис. 3.7. в) має місце рівність абсолютних значень $|a_1| = |a_2|$. Згідно з рис. 3.7. та рис. 3.8. вплив зміни густин середнього та верхнього шарів та товщини нижнього шару на a_2 менший ніж у випадках 3.5. та 3.6.



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$

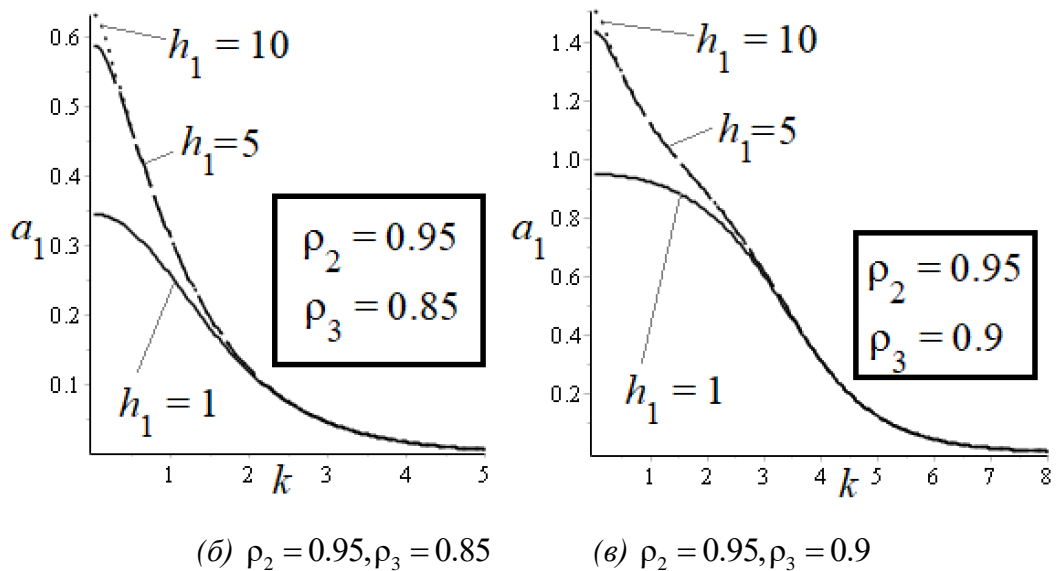


Рис. 3.9. Залежність a_1 від хвильового числа k для різних h_1

На рис.3.9. представлено залежність відношення a_1 від хвильового числа k для різних значень товщини h_1 . У випадку 3.9. а (коли $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$) графіки абсолютної величини a_1 зростають. При малих значеннях k графіки знаходяться дуже близько, далі досить швидко співпадають. Чим більша товщина h_1 , тим більше початкове значення величини a_1 . У випадках 3.9. б-в графіки відношення a_1 спадають. При $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ графіки a_1 співпадають швидше, далі усі три графіка співпадають, наближаючись до граничного значення, близького до нуля.

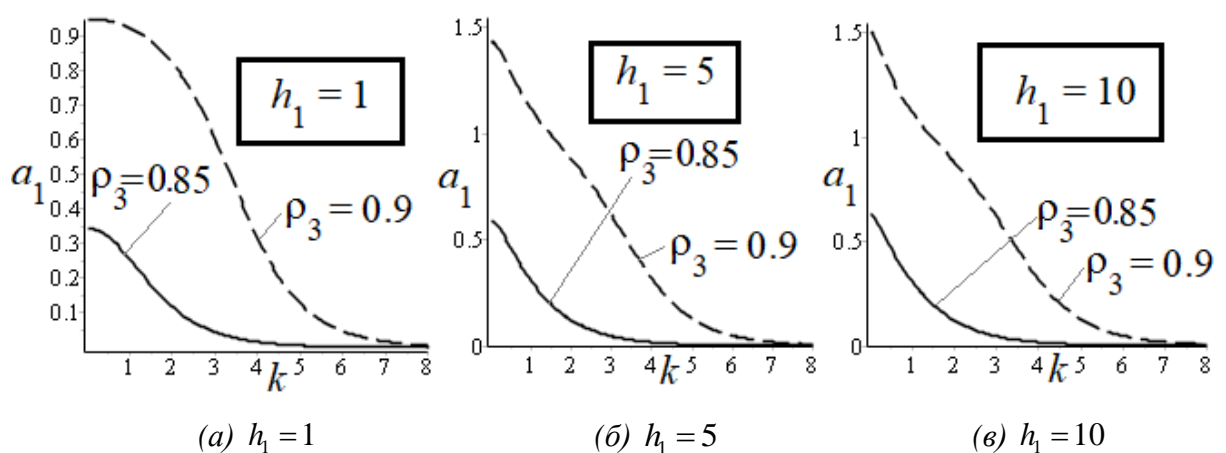
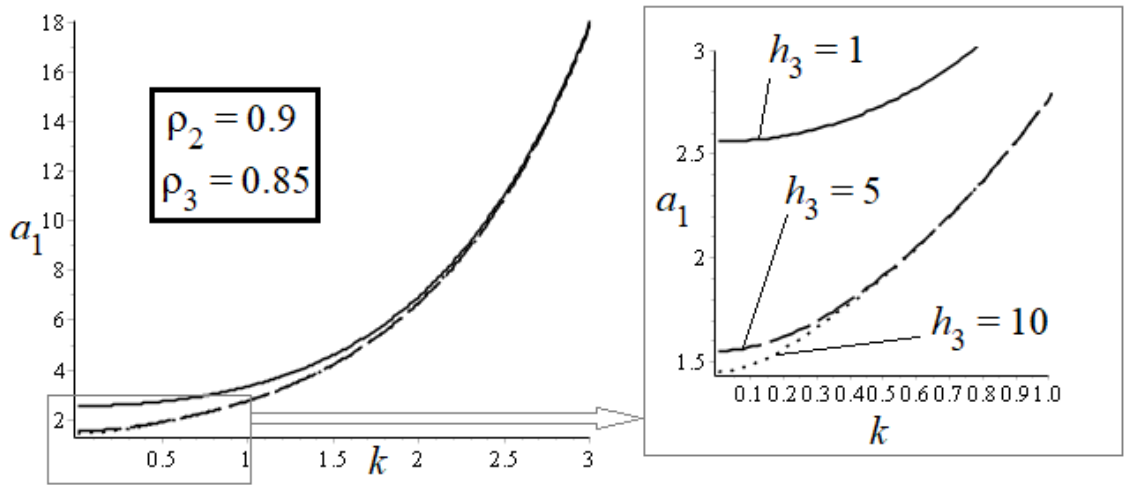


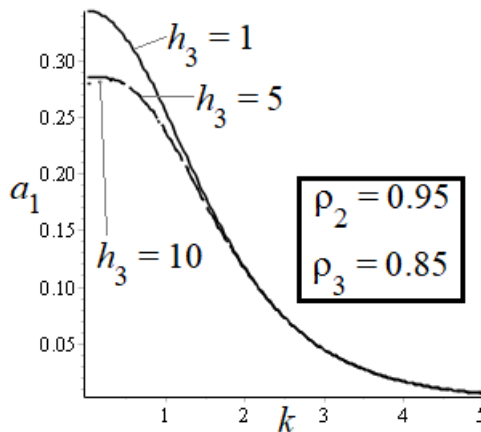
Рис. 3.10. Залежність величини a_1 від k при різних значеннях ρ_3

На рис. 3.10. показана залежність величини a_1 від хвильового числа при різних значеннях густини верхнього шару ρ_3 . У всіх випадках графіки

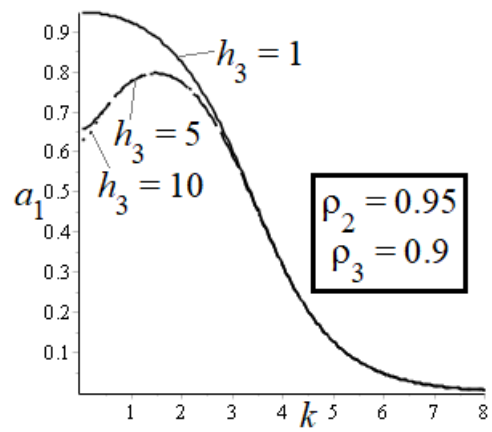
спадають, після деякого значення k співпадають і наближаються до нуля. Чим більша густина верхнього шару, тим більше початкове значення величини a_1 .



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$

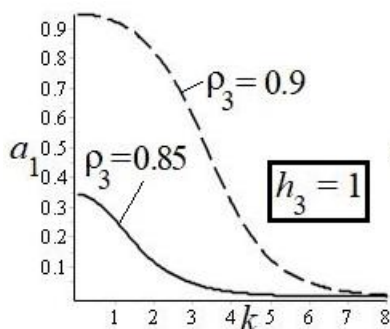


(б) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$

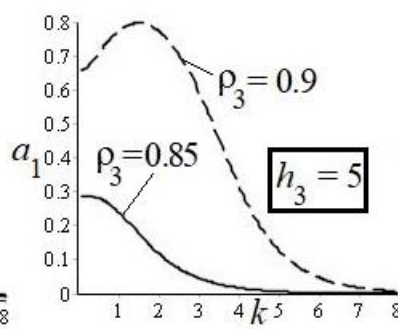


(в) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

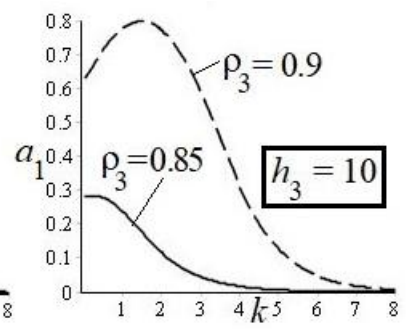
Рис. 3.11. Залежність відношення a_1 від хвильового числа для різних значень h_3



(a) $h_3 = 1$



(б) $h_3 = 5$



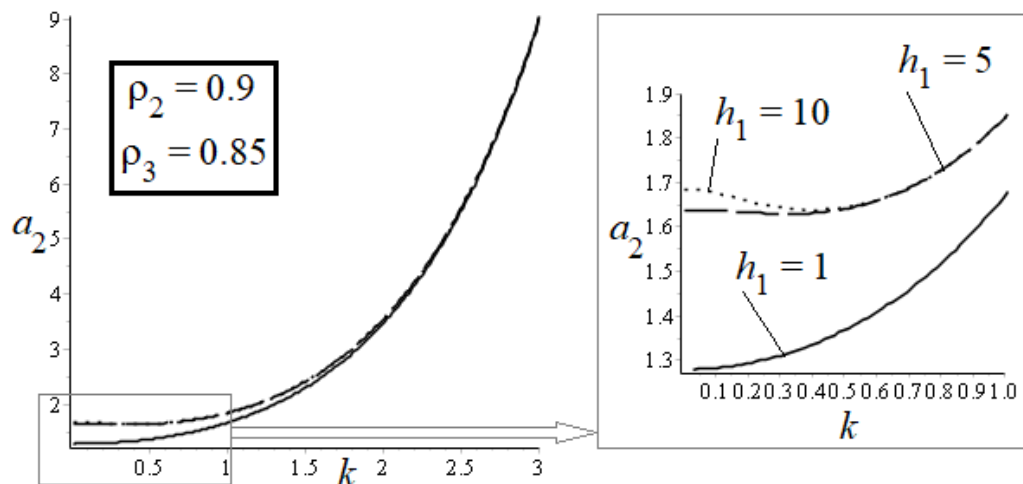
(в) $h_3 = 10$

Рис. 3.12. Залежність абсолютного значення a_1 від k для різних значень ρ_3

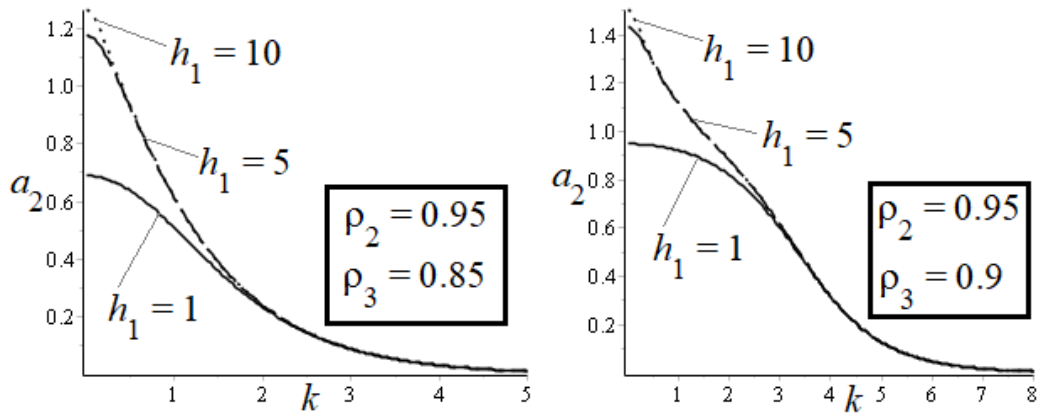
На рис. 3.11. представлено залежність відношення a_1 від хвильового числа для різних значень товщини верхнього шару h_3 для різних фіксованих значень ρ_2 та ρ_3 .

У випадку 3.11. *a* графіки величини a_1 зростають, проте на відміну від випадку 3.9. *a* більше значення товщини верхнього шару відповідає меншому початковому значенню відношення a_1 . Починаючи з деякого великого значення хвильового числа, усі три графіки співпадають. У випадку 3.11. *б* при $h_3 = 1$ та $h_3 = 5$ значення абсолютної величини a_1 зменшується, при $h_3 = 10$ для малих значень k має місце локальний максимум, після якого графік величини a_1 спадає. Після деякого значення хвильового числа всі три графіки співпадають, наближаючись до нуля. У випадку 3.11. *в* при $h_3 = 1$ графік a_1 так само спадає, при $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ має місце локальний максимум. Починаючи з деякого значення k , усі три графіки співпадають.

На рис.3.12. представлено залежність абсолютного значення a_1 від хвильового числа k для різних значень густини ρ_3 . З графіків видно, що чим більше значення ρ_3 , тим більше максимальне значення абсолютної величини a_1 . Починаючи з деякого значення k , графіки співпадають. Для всіх випадків існує граничне значення.



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$



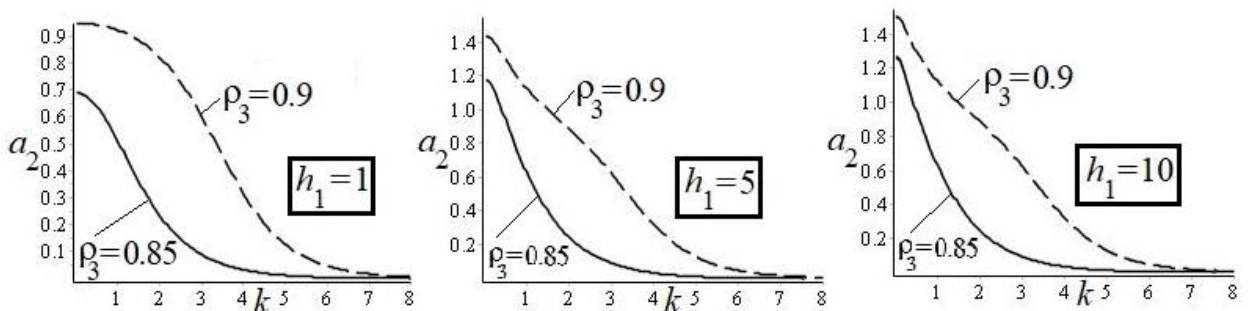
(б) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$

(в) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

Рис. 3.13. Залежність a_2 від хвильового числа k для різних значень h_1

На рисунку 3.13 наведена залежність абсолютного значення a_2 від хвильового числа k для різних значень товщини h_1 . У випадку 3.13. а графіки залежності a_2 зростають, більше значення h_1 відповідає більшому початковому значенню величини a_2 . Після деякого значення хвильового числа k усі три графіки співпадають, причому графіки при $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ співпадають раніше при малих значеннях k .

У випадках 3.13. б-в графіки абсолютної величини спадають, більше значення товщини h_1 відповідає більшому початковому значенню a_2 , після деякого числа усі три графіки співпадають, наближаючись до нуля. Аналогічно при $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ графіки величини a_2 співпадають раніше при малих значеннях хвильового числа.



(а) $h_1 = 1$

(б) $h_1 = 5$

(в) $h_1 = 10$

Рис. 3.14. Залежність відношення a_2 від хвильового числа для різних значень

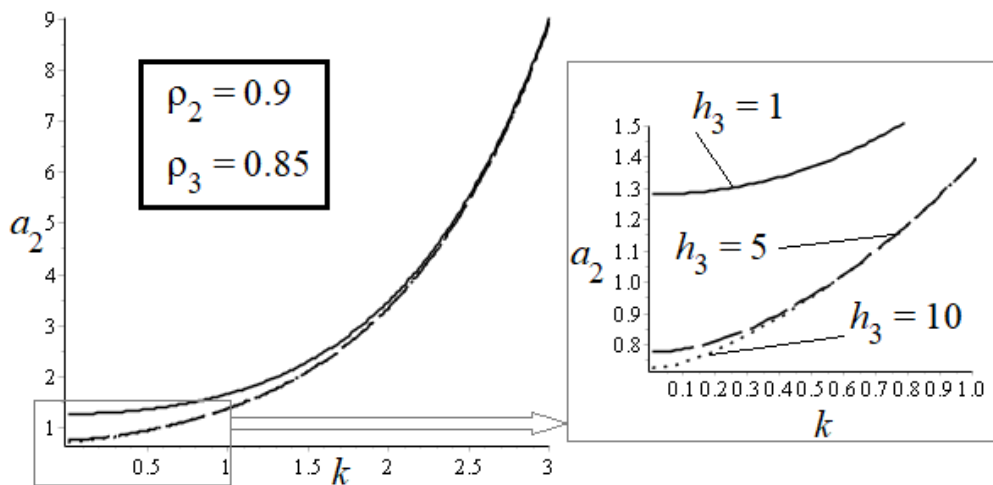
густини ρ_3

На графіках рисунку 3.14 наведено залежність абсолютної величини a_2 від хвильового числа для різних значень густини ρ_3 . У всіх випадках значення абсолютної величини a_2 зменшується зі збільшенням хвильового числа. Після деякого значення хвильового числа графіки співпадають, наближаючись до нуля. Чим більше значення густини верхнього шару ρ_3 , тим більше початкове значення величини a_2 .

Рис. 3.15. ілюструє залежність величини a_2 від хвильового числа для різних значень h_3 . У випадку 3.15. *а* графіки зростають і після деякого числа співпадають, графіки при $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ співпадають швидше. Більшому значенню товщини h_3 відповідає менше початкове значення абсолютної величини a_2 .

У випадку 3.15. *б* для $h_3 = 1$ та $h_3 = 5$ графіки спадають, при $h_3 = 10$ графік величини a_2 спочатку зростає, потім спадає. Після деякого значення хвильового числа всі три графіки співпадають і наближаються до нуля.

У випадку 3.15. *в* для $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ має місце локальний максимум, далі графіки величини a_2 спадають. Для $h_3 = 1$ графік абсолютної величини a_2 спадає. Графіки при $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ співпадають раніше для малих значень хвильового числа, далі при великих значеннях k усі три графіки співпадають і наближаються до нуля.



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$

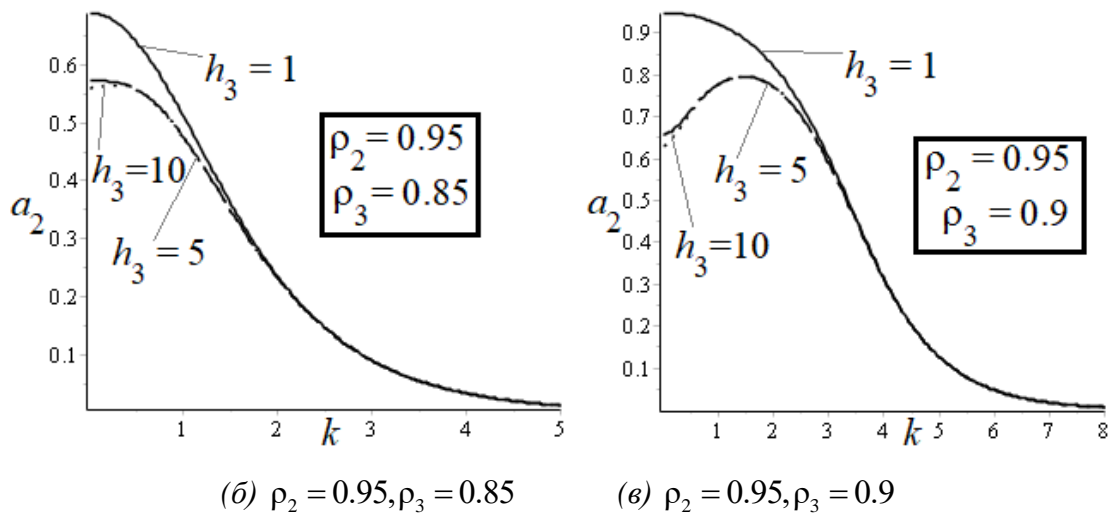


Рис. 3.15. Залежність a_2 від хвильового числа для різних значень h_3

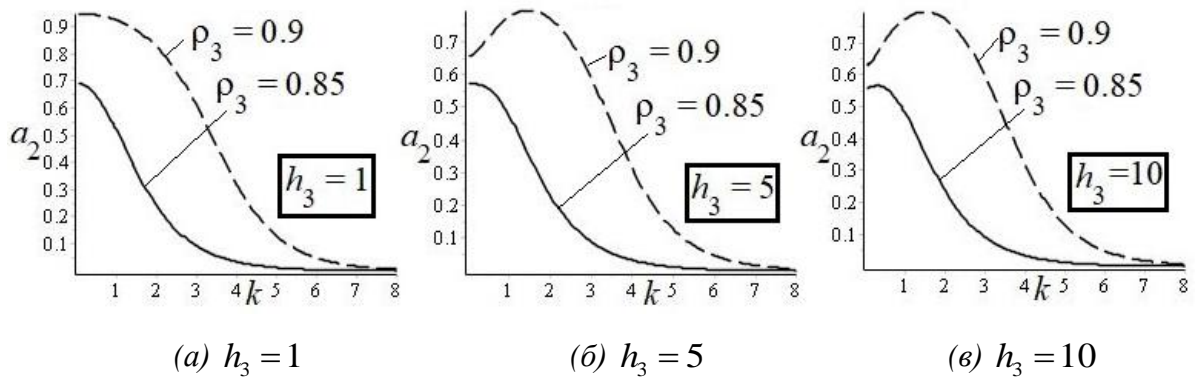


Рис. 3.16. Залежність відношення a_2 від хвильового числа для різних значень густини ρ_3

На рис. 3.16. проілюстровано залежність абсолютної величини a_2 від хвильового числа для різних значень густини верхнього шару ρ_3 . З графіків видно, що чим більше значення густини верхнього шару, тим більше значення відношення a_2 . У всіх випадках, починаючи з деякого числа k , графіки співпадають, наближаючись до нуля.

Порівнюючи малюнки 3.9. в та 3.13. в, 3.11. в та 3.15. в при $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$ має місце рівність абсолютних значень $|a_1| = |a_2|$.

Проміжки, на яких виявлено локальні максимуми, вказують на ті параметри системи, за яких внесок хвиль з частотою ω_1 та ω_2 у внутрішній хвильовий рух є найбільшим.

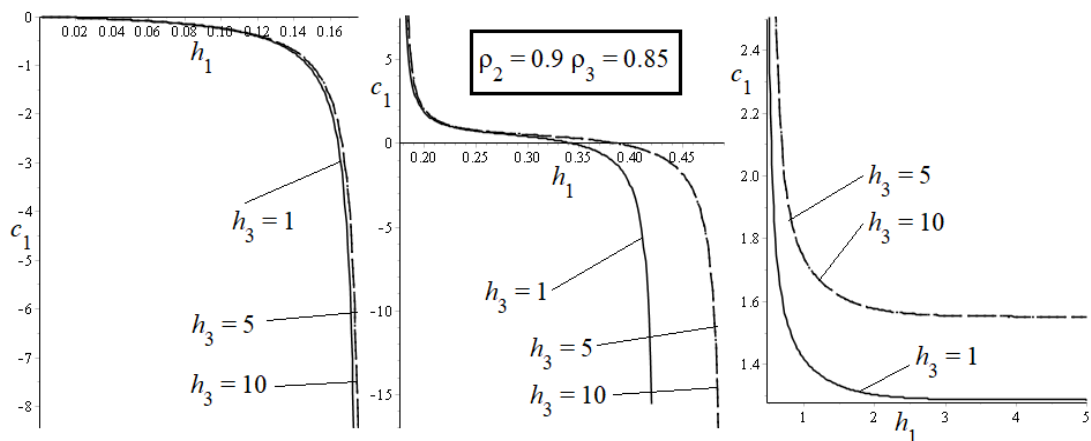
3.2. Аналіз розв'язків задачі другого наближення та дослідження умов проходження хвиль в залежності від зміни фізичних параметрів

Для другого наближення виконаємо аналіз відношень амплітуд, які відповідають парам частот $\pm 2\omega_1$ і $\pm 2\omega_2$, позначимо їх наступним чином:

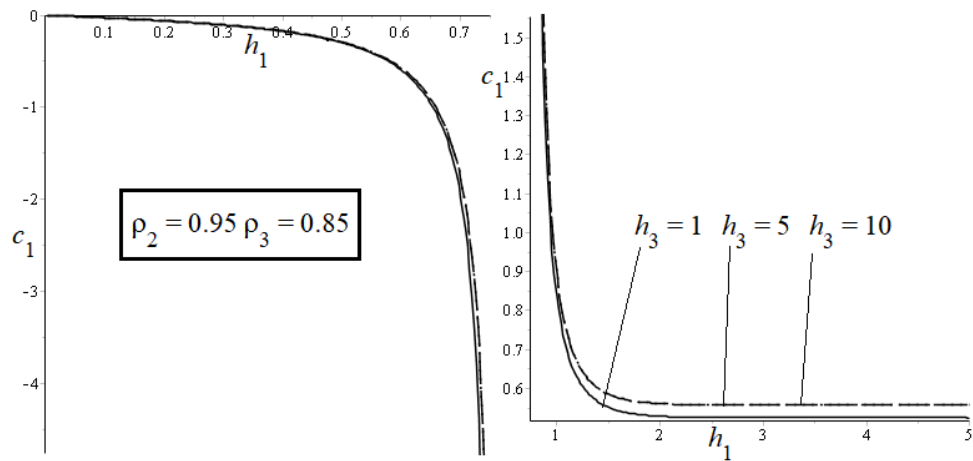
$$c_1 = \frac{\Lambda_2(2\omega_1)}{\Lambda_1(2\omega_1)}, c_2 = \left(\frac{\Lambda_2(2\omega_2)}{\Lambda_1(2\omega_2)} \right)^{-1} \quad (3.2)$$

Величина c_1 характеризує внесок внутрішньої хвилі з частотою $2\omega_1$ у хвильовий рух на верхній поверхні контакту, величина c_2 характеризує внесок внутрішньої хвилі з частотою $2\omega_2$ у хвильовий рух на нижній поверхні контакту між нижнім та середнім рідкими шарами. Корені ω_1 та ω_2 задаються формулами (2.24). Графіки залежності відношень амплітуд c_1 та c_2 від різних фізичних параметрів для другого наближення отримано за допомогою математичного пакету Maple.

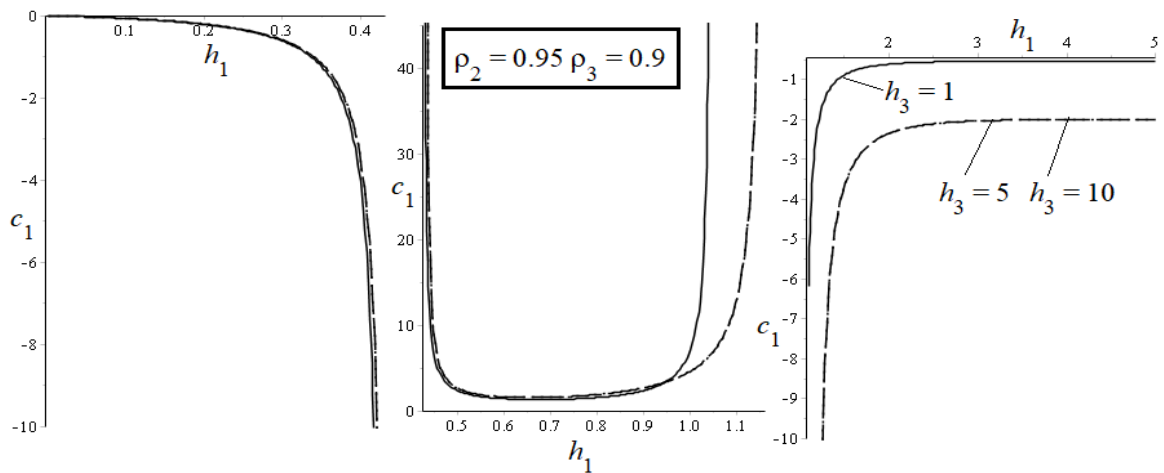
На рис. 3.17. наведено графіки залежності відношення c_1 від товщини нижнього шару h_1 при різних значеннях товщини верхнього шару h_3 . У випадку 3.17. а ($\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$) графік величини c_1 складається з трьох частин, які відповідають різним проміжкам по осі h_1 . На всіх трьох проміжках графіки спадають, чим більше значення h_3 , тим повільніше спадають графіки величини c_1 . При $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ графіки відношення c_1 співпадають.



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$



(б) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$



(в) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

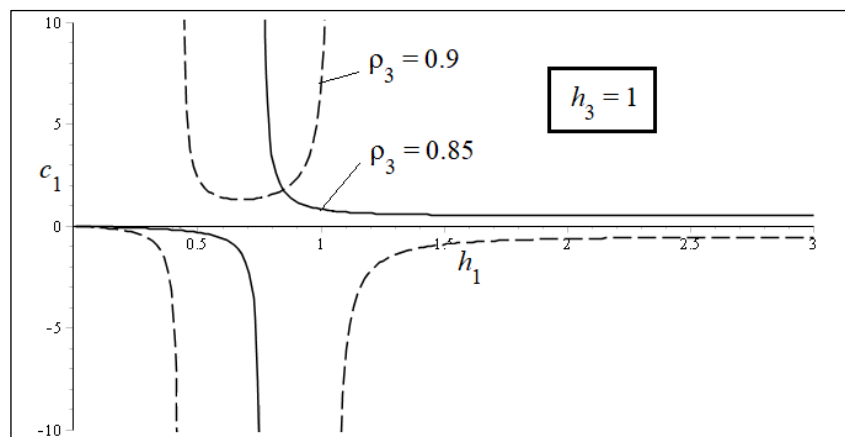
Рис. 3.17. Залежність відношення c_1 від h_1 при різних значеннях h_3

У випадку 3.17. б графіки відношення c_1 спадають на обох проміжках. На другому проміжку існує граничне значення, до якого наближається значення величини c_1 , причому чим більше значення h_3 , тим більше граничне значення. Графіки при $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ також співпадають.

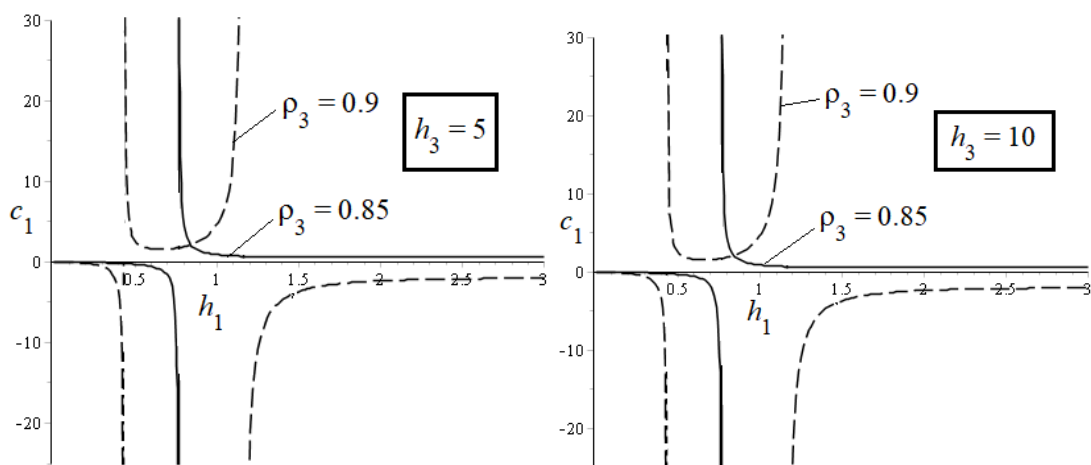
У випадку 3.17. в ($\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$) графік залежності величини c_1 складається з трьох частин. На першому проміжку графік спадає, чим більше значення h_3 , тим пізніше спадає графік величини c_1 . На другому проміжку значення величини спочатку спадає, а потім зростає, причому мінімальне значення для випадку $h_3 = 1$ менше за випадки, коли $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$. Для випадку $h_3 = 1$ зростання відбувається швидше. На третьому проміжку графік

має спадний характер, причому існують граничні значення, до яких наближаються графіки відношення c_1 . Для $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ граничне значення менше, ніж при $h_3 = 1$, при чому, коли $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$, графіки співпадають. З усіх трьох графіків помітно, що зміна товщини верхнього шару мало впливає на зміну значення відношення c_1 .

На рис. 3.18. представлено графіки залежності відношення c_1 від товщини нижнього шару h_1 при різних значеннях густини верхнього шару ρ_3 . Густина середнього шару рівна $\rho_2 = 0.95$. З усіх трьох графіків видно, що при збільшенні густини верхнього шару ρ_3 графіки відношення c_1 помітно змінюються. Отже, зміна густини ρ_3 помітно впливає на зміну значення величини c_1 .



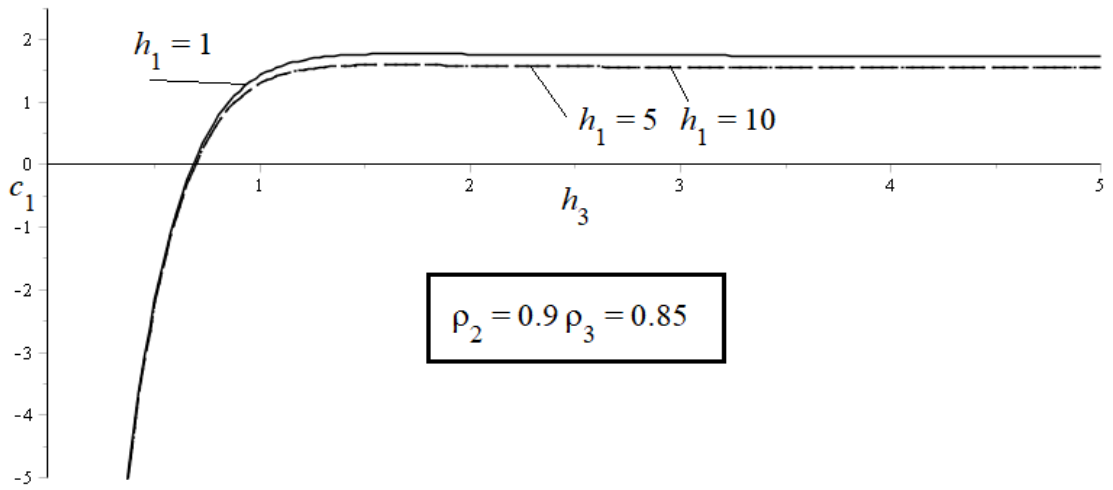
(a) $h_3 = 1$



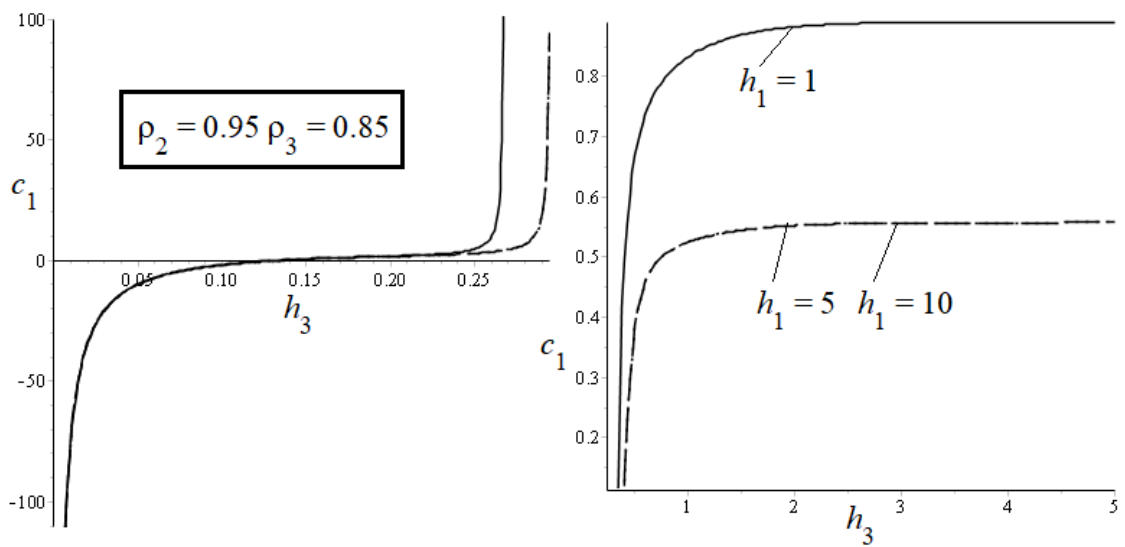
(б) $h_3 = 5$

(в) $h_3 = 10$

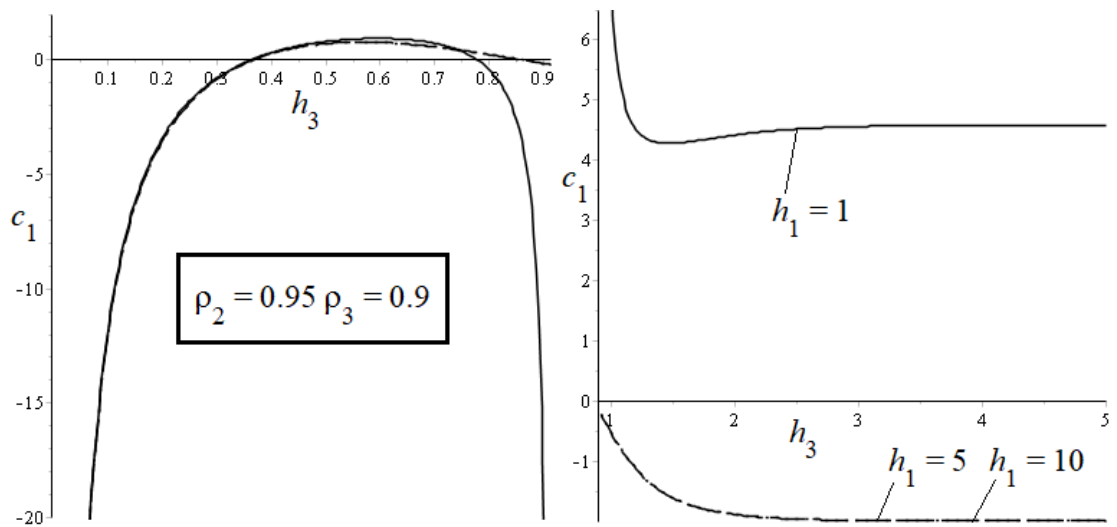
Рис. 3.18. Залежність c_1 від h_1 при різних значеннях ρ_3



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$



(б) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$



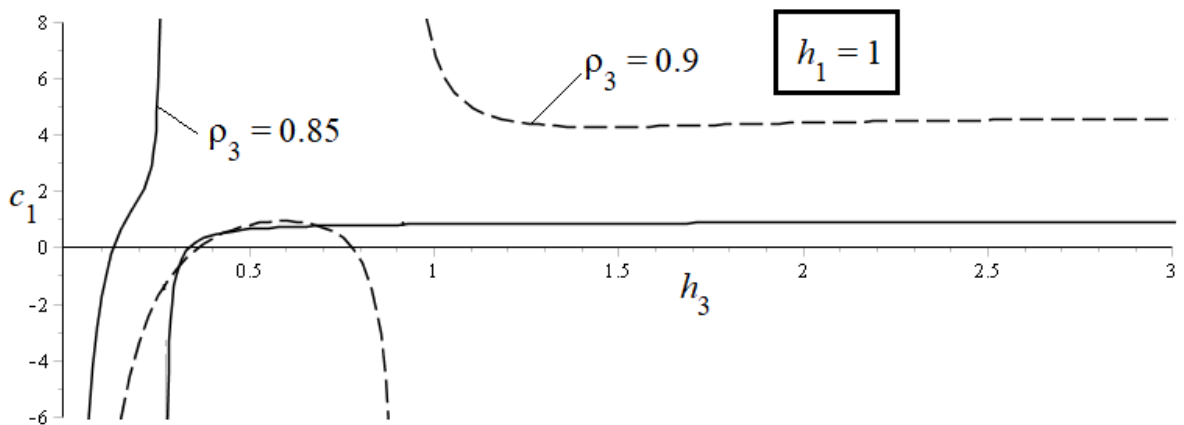
(в) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

Рис. 3.19. Залежність величини c_1 від товщини верхнього шару h_3

На рис. 3.19. *a* представлена залежність величини c_1 від товщини верхнього шару h_3 для різних значень h_1 . Графік залежності відношення c_1 зростає до деякого граничного значення. Чим більше значення товщини h_1 , тим менше граничне значення. При $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ граничні значення співпадають.

У випадку 3.19. *б* графік відношення c_1 складається з двох частин. На першому проміжку графіки зростають, чим більше значення h_1 , тим пізніше зростає значення c_1 . При $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ графіки співпадають. На другому проміжку графік величини c_1 зростає до певного граничного значення. Більше значення товщини h_1 відповідає меншому граничному значенню. При $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ граничні значення співпадають.

У випадку 3.19. *в* при $h_1 = 1$ графік відношення c_1 складається з двох частин. На першому проміжку графік спочатку зростає до певного значення, а потім спадає, на другому проміжку має місце локальний мінімум. При $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ графік відношення c_1 спочатку зростає а потім спадає до певного граничного значення.



(a) $h_1 = 1$

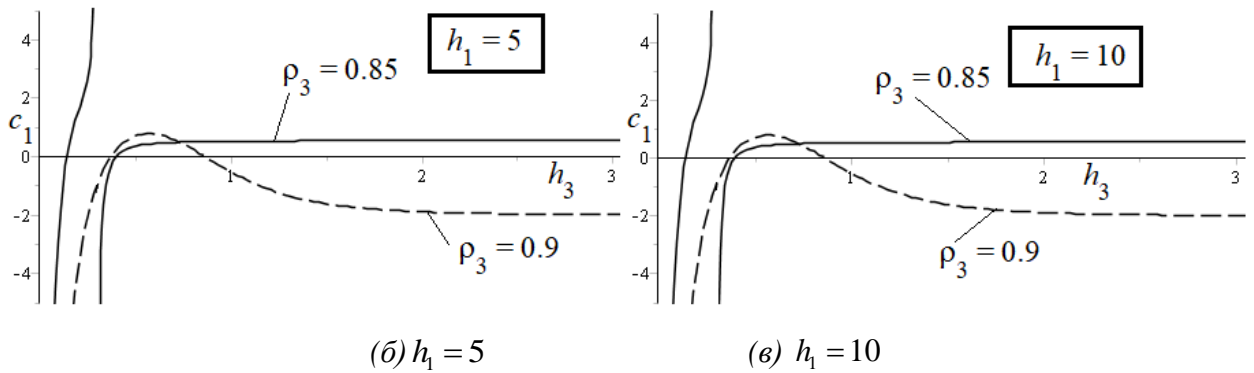
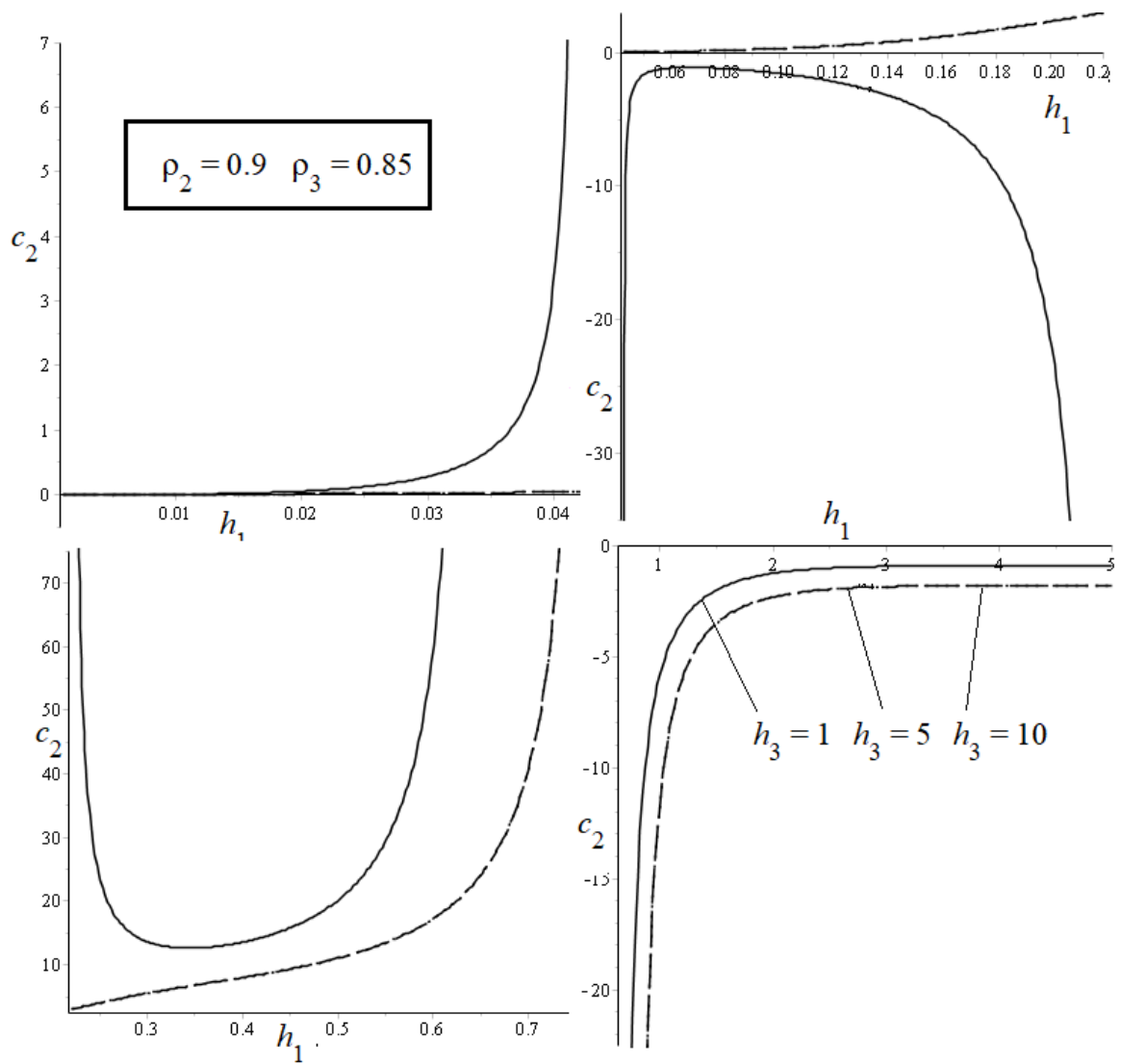


Рис. 3.20. Залежність величини c_1 від товщини h_3 для різних значень ρ_3

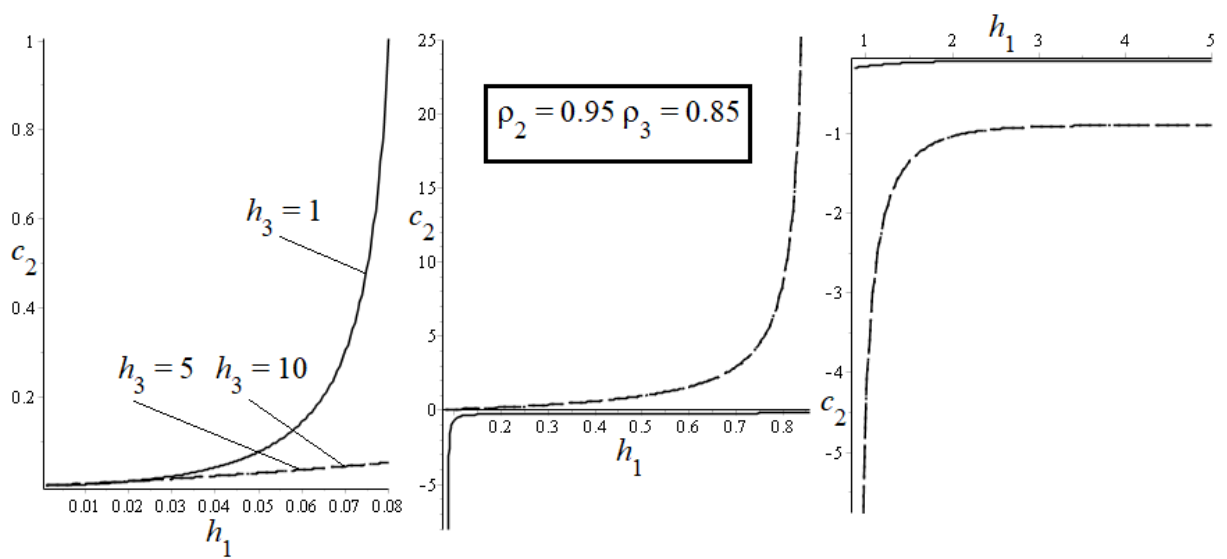
На рис. 3.20. показана залежність величини c_1 від товщини верхнього шару h_3 для різних значень густини верхнього шару ρ_3 . З графіків видно, що збільшення густини верхнього шару призводить до суттєвої зміни графіків відношення c_1 . Отже, зміна густини верхнього шару помітно впливає на зміну значення величини c_1 .

На рис. 3.21. зображено залежність величини c_2 від товщини нижнього шару h_1 для різних значень товщини верхнього шару h_3 . Відповідні фіксовані значення густин зображено на рисунках.

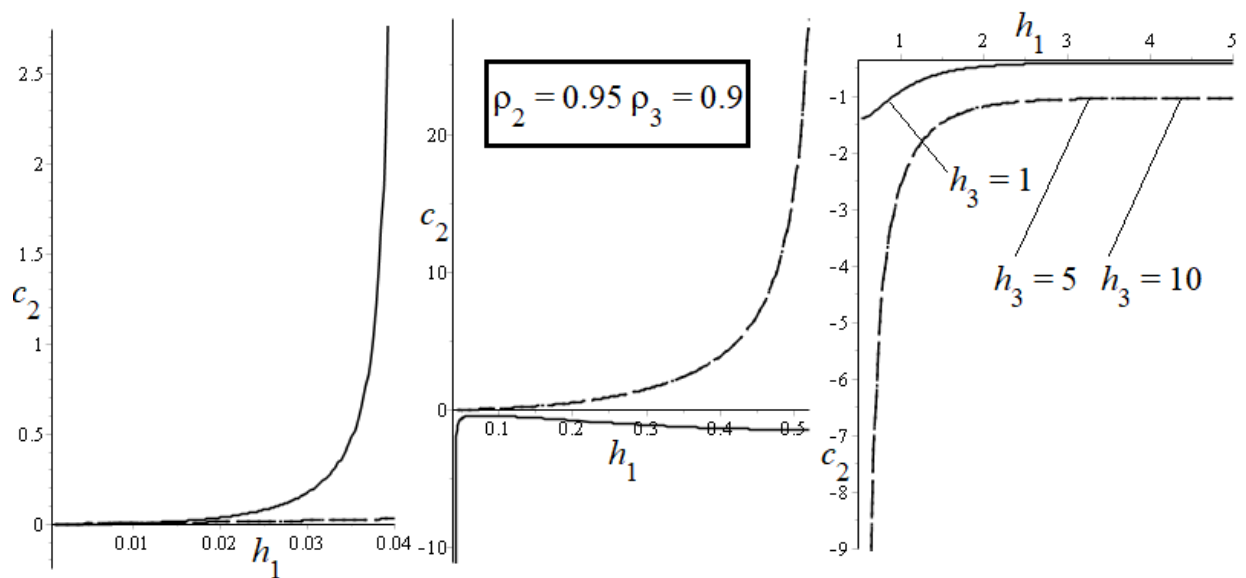
З рис. 3.21. *a* видно, що при $h_3 = 1$ графік величини c_2 на першому проміжку зростає, на другому проміжку графік спочатку зростає, а потім спадає, причому значення c_2 залишається від'ємним. На третьому проміжку значення c_2 навпаки спадає до певного значення, а потім зростає, залишаючись додатним. На останньому проміжку значення c_2 зростає до певного граничного значення, меншого за 0. Для випадків, коли $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$, графіки співпадають. На перших трьох проміжках графік зростає. На четвертому проміжку графіки також зростають, наближаючись до від'ємного граничного значення.



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$



(b) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$



(в) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

Рис. 3.21. Залежність відношення c_2 від товщини h_1 для різних значень h_3

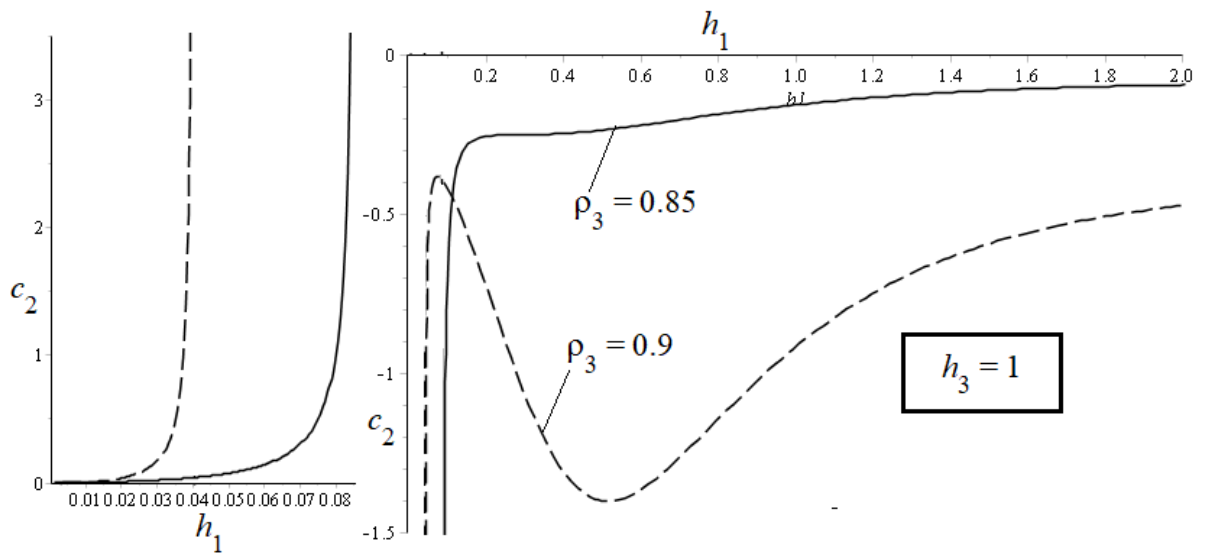
У випадку 3.21. б графік складається з трьох частин. При $h_3 = 1$ графік величини c_2 на першому проміжку зростає, на другому та третьому зростає до граничного значення, близького до нуля. При $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ графіки співпадають, на першому та другому проміжках графіки зростають, на третьому проміжку графіки зростають до від'ємного граничного значення, яке є меншим за випадок, коли $h_3 = 1$.

У випадку 3.21. в при $h_3 = 1$ графік величини c_2 на першому проміжку зростає, на другому графік спочатку зростає, а потім спадає, на третьому проміжку знову зростає до граничного значення, близького до нуля. При $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ графіки співпадають та поводять себе аналогічно до випадку 3.21. б.

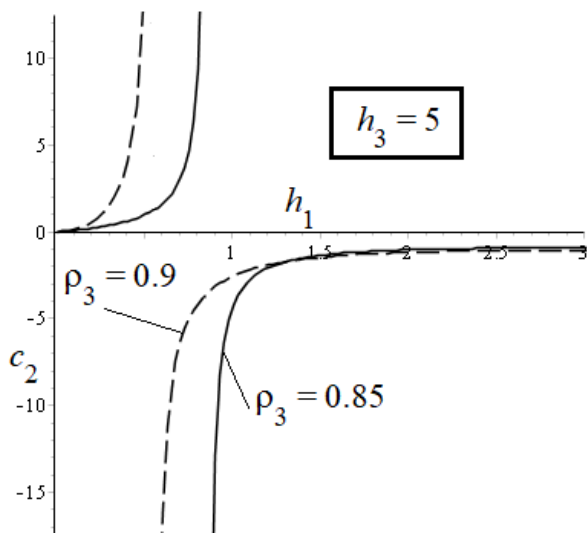
На рис. 3.22. представлено графіки залежності відношення c_2 для різних значень густини верхнього шару ρ_3 .

У випадку 3.22. а зі збільшенням густини верхнього шару на першому проміжку величина c_2 зростає швидше. На другому проміжку за меншої густини графік зростає, коли густина $\rho_3 = 0.9$ значення c_2 зростає, далі спадає і знову зростає до деякого граничного значення. Отже, мають місце

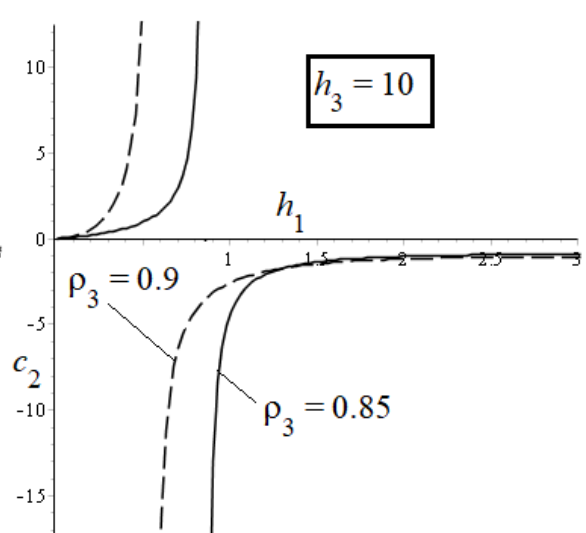
локальний максимум та мінімум. Зі зростанням густини верхнього шару граничне значення зменшується.



(a) $h_3 = 1$



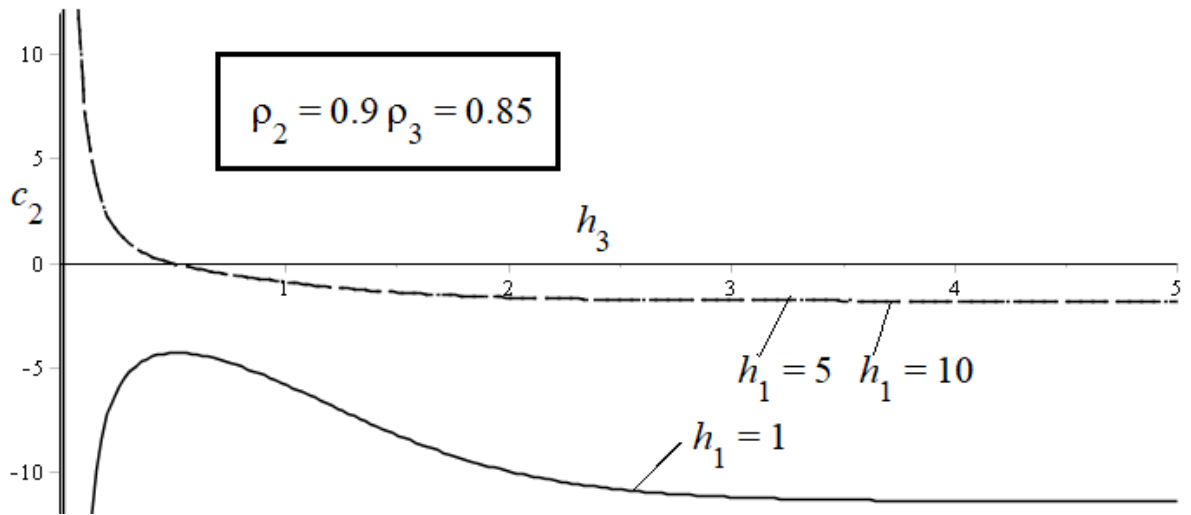
(б) $h_3 = 5$



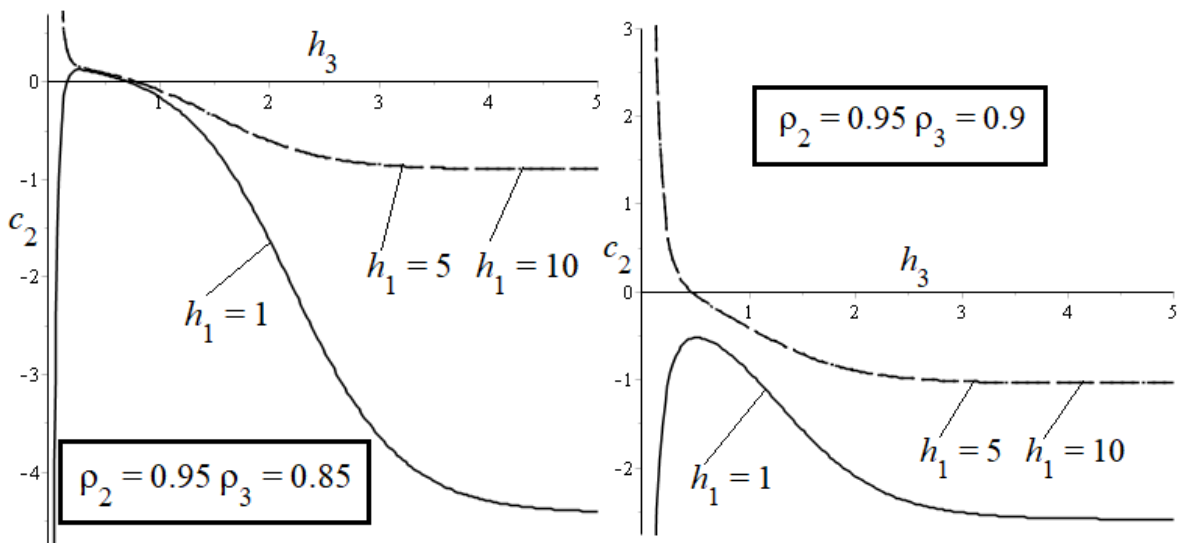
(в) $h_3 = 10$

Рис. 3.22. Залежність c_2 для різних значень ρ_3

При $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ на обох проміжках графіки зростають. Чим більша густина верхнього шару, тим раніше відбувається зростання величини c_2 . При малих значеннях товщини верхнього шару, вплив густини верхнього шару на величину c_2 більший.



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$



(б) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$

(е) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

Рис. 3.23. Залежність величини c_2 від h_3 при різних значеннях h_1

На рис. 3.23. представлено графіки залежності величини c_2 від товщини верхнього шару h_3 при різних значеннях товщини h_1 . В усіх трьох випадках при $h_1 = 1$ графік залежності величини c_2 зростає до деякого значення, потім спадає до граничного значення. Тобто має місце локальний максимум.

При $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ графіки відношення c_2 спадають до деякого від'ємного граничного значення.

Рис. 3.24. ілюструє залежність відношення c_2 від товщини верхнього шару h_3 для різних значень густини верхнього шару ρ_3 . При $h_1 = 1$ для обох значень густини мають місце локальні максимуми. Зі збільшенням густини

верхнього шару до $\rho_3 = 0.9$, максимальне значення величини c_2 зменшується, граничне значення c_2 збільшується.

При $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ графіки однакові, величина c_2 спадає на всій області визначення, існує граничне значення, яке зменшується при збільшенні густини верхнього шару.

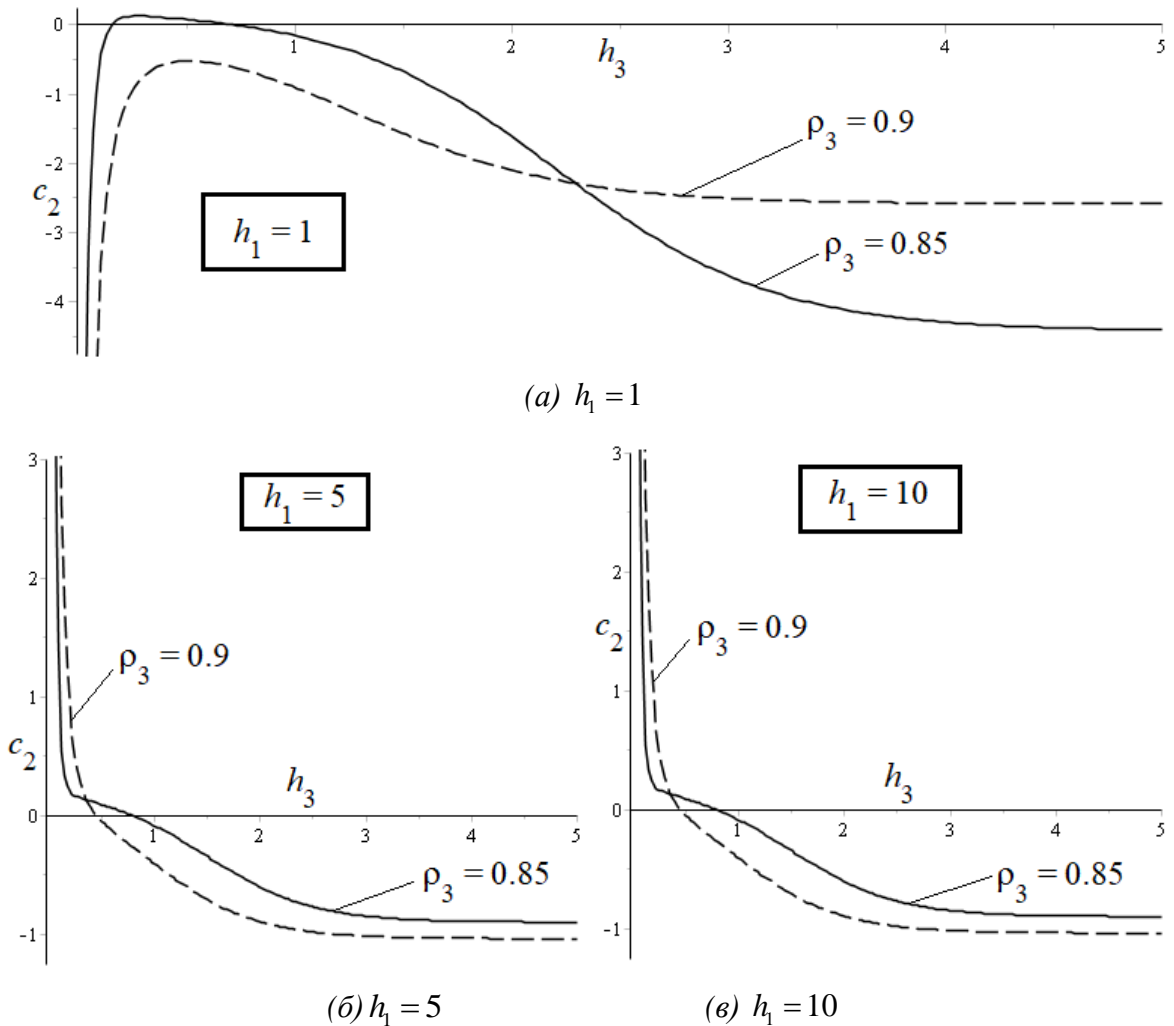
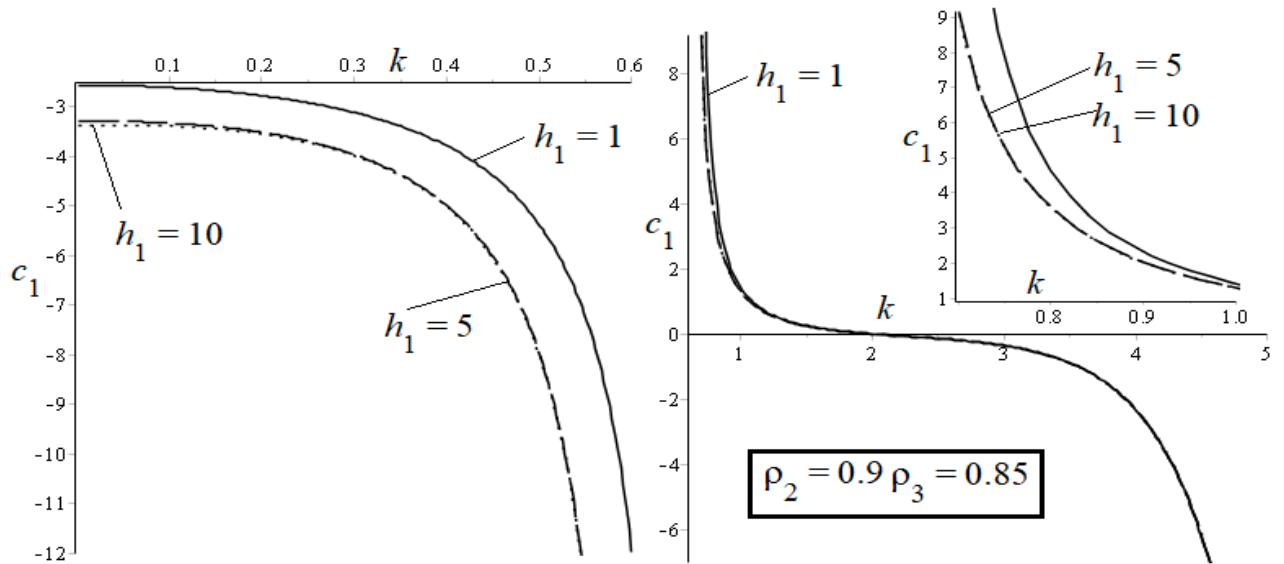


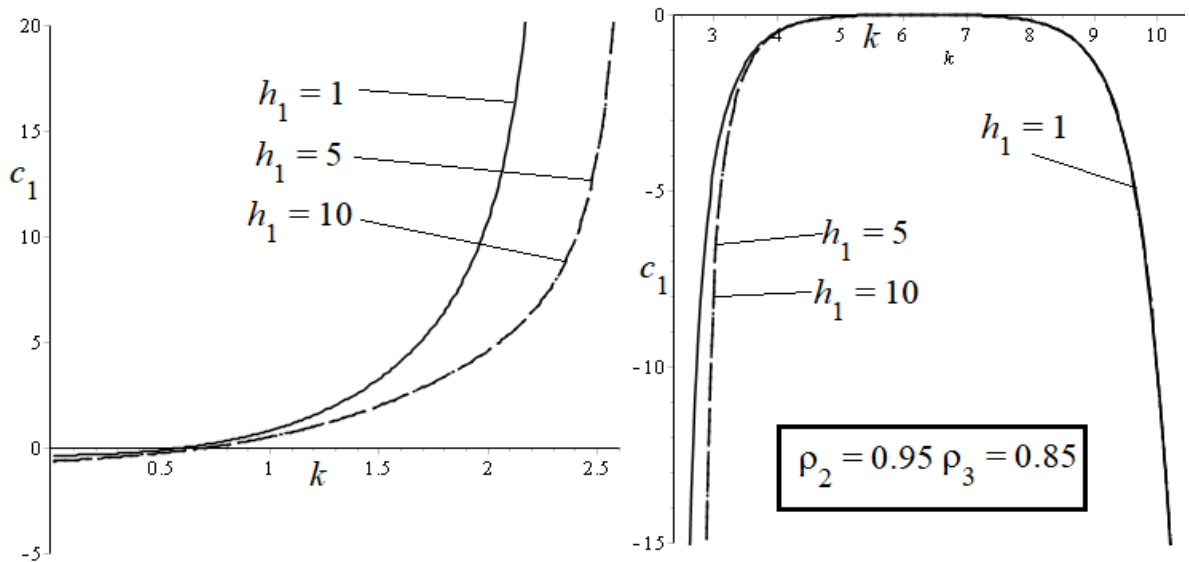
Рис. 3.24. Залежність c_2 від товщини h_3 для різних значень густини ρ_3

На графіку 3.25. зображено залежність величини c_1 від хвильового числа k при різних значеннях товщини нижнього шару. На рис. 3.25. *a* графік абсолютної величини c_1 на обох проміжках спадає. На першому проміжку більшому значенню h_1 відповідає менше початкове значення величини c_1 . На другому проміжку після деякого значення хвильового числа k графіки співпадають.

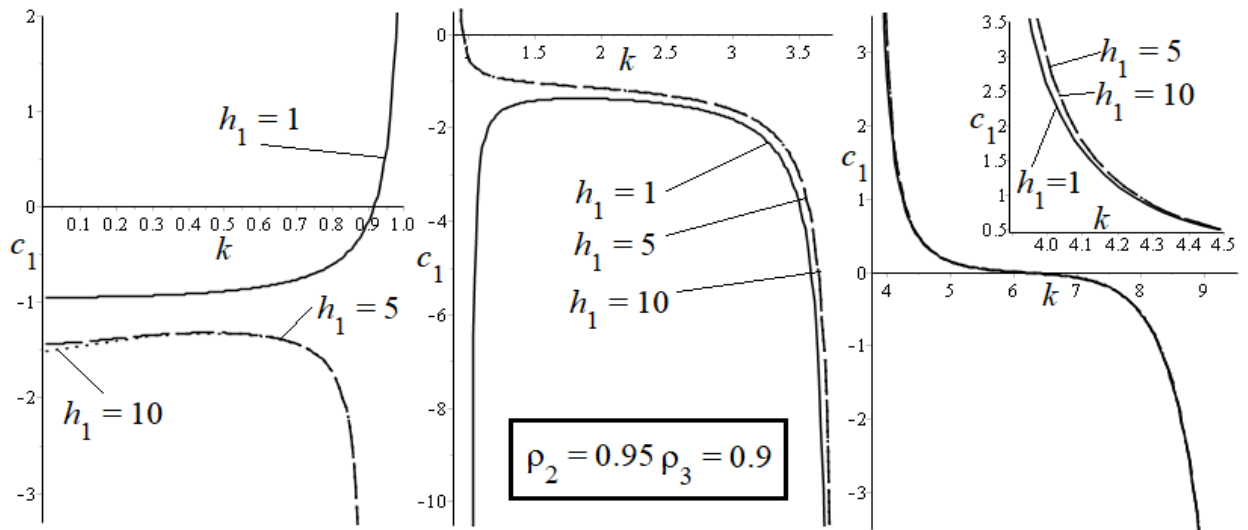
На рис. 3.25. б на першому проміжку графіки зростають, при $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ графіки співпадають, чим більше значення товщини нижнього шару h_1 , тим повільніше зростає значення c_1 . На другому проміжку величина c_1 зростає до деякого значення, потім спадає, після деякого значення k усі три графіки співпадають.



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$



(б) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$

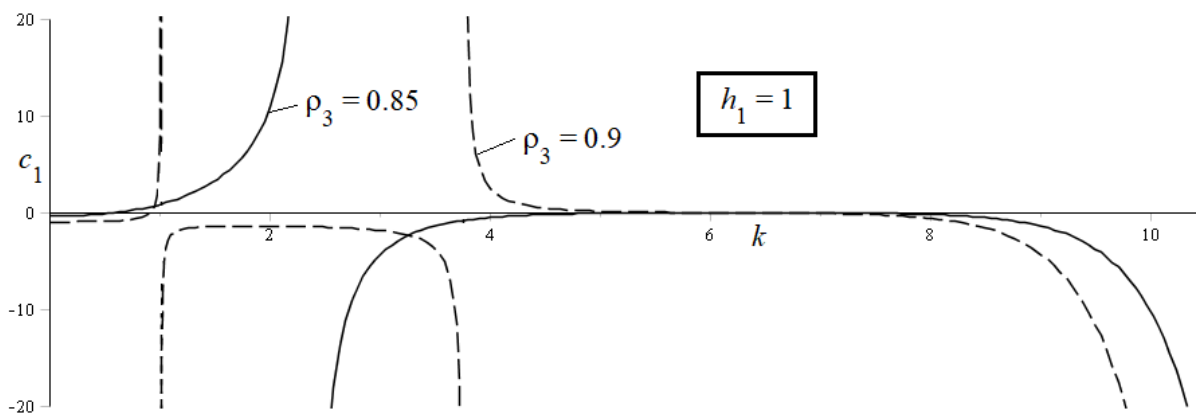


(в) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

Рис. 3.25. Залежність відношення c_1 від k при різних значеннях h_1

У випадку 3.25. в при $h_1 = 1$ графік величини c_1 на першому проміжку зростає, на другому – спочатку зростає, потім спадає. При $h_1 = 5$ та $h_1 = 10$ на першому проміжку графік спочатку зростає, далі спадає, на другому проміжку – спадає. На третьому проміжку усі три графіки спадають і співпадають після деякого значення k . Зміна товщини нижнього шару h_1 має невеликий вплив на значення величини c_1 .

Нижче, на рис. 3.26. зображено графіки залежності величини c_1 від хвильового числа k для різних значень ρ_3 . З графіків видно, що зі збільшенням густини ρ_3 графік залежності значення c_1 помітно змінюється.



(а) $h_1 = 1$

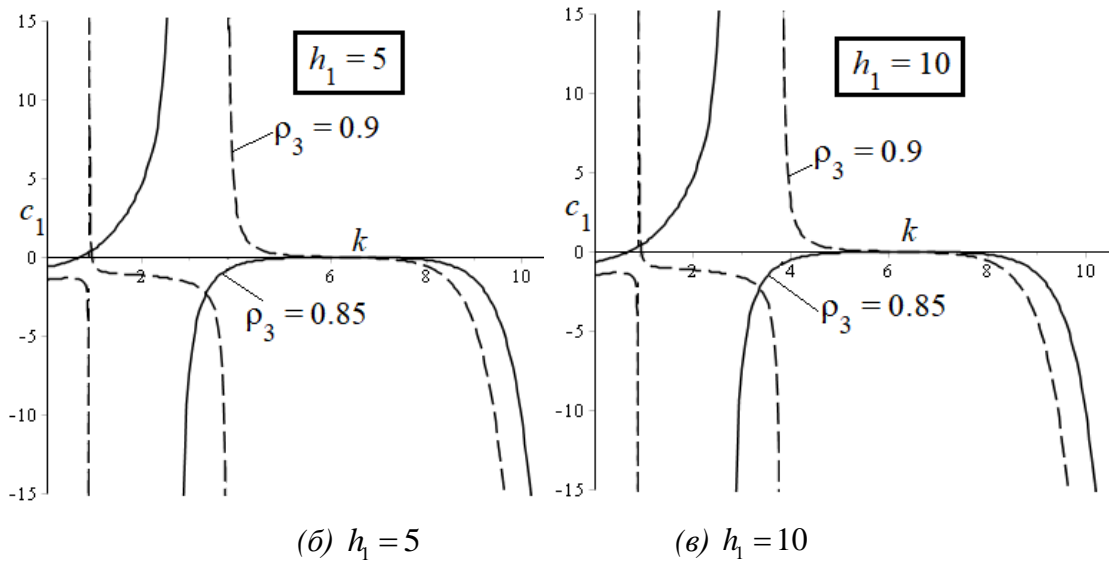
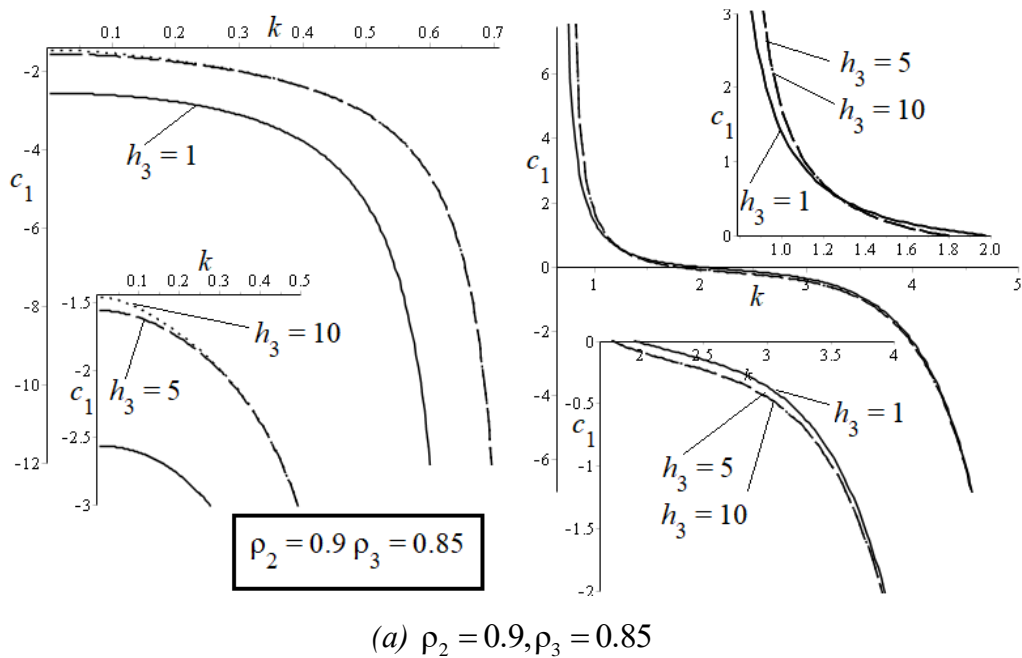
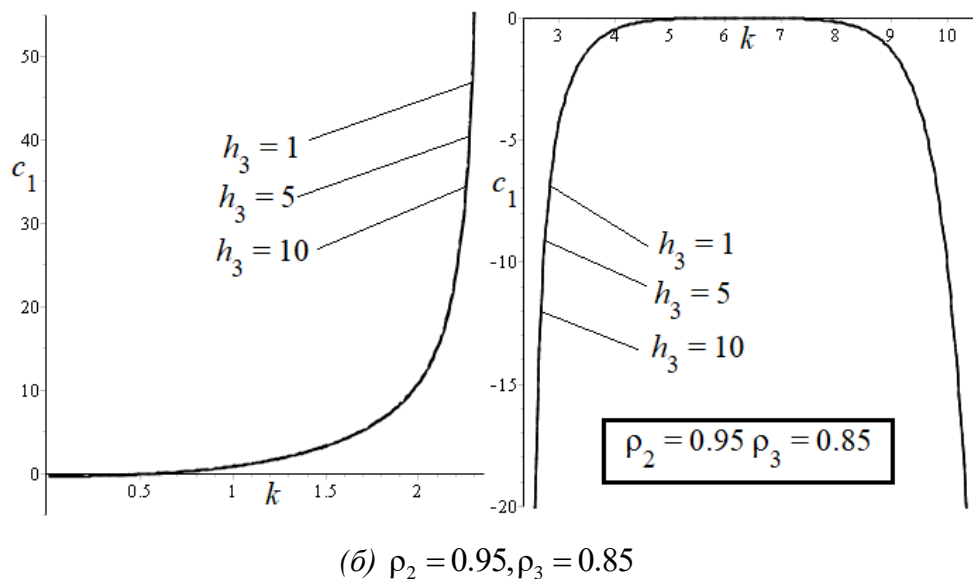


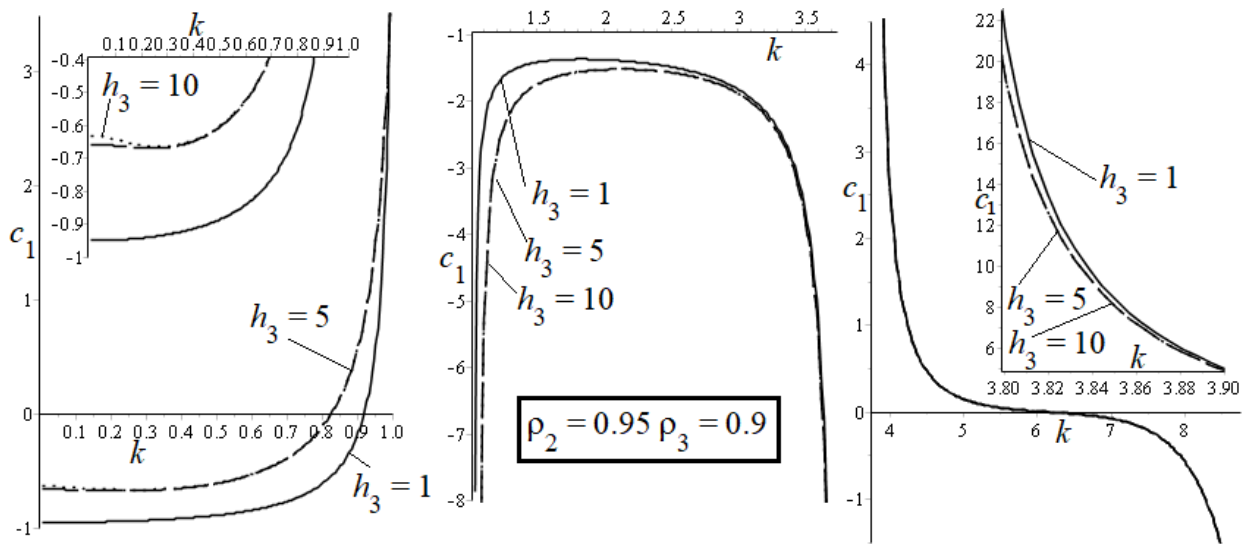
Рис. 3.26. Залежність величини c_1 від k для різних значень ρ_3



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$



(b) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$



(в) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

Рис. 3.27. Залежність c_1 від хвильового числа k для різних значень h_3

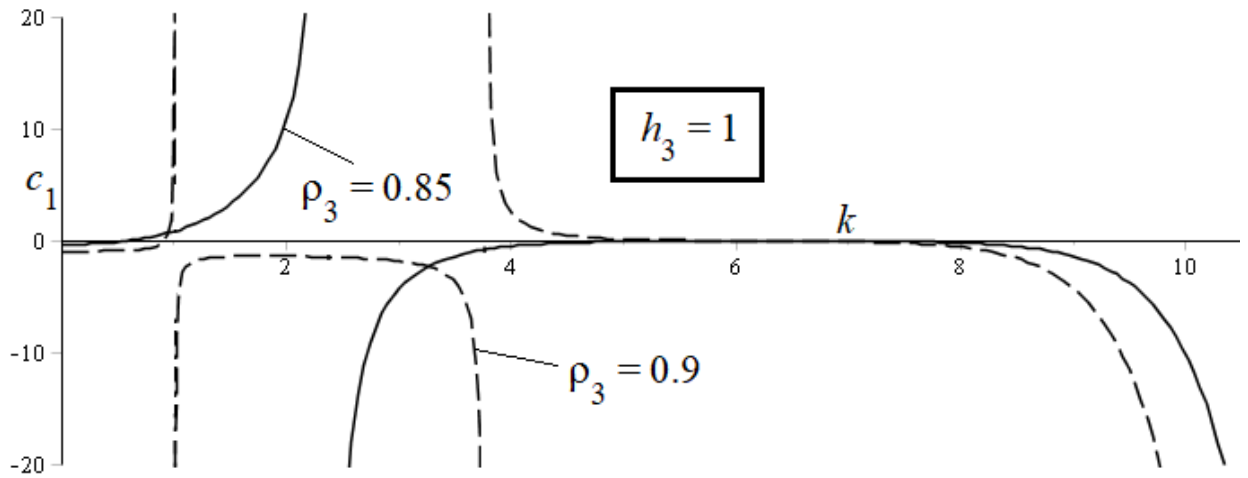
На рис.3.27. наведені графіки залежності величини c_1 від хвильового числа k для різних значень товщини верхнього шару h_3 . З випадку 3.27. а видно, що зі збільшенням хвильового числа графіки величини c_1 спадають на першому проміжку, причому більшому значенню h_3 відповідає більше початкове значення c_1 . На другому проміжку графіки також спадають і після деякого числа k співпадають.

У випадку 3.27. б на першому проміжку величина c_1 зростає, на другому – спочатку зростає до певного максимального значення, близького до нуля, потім спадає. При всіх трьох значеннях h_3 графіки співпадають. Отже, за таких параметрів зміна висоти верхнього шару ніяк не впливає на значення відношення c_1 .

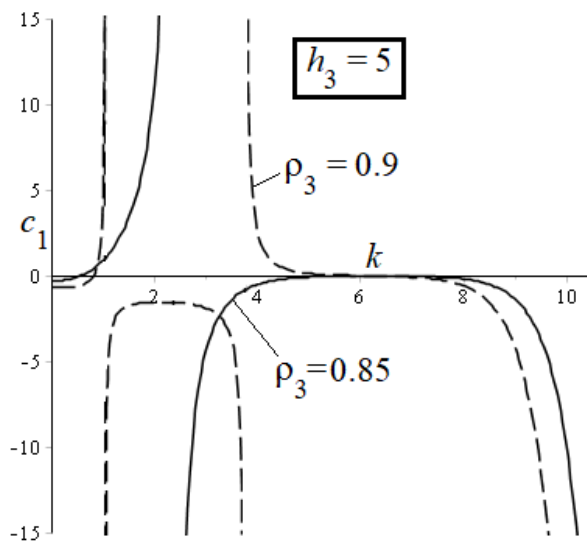
У випадку 3.27 в на першому проміжку графіки зростають і після деякого числа k співпадають. На другому проміжку величина c_1 зростає до деякого значення, потім спадає. Графіки при $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ співпадають, при $h_3 = 1$ максимальне значення є найбільшим.

На третьому проміжку графіки величини c_1 знаходяться дуже близько один від одного і співпадають після деякого значення хвильового числа. На

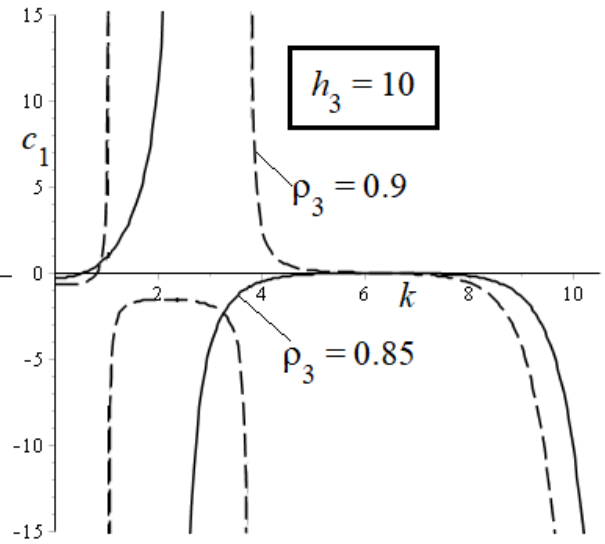
даному проміжку значення величини c_1 спадає. Отже, зміна товщини верхнього шару слабо впливає на зміну значення c_1 .



(a) $h_3 = 1$



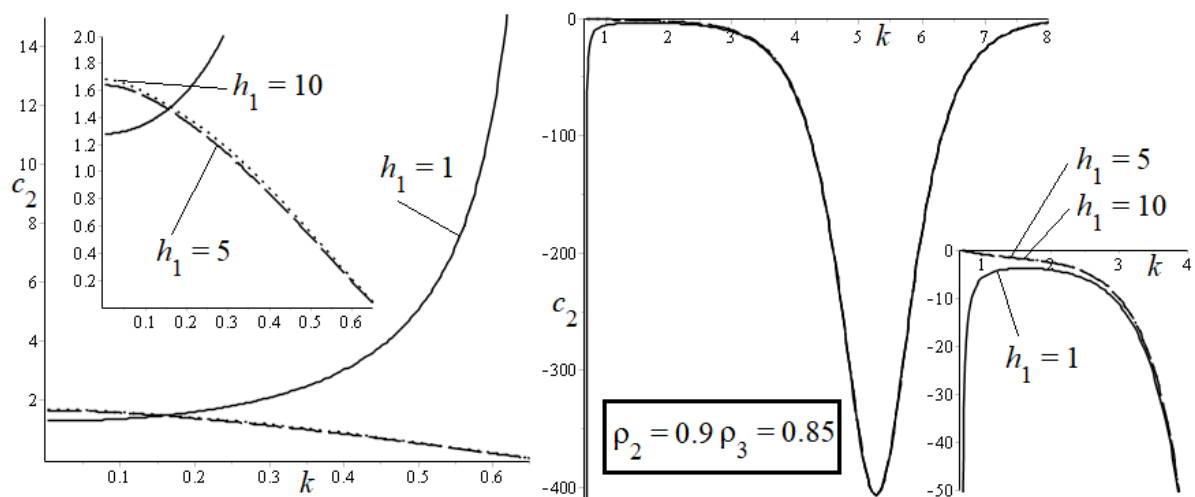
(б) $h_3 = 5$



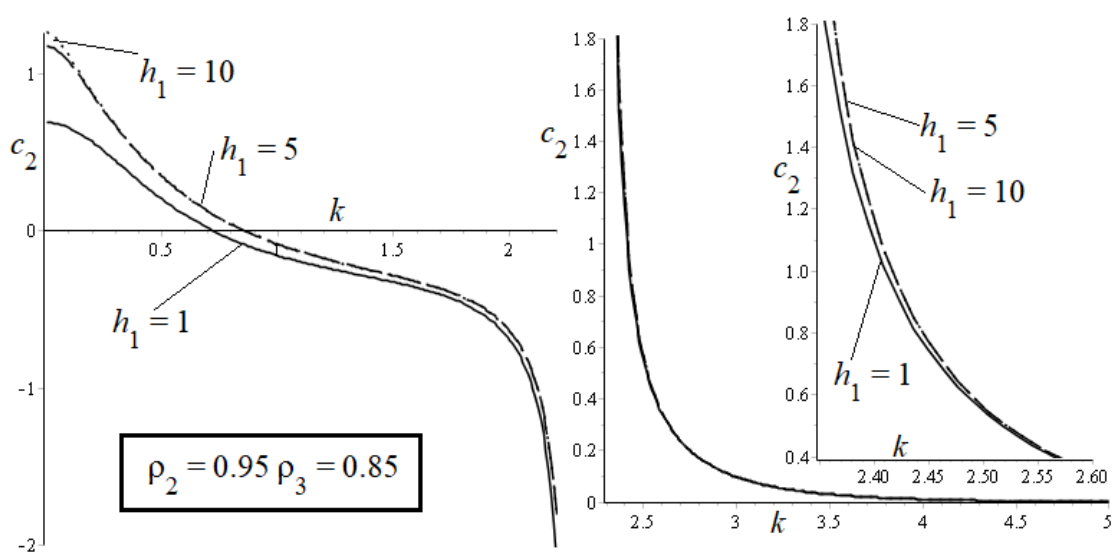
(в) $h_3 = 10$

Рис. 3.28. Залежність c_1 від хвильового числа при зміні густини ρ_3

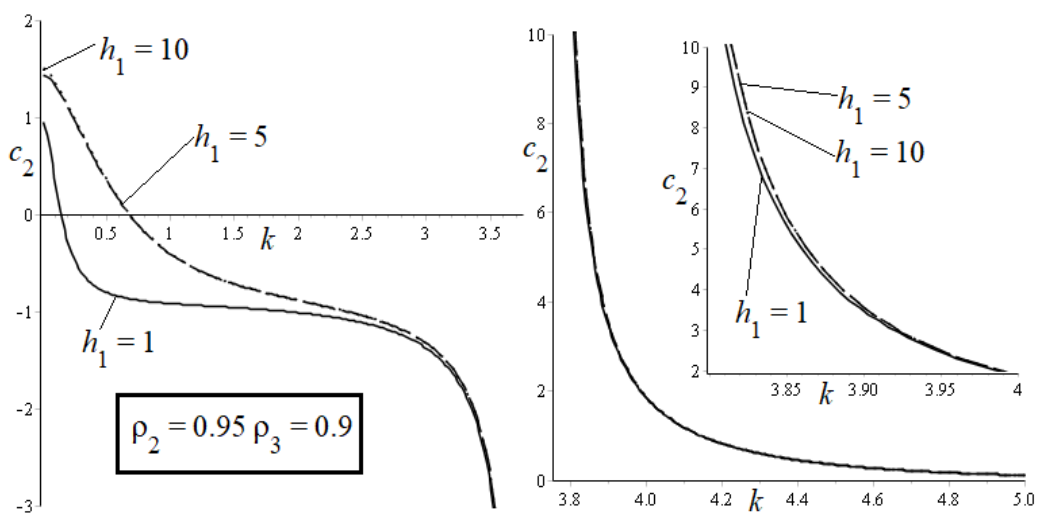
На рис. 3.28. представлено графіки залежності значення c_1 від хвильового числа при зміні густини верхнього шару ρ_3 для різних фіксованих значень товщини верхнього шару. Графіки демонструють суттєвий вплив зміни густини ρ_3 на зміну значення величини c_1 .



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$



(б) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$



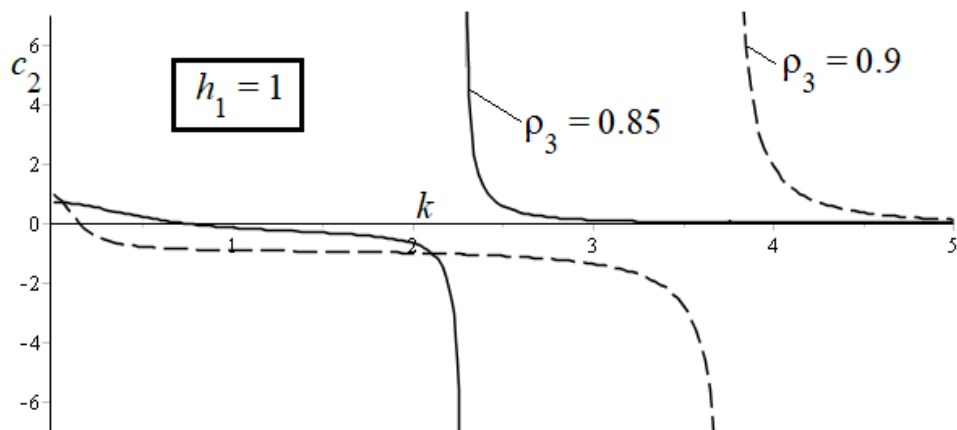
(в) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

Рис. 3.29. Залежність c_2 від хвильового числа k для різних значень h_3

Графіки на рис. 3.29. демонструють залежність величини c_2 від хвильового числа для різних значень h_1 . У випадку 3.29. *a* при $h_1=1$ на першому проміжку графік c_2 зростає, на другому – спочатку зростає, потім стрімко спадає й знову зростає, наближаючись до нуля. Тобто на даному проміжку має місце локальний мінімум. При $h_1=5$ та $h_1=10$ графік величини c_2 спадає, після деякого значення k співпадає з частиною графіка на другому проміжку. Наявність локального мінімуму вказує на фізичні параметри, за яких внесок хвиль з частотою $2\omega_2$ у хвильовий рух є максимальним.

У випадку 3.29. *б* на обох проміжках графіки спадають. На другому проміжку існує граничне значення, до якого наближаються всі три графіки. При всіх значеннях h_1 графіки знаходяться недалеко один від одного і після деякого значення k співпадають. У випадку 3.29. *в* поведінка графіків аналогічна випадку 3.29. *б*. Згідно з графіками зміна товщини нижнього шару h_1 мало впливає на значення величини c_2 .

На рис. 3.30. представлено графіки залежності величини c_2 від хвильового числа для різних значень ρ_3 для фіксованих значень $h_1 = 1, 5, 10$. У всіх випадках графіки спадають, чим більша густина верхнього шару ρ_3 , тим пізніше відбувається спадання графіків. Отже, зміна густини верхнього шару має невеликий вплив на зміну значення відношення c_2 .



(a) $h_1 = 1$

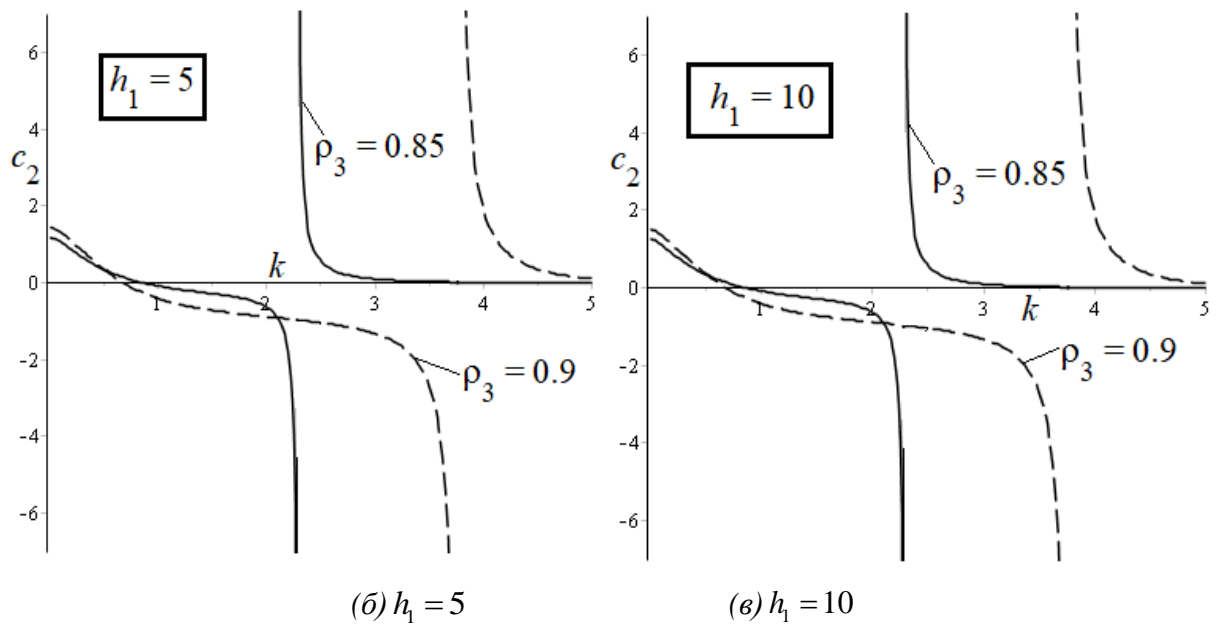
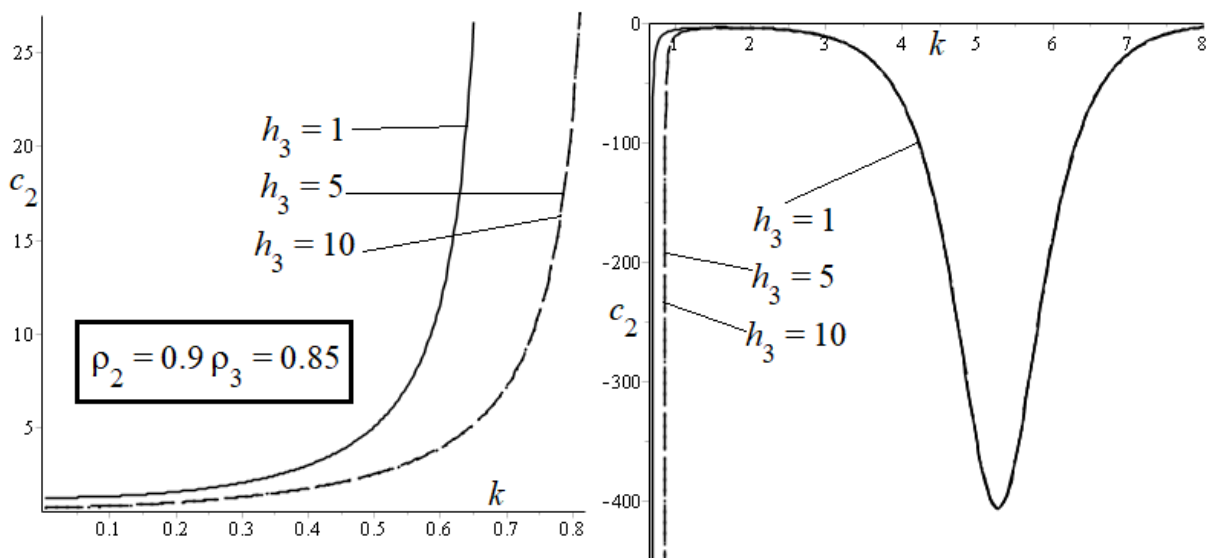
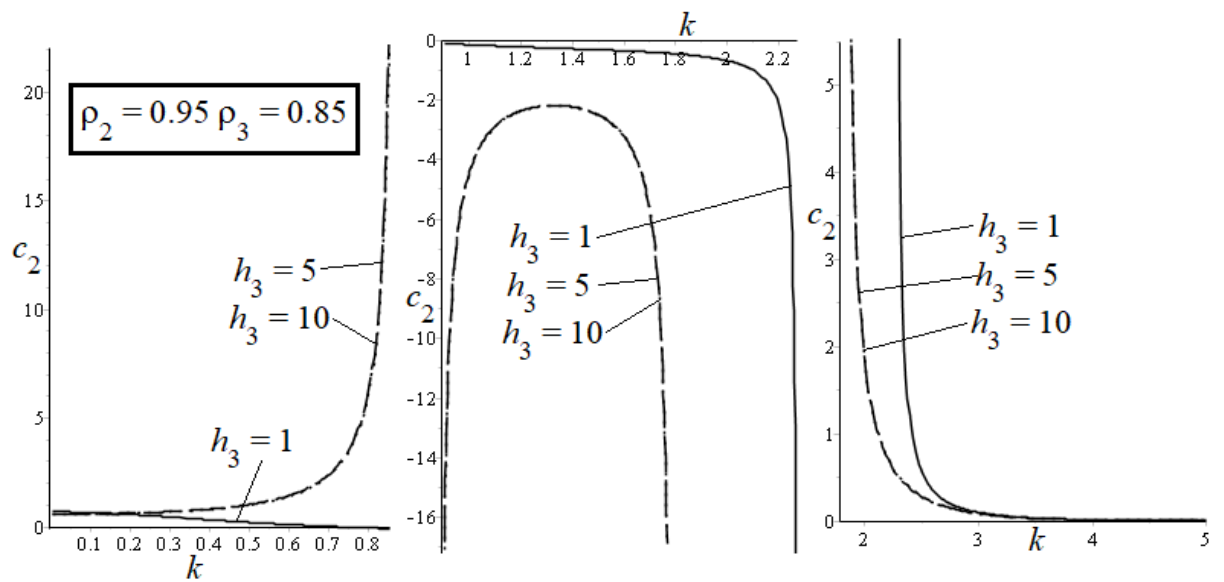


Рис. 3.30. Залежність c_2 від хвильового числа для різних значень ρ_3

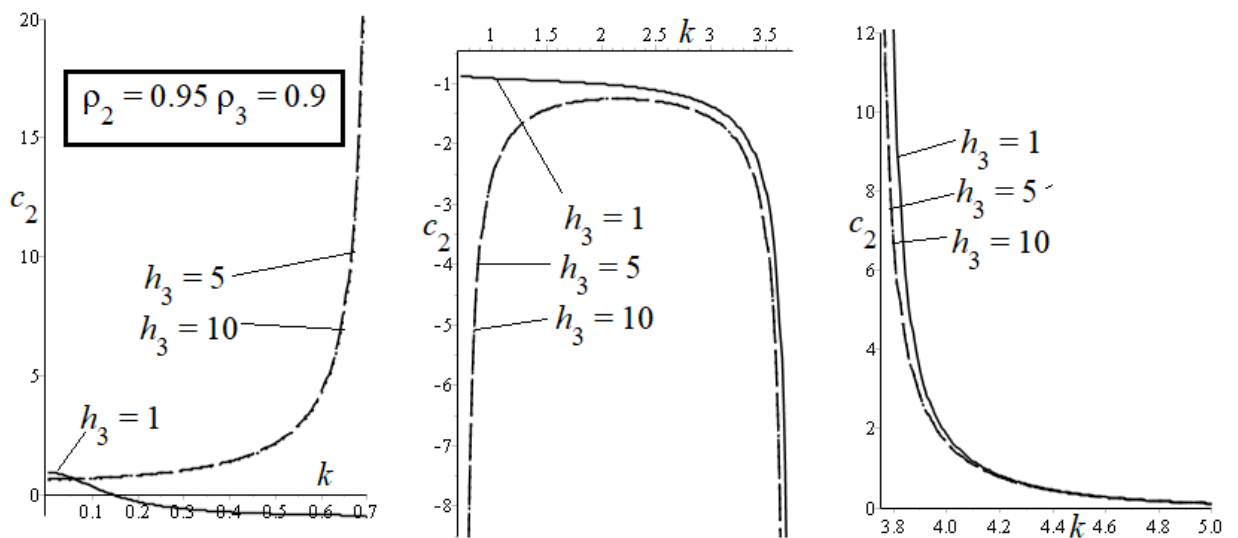
На рис. 3.31. зображено залежність величини c_2 від хвильового числа k для різних значень h_3 . У випадку 3.31. *a* на першому проміжку при збільшенні h_3 графік величини c_2 зростає пізніше, на другому проміжку графіки c_2 спочатку зростають, потім досягають локального мінімуму і зростають до граничного значення. Після деякого значення хвильового числа k графіки, що відповідають різним значенням h_3 , співпадають.



(a) $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$



(б) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$



(в) $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

Рис. 3.31. Залежність c_2 від k для різних значень h_3

У випадку 3.31. б при $h_3 = 1$ графік спадає на перших двох проміжках, на третьому – спадає до граничного значення близького до нуля. При $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ графіки відношення c_2 співпадають. На першому проміжку значення c_2 зростає зі збільшенням хвильового числа. На другому проміжку графік c_2 зростає, потім спадає. На третьому проміжку значення величини c_2 спадає, наближаючись до нуля.

У випадку 3.31. в поведінка графіків аналогічна 3.31. б.

Отже, зміна товщини h_3 має не дуже великий вплив на значення величини c_2 .

На рис. 3.32. представлено графіки залежності величини c_2 від k при зміні густини верхнього шару ρ_3 . У випадку 3.32. а на обох проміжках графік c_2 спадає, чим більше значення ρ_3 , тим пізніше спадає значення c_2 .

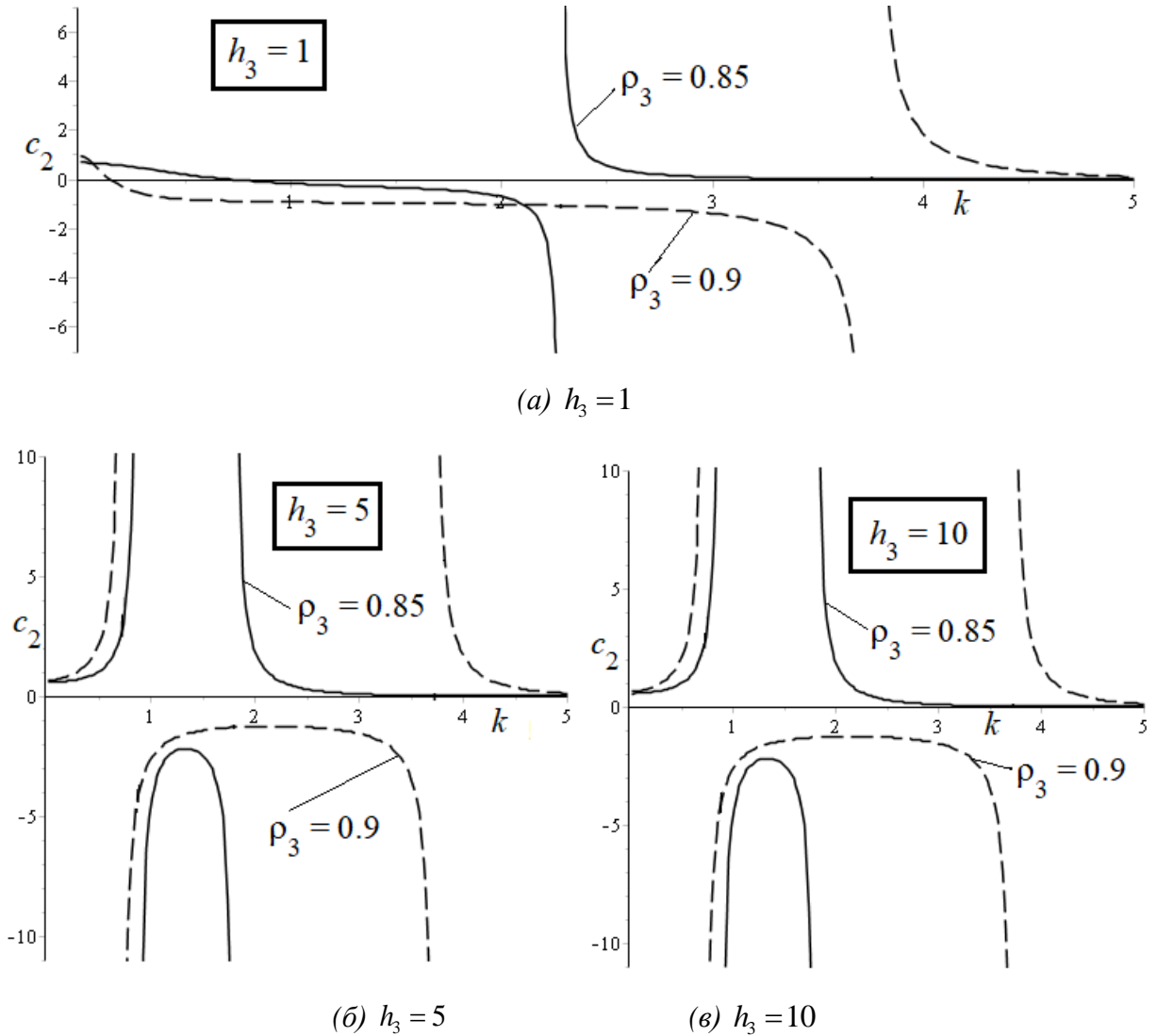


Рис. 3.32. Залежність c_2 від k при зміні густини верхнього шару

У випадках 3.32. б-в при $h_3 = 5$ та $h_3 = 10$ графіки відношення c_2 однакові. При великих значеннях k вплив густини ρ_3 помітніший. Отже, зміна густини ρ_3 достатньо впливає на зміну значення c_2 .

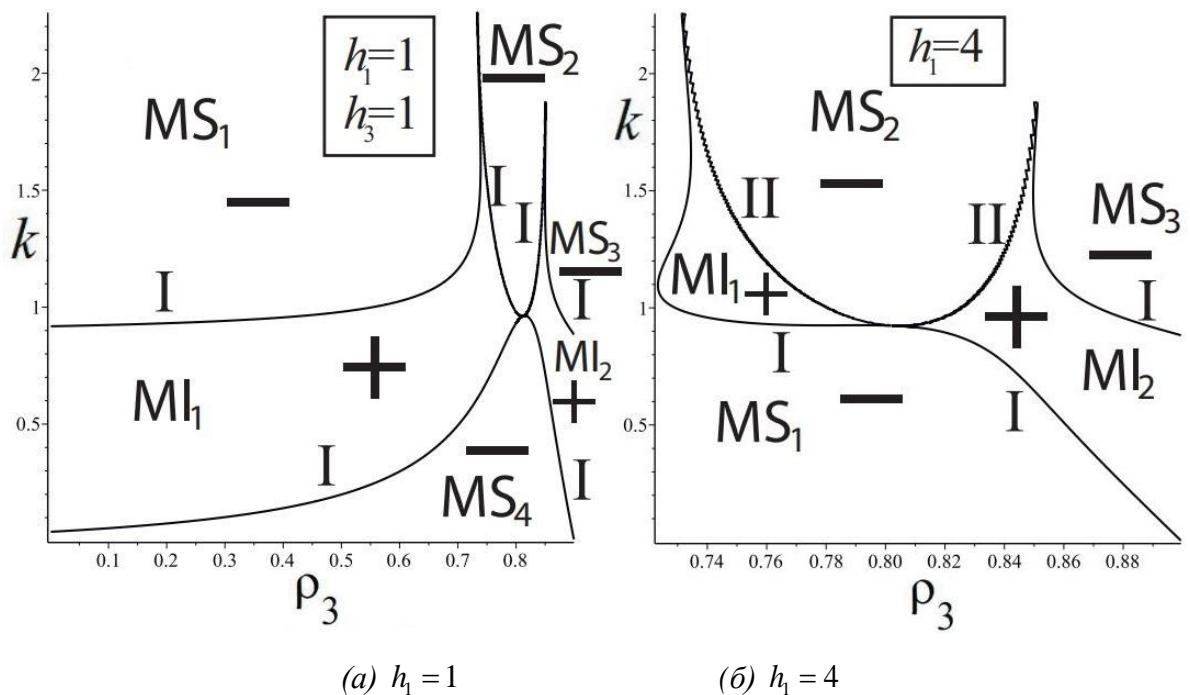
3.3. Дослідження умови модуляційної стійкості на поверхнях контакту тришарової гідродинамічної системи

Аналітичні перетворення, підстановка фізичних параметрів та графіки меж модуляційної стійкості виконано за допомогою математичного пакету Maple (додаток Г). Корені ω_1 та ω_2 обчислюються за формулами (2.24).

3.3.1. Аналіз залежності модуляційної стійкості досліджуваної системи від різних фізичних параметрів для першої пари коренів

Розглянемо графіки залежності меж модуляційної стійкості та нестійкості від товщини нижнього шару $h_1 = 1, 4, 7, 10$ у системі координат (ρ_3, k) для першої пари коренів ω_1 (рис. 3.33.). Інші параметри системи набувають таких значень: $\rho_2 = 0.9, h_2 = 1, h_3 = 1, A = 1, \bar{A} = 1, T_1 = 0, T_2 = 0$. У всіх випадках області модуляційної стійкості позначені «MS_i», області модуляційної нестійкості позначені «MI_i».

Графіки кривих, що розділяють області модуляційної стійкості та нестійкості, описуються рівняннями $L\omega'' = 0$ та $L\omega'' \rightarrow \infty$. На малюнках ці криві позначено «I» та «II» відповідно.



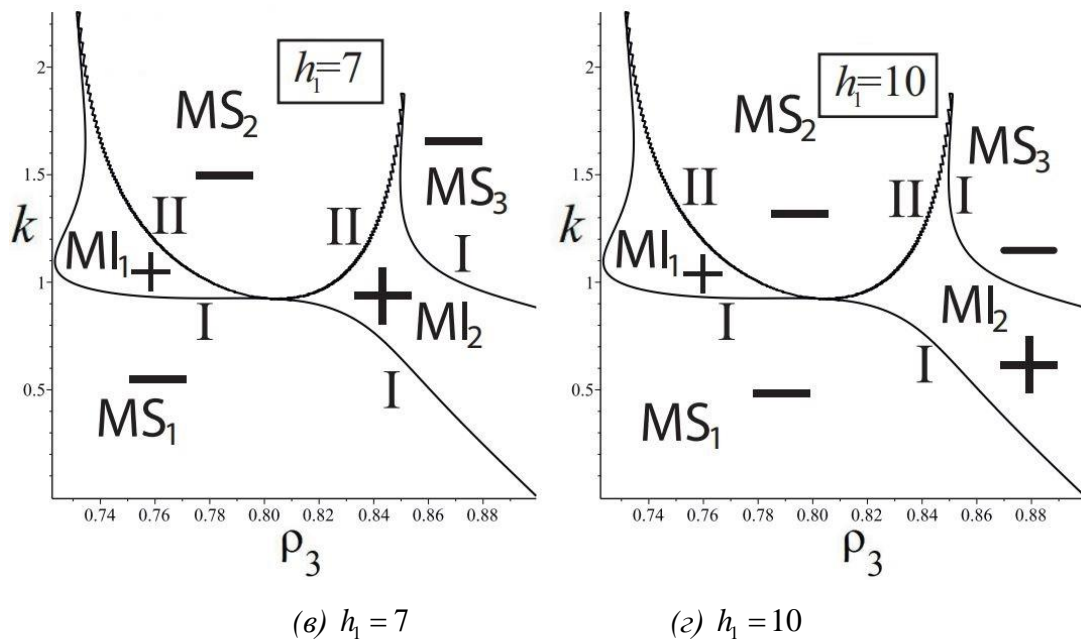


Рис. 3.33. Залежність модуляційної стійкості від товщини нижнього шару

З графіків видно, що при $h_1 = 1$ (рис. 3.33. а) налічується дві області модуляційної нестійкості (MI_1 та MI_2) та чотири (MS_1 , MS_2 , MS_3 , MS_4) області модуляційної стійкості. При $h_1 = 1$ для довгих гравітаційних хвиль наявна область модуляційної стійкості MS_4 . Також гравітаційним хвилям відповідають області MS_1 , MS_2 та MS_3 при $k < 1$. Капілярним хвилям відповідають області стійкості MS_1 , MS_2 та MS_3 при $k > 1$. При $h_1 = 4$ (рис. 3.33. б) області модуляційної стійкості MS_1 та MS_4 з'єднуються (утворену область позначено MS_1), далі при $h_1 = 7$ (рис. 3.33. в) та $h_1 = 10$ (рис. 3.33. з) межі областей модуляційної стійкості не змінюються. Отже, налічується три області модуляційної стійкості. Для областей стійкості MS_2 та MS_3 ситуація для гравітаційних та капілярних хвиль аналогічна випадку 3.33. а.

На рис. 3.34. а-в наведено графіки модуляційної стійкості та нестійкості для наступних значень товщини верхнього шару $h_3 = 4, 7, 10$ відповідно. Інші параметри системи набувають таких значень: $\rho_2 = 0.9$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, $A = 1$, $\bar{A} = 1$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$. З графіків видно, що при $h_3 = 4, 7, 10$ налічується дві області

модуляційної нестійкості (MI_1 та MI_2) та три області модуляційної стійкості (MS_1 , MS_2 , MS_3).

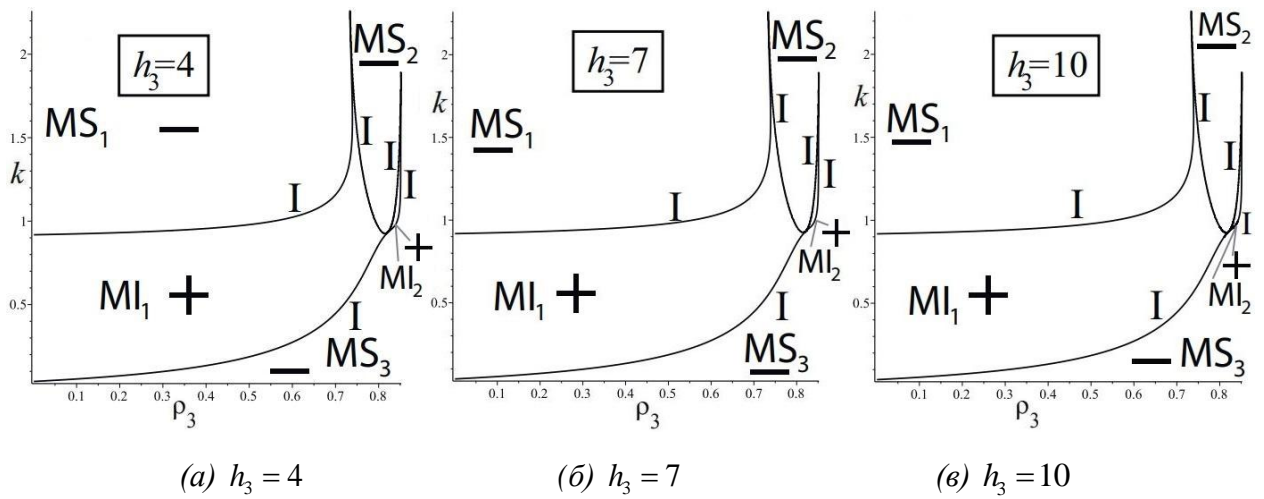


Рис. 3.34. Залежність модуляційної стійкості від товщини верхнього шару

Межі модуляційної стійкості та нестійкості при всіх трьох значеннях товщини верхнього шару h_3 не змінюються. Причому, порівнюючи дані графіки з випадком на рис. 3.33. *a*, видно, що дві області модуляційної стійкості MS_3 та MS_4 зливаються в одну (її позначено MS_3).

Гравітаційним хвилям відповідає нижня частина областей модуляційної стійкості MS_1 , MS_2 та MS_3 , де $k < 1$. Капілярним хвилям відповідають області стійкості MS_1 , MS_2 та MS_3 при $k > 1$. В області стійкості MS_3 гравітаційні хвилі переходять у капілярні.

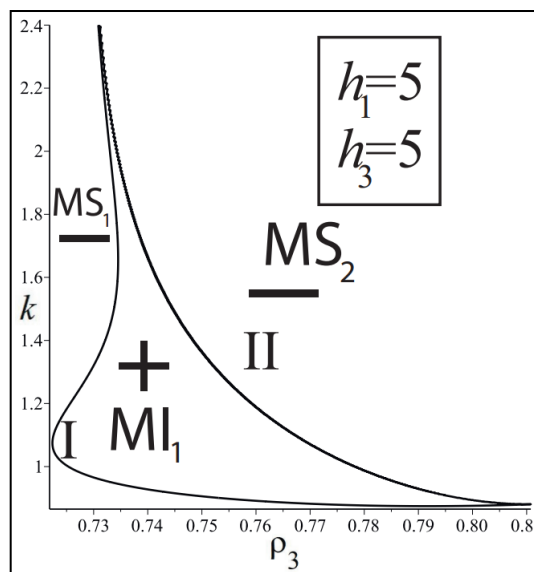


Рис. 3.35. Залежність модуляційної стійкості від товщин h_1 та h_3

Якщо одночасно змінити параметри $h_1 = 5$ та $h_3 = 5$ (рис. 3.35.), то налічується лише одна область модуляційної нестійкості MI_1 та дві області модуляційної стійкості MS_1 та MS_2 . Гравітаційним хвилям відповідають обидві області модуляційної стійкості при $k < 1$. Капілярним хвилям відповідають області стійкості MS_1 та MS_2 , де значення хвильового числа $k > 1$.

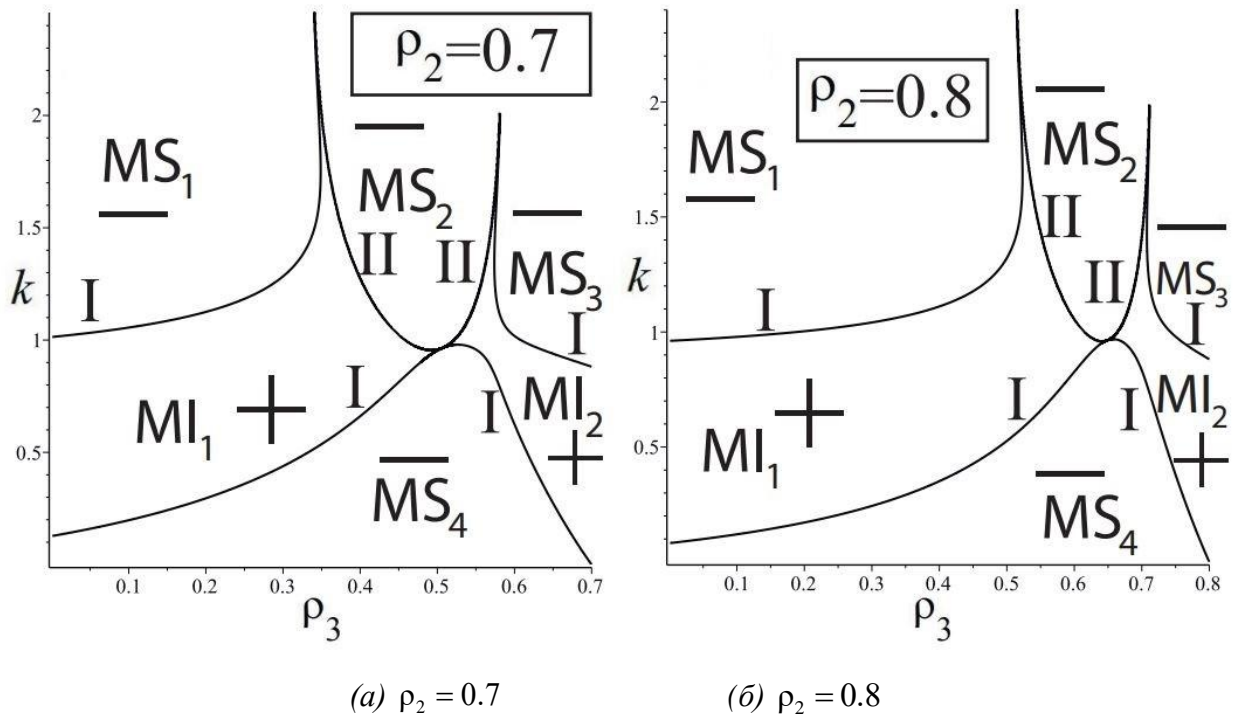


Рис. 3.36. Залежність модуляційної стійкості від густини ρ_2

На рис. 3.36. *a-b* наведено графіки модуляційної стійкості при різних значеннях густини середнього шару ρ_2 . Для даного випадку наявні дві області модуляційної нестійкості MI_1 , MI_2 та чотири області модуляційної стійкості MS_1 , MS_2 , MS_3 та MS_4 . В обох графіках гравітаційним хвилям відповідає область модуляційної стійкості MS_4 та частини областей MS_2 та MS_3 при $k < 1$. Капілярним хвилям відповідають область стійкості MS_1 та області MS_2 та MS_3 , де $k > 1$.

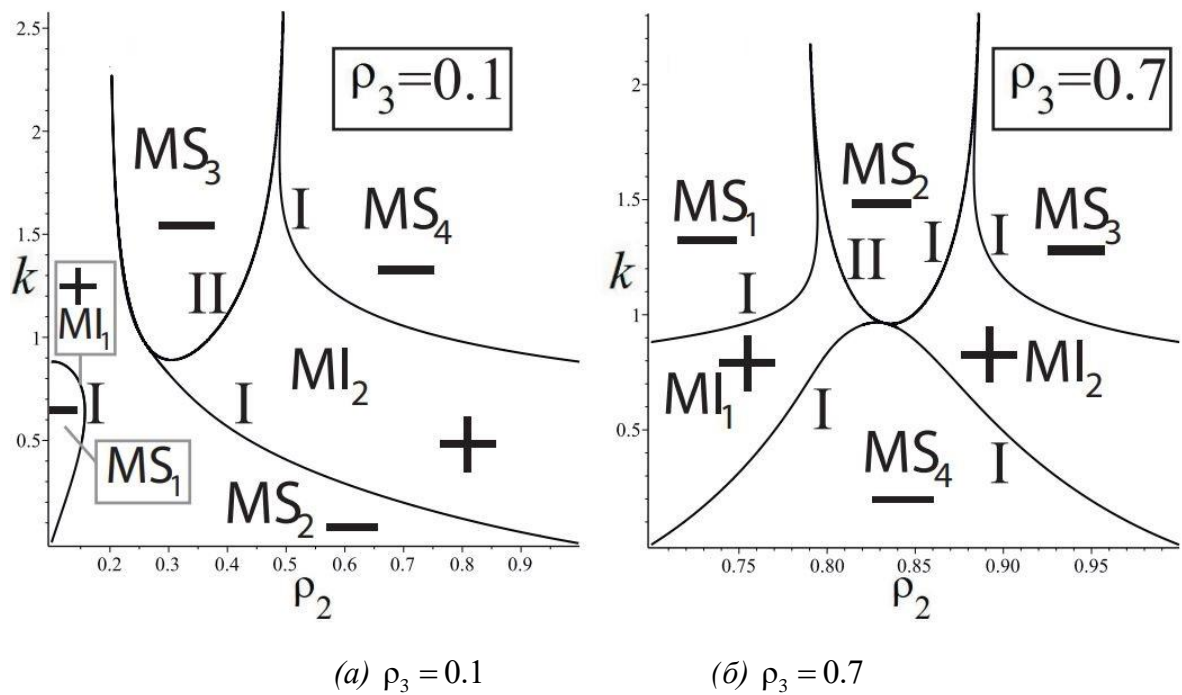


Рис. 3.37. Залежність модуляційної стійкості від ρ_3

На рис. 3.37. *a-б* наведено діаграми модуляційної стійкості та нестійкості у системі (ρ_2, k) при наступних значеннях густини верхнього шару $\rho_3 = 0.1, \rho_3 = 0.7$. З графіку видно, що у випадку $\rho_3 = 0.1$ (рис. 3.37. *a*) налічується чотири області модуляційної стійкості та дві області модуляційної нестійкості. Гравітаційним хвилям відповідають області модуляційної стійкості MS_2, MS_3 та MS_4 для $k < 1$ та область MS_1 . В області MS_2 гравітаційні хвилі переходять у капілярні. Капілярним хвилям відповідають області модуляційної стійкості MS_2, MS_3 та MS_4 при $k > 1$. Области модуляційної нестійкості не перетинаються.

У випадку $\rho_3 = 0.7$ (рис. 3.37. *б*) налічується дві області модуляційної нестійкості та чотири області модуляційної стійкості. Капілярним хвилям відповідають області модуляційної стійкості MS_1, MS_2 та MS_3 для $k > 1$.

Гравітаційним хвилям відповідають області стійкості $MS_1 - MS_3$ при $k < 1$ та область модуляційної стійкості MS_4 .

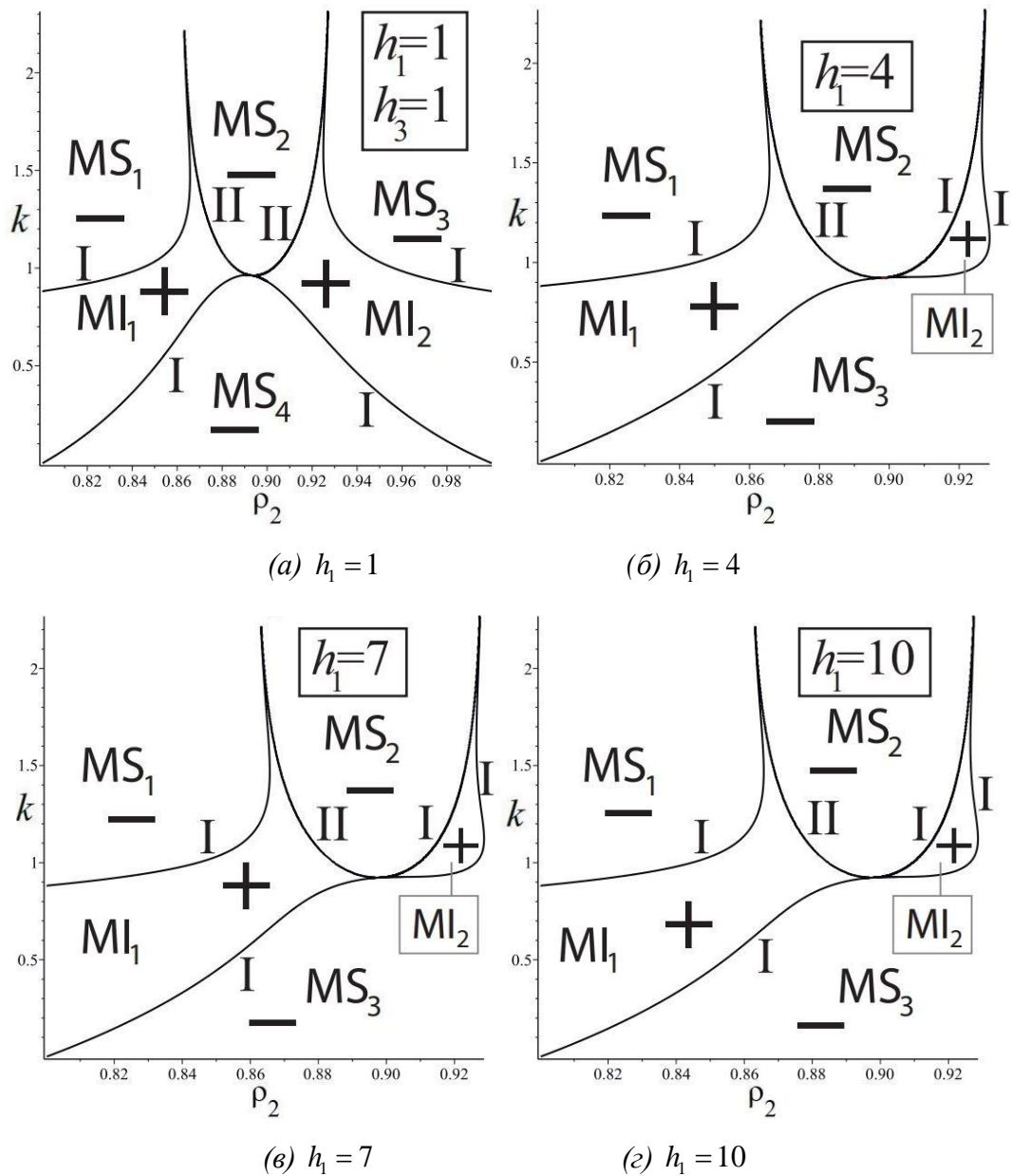


Рис. 3.38. Залежність модуляційної стійкості від товщини h_1 у системі (ρ_2, k)

На рис. 3.38. *a-г* зображено динаміку зміни меж модуляційної стійкості та нестійкості при різних значеннях $h_1 = 1, 4, 7, 10$ у системі (ρ_2, k) , $\rho_3 = 0.8$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1$, $A = 1$, $\bar{A} = 1$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ – фіксовані параметри системи. При $h_1 = 1$ налічується чотири області модуляційної стійкості та дві області модуляційної нестійкості. В даному випадку область стійкості MS_4 відповідає гравітаційним хвилям. Область стійкості MS_1 , MS_2 та MS_3 відповідають капілярним хвилям при $k > 1$, які переходять у гравітаційні, коли $k < 1$. При $h_1 = 4, 7, 10$ (рис. 3.38. *б-г*) помітно, що дві

області модуляційної стійкості MS_3 та MS_4 зливаються в одну (на рис. 3.38. б-г утворена область стійкості позначена MS_3).

Таким чином кількість областей модуляційної стійкості зменшується до трьох: MS_1 , MS_2 та MS_3 . Також при $h_1 = 4, 7, 10$ графіки меж модуляційної стійкості та нестійкості однакові.

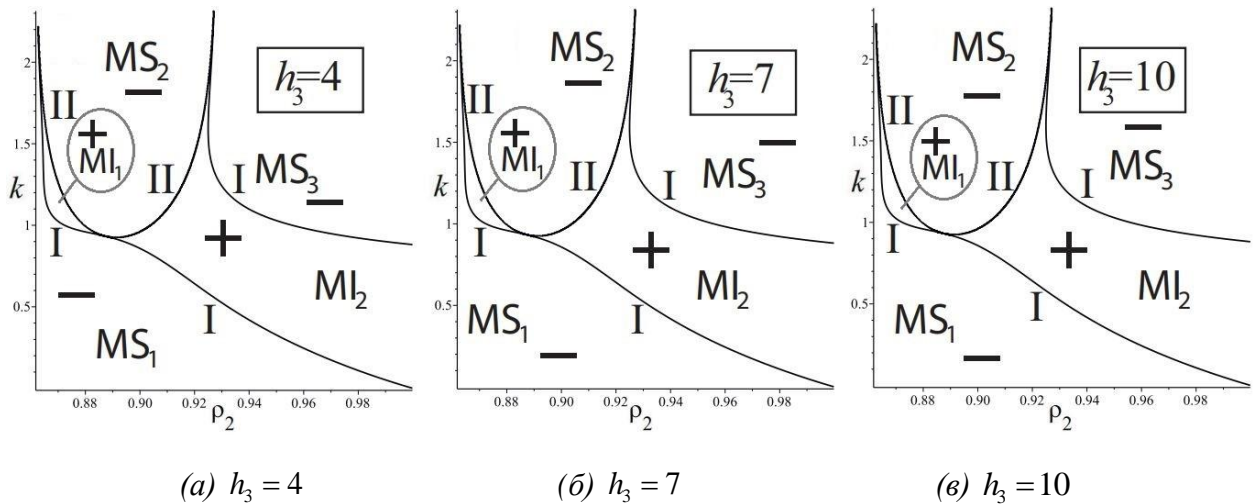


Рис. 3.39. Залежність модуляційної стійкості від h_3 у системі (ρ_2, k)

На рис. 3.39. а-в представлено залежність меж модуляційної стійкості від зміни товщини верхнього шару h_3 . З графіків видно, що при всіх трьох значеннях товщини верхнього шару $h_3 = 4, 7, 10$ наявні три області модуляційної стійкості та дві області модуляційної нестійкості. Змін у межах областей MS_1 , MS_2 та MS_3 не відбувається. Капілярним хвилям відповідають усі області стійкості при $k > 1$, гравітаційним хвилям відповідають усі області стійкості при $k < 1$. Порівнюючи дані графіки з випадком 3.38. а ($h_3 = 1$), бачимо, що дві області модуляційної стійкості MS_1 та MS_4 зливаються в одну, її позначено MS_1 .

3.3.2. Аналіз залежності модуляційної стійкості досліджуваної системи від різних фізичних параметрів для другої пари коренів

Розглянемо графіки залежності меж модуляційної стійкості та нестійкості для різних значень густини середнього шару ρ_2 у системі

координат (ρ_3, k) для другої пари коренів ω_2 . Фіксованим параметрам системи надаються такі значення: $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1, A = 1, \bar{A} = 1, T_1 = 0, T_2 = 0$.

Області модуляційної стійкості та криві $L\omega'' = 0$ та $L\omega'' \rightarrow \infty$ позначено аналогічно до попереднього пункту.

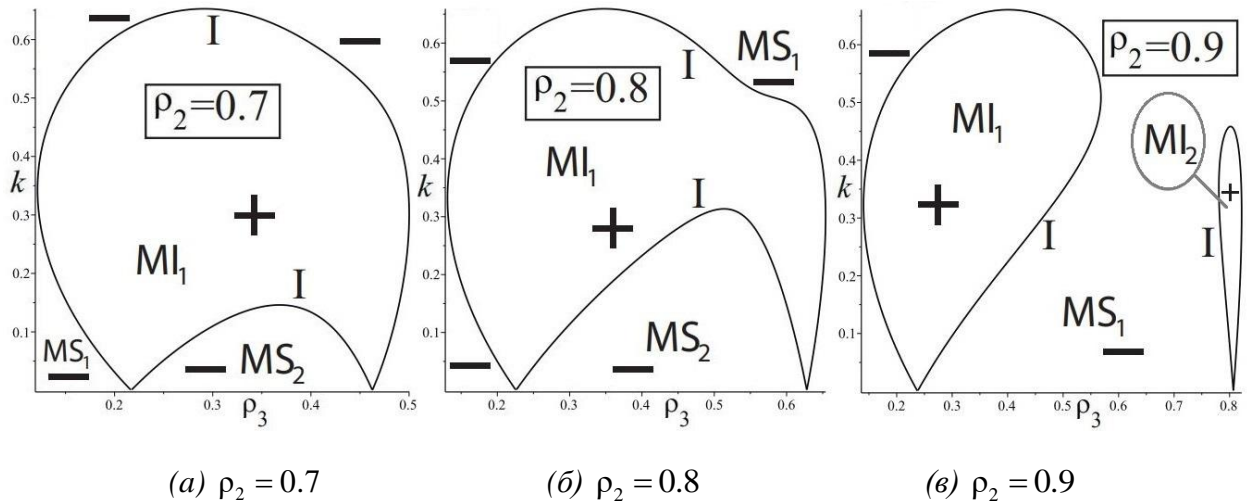


Рис. 3.40. Залежність модуляційної стійкості від зміни ρ_2

На рис. 3.40. зображено динаміку зміни меж модуляційної стійкості та нестійкості при різних значеннях густини середнього шару $\rho_2 = \{0.7, 0.8, 0.9\}$.

У випадку, коли $\rho_2 = 0.7$ (рис. 3.40. а) наявна одна область модуляційної нестійкості MI_1 , яка є замкненою, та дві області модуляційної стійкості MS_1 та MS_2 . Причому область стійкості MS_1 оточує область модуляційної нестійкості MI_1 . Обидві області модуляційної стійкості відповідають гравітаційним хвилям.

Аналогічно до попереднього випадку для $\rho_2 = 0.8$ (рис. 3.40. б) налічується дві області стійкості та одна замкнена область нестійкості, область стійкості MS_1 знаходиться навколо області модуляційної нестійкості MI_1 .

При $\rho_2 = 0.9$ (рис. 3.40. в) область модуляційної нестійкості ділиться на дві замкнені області нестійкості MI_1 та MI_2 . В свою чергу, області

модуляційної стійкості MS_1 та MS_2 з'єднуються між собою (утворену область позначено MS_1).

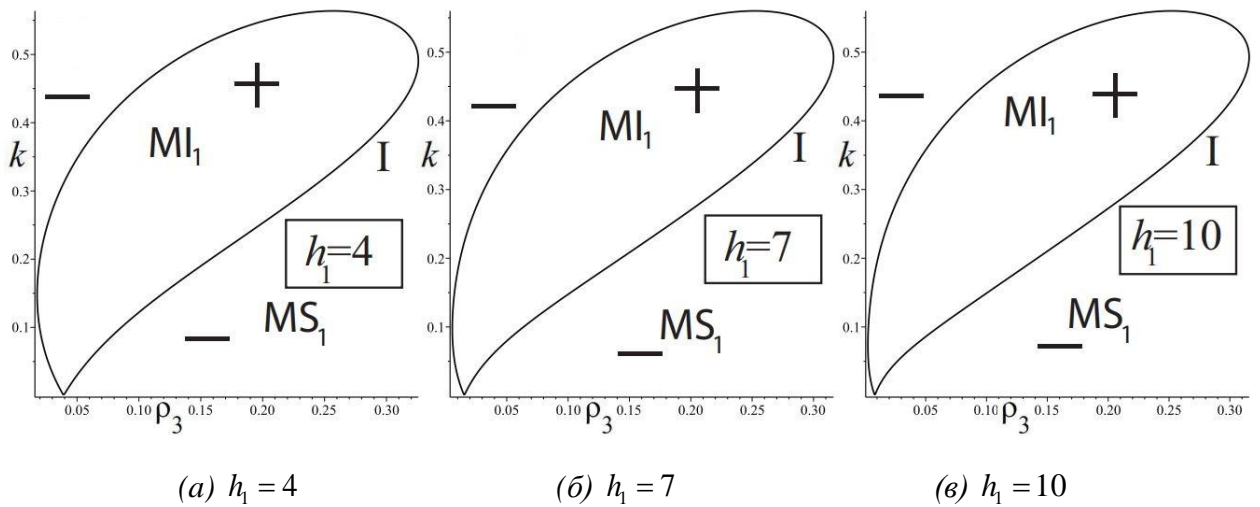


Рис. 3.41. Залежність модуляційної стійкості від h_1

На рис. 3.41. *a-v* проілюстровано динаміку зміни меж модуляційної стійкості та нестійкості за різних значень товщини нижнього шару h_1 .

Порівняно з попереднім графіком (рис. 3.40. *в*) при $h_1 = \{4, 7, 10\}$ кількість областей модуляційної нестійкості зменшується до однієї замкненої області MI_1 . Також наявна одна область модуляційної стійкості MS_1 , яка відповідає гравітаційним хвилям.

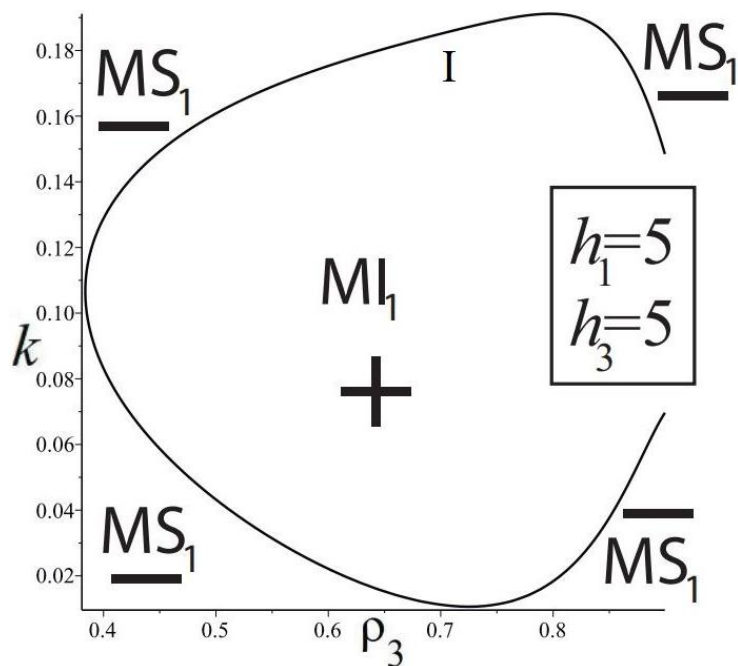


Рис. 3.42. Залежність модуляційної стійкості від h_1 та h_3

На рис. 3.42. представлено графік залежності модуляційної стійкості при одночасному збільшенні товщин нижнього й верхнього шарів на значення $h_1 = 5$ та $h_3 = 5$. Після порівняння отриманого графіка з попереднім графіком на рис. 3.40. в видно, що дві області модуляційної нестійкості MI_1 та MI_2 зливаються в одну, її позначено MI_1 . Як і в попередніх випадках область модуляційної стійкості MS_1 відповідає гравітаційним хвилям.

Нижче наведено графіки (рис. 3.43.) модуляційної стійкості та нестійкості при різних значеннях густини верхнього шару ρ_3 у системі координат (ρ_2, k) для другої пари коренів, $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1$, $A = 1$, $\bar{A} = 1$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ – фіксовані значення.

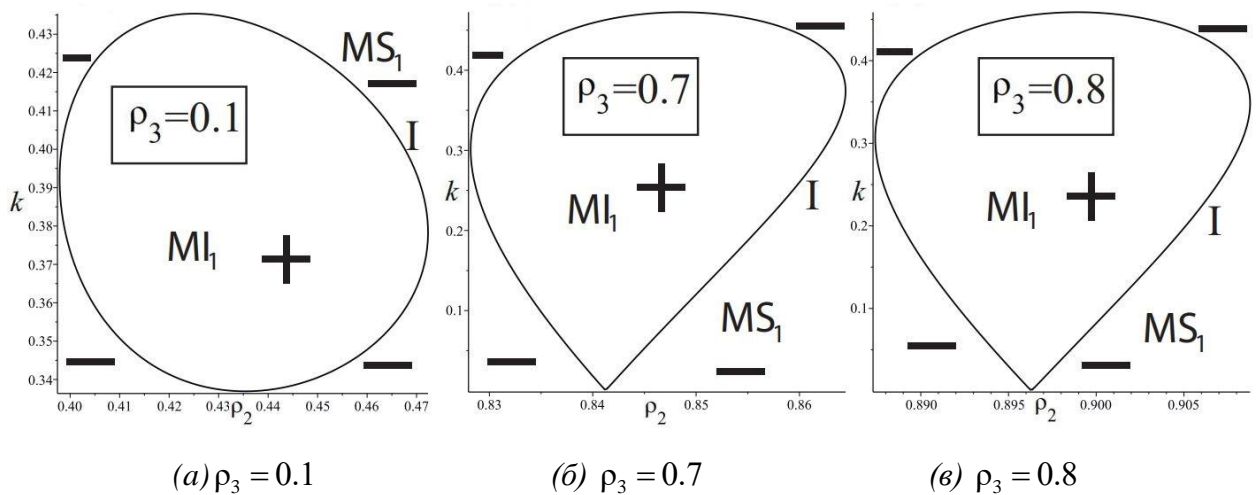


Рис. 3.43. Залежність модуляційної стійкості від ρ_3

В даному випадку для всіх трьох значень густини верхнього шару налічується одна область модуляційної стійкості та одна область модуляційної нестійкості. Область MS_1 відповідає гравітаційним хвилям. Область модуляційної нестійкості представляє собою замкнену область, оточену областю модуляційної стійкості.

3.4. Властивості хвильових пакетів на поверхнях контакту тришарової гідродинамічної системи

Графічні результати для дослідження форми хвильових пакетів на нижній та верхній поверхнях контакту, необхідні коефіцієнти та рівняння отриманов системі Maple. Корені ω_1 та ω_2 у пунктах 3.4.1. та 3.4.2. обчислюються за формулами (2.24).

3.4.1. Аналіз форми хвильового пакету на нижній поверхні контакту

Представимо коефіцієнти другого наближення наступним чином:

$$\begin{aligned} B_0^{[2]} &= B^* A \bar{A}, \bar{B}_0^{[2]} = B^* A \bar{A} \\ B_2^{[2]} &= \Lambda_1 A^2, \bar{B}_2^{[2]} = \Lambda_1 \bar{A}^2 \\ B_1^{[2]} &= \bar{B}_1^{[2]} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Формули відхилення нижньої поверхні контакту для перших двох наближень набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= A e^{i\theta} + \bar{A} e^{-i\theta} \\ \eta_{12} &= B^* A \bar{A} + \Lambda_1 A^2 e^{2i\theta} + cc, \end{aligned} \quad (3.4)$$

де cc – комплексно спряжена, A – обвідна хвильового пакету. \bar{A} – спряжена до обвідної хвильового пакету.

$$\begin{aligned} B^* &= \frac{1}{2(\rho_2 - 1)} \left[k ((\text{ch}^2(kh_1) + \text{sh}^2(kh_1)) k K_1^2 + 2K_1 \text{sh}(kh_1) \omega + \right. \\ &\left. + (((-\text{ch}^2(kh_2) - \text{sh}^2(kh_2)) K_2^2 - 2K_2 K_3 \text{ch}(kh_2) - K_3^2) k + 2K_2 \text{sh}(kh_2) \omega) \rho_2) \right] \\ \Lambda_1 &= \frac{ik \left(iK_1 \text{ch}(kh_1) k - (K_1 \text{ch}(kh_1) - K_2 \text{ch}(kh_2) - K_3) ik + \frac{(U_1 U_2 - U_3) e^{-2kh_2}}{U_4} - U_1 e^{2kh_2} \right)}{\omega} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тут $S_1 - S_6$ задаються виразами (2.37), а коефіцієнти $U_1 - U_4$ дорівнюють:

$$U_1 = -\frac{1}{2} \frac{ik(S_1 + S_2 \omega^4 + S_3 \omega^3 + S_4 \omega^2 + S_5 \omega)}{S_6},$$

$$U_2 = -\frac{1}{2} i((4i\rho_2 \omega^2 - 8iT_1 k^3 + 2ik\rho_2 - 2ik) \text{sh}(2kh_1) + (8i \text{ch}^2(kh_1) - 4i) \omega^2) e^{2kh_2}$$

$$U_3 = \frac{1}{2}i \left[\left((-8T_1k^4 + (-2K_3\omega\rho_2 + 2\rho_2 - 2)k^2)K_2\text{ch}(kh_2) - 8K_3T_1k^4 + ((-K_2^2\omega - K_3^2\omega + 2K_3)\rho_2 + K_1^2\omega - 2K_3)k^2 + (K_2\text{sh}(kh_2)\rho_2 + K_1\text{sh}(kh_1))2\omega^2k \right)\text{sh}(2kh_1) + \right. \\ \left. + ((8K_2\text{ch}^2(kh_1) - 4K_2)\omega^2\text{ch}(kh_2) + (-8K_1\text{ch}^3(kh_1) + 8K_3\text{ch}^2(kh_1) + 4K_1\text{ch}(kh_1) - 4K_3)\omega^2)k \right]$$

$$U_4 = e^{-2kh_2} \left((-4T_1k^3 - 2\omega^2\rho_2 + k(\rho_2 - 1))\text{sh}(2kh_1) + (4\text{ch}^2(kh_1) - 2)\omega^2 \right) \quad (3.6)$$

Після підстановки отриманого розв'язку (2.51) у рівняння (3.4) з урахуванням розкладу (2.16) за методом багатомаштабних розвинень, отримується рівняння (3.7), яким визначається форма хвильового пакету на нижній поверхні контакту:

$$\eta_1(x, t) = 2a \cos(kx - \tilde{\omega}t) + \alpha a^2 \left[2B^* + 2\Lambda_1 \cos(2(kx - \tilde{\omega}t)) \right], \quad (3.7)$$

де $\tilde{\omega} = \omega - a^2\alpha^2\omega^{-1}L$

З отриманого рівняння видно, що для дослідження форми поверхні контакту потрібно визначити знак коефіцієнту $\Lambda_1(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) = \frac{L_1}{L_2}$.

При переході через криву $L_1 = 0$, вздовж якої $\Lambda_1(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) = 0$, або $L_2 = 0$, вздовж якої $\Lambda_1(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) \rightarrow \infty$, знак величини Λ_1 змінюється на протилежний.

Нижче на рис. 3.44. наведений графік знакосталості величини Λ_1 у системі (ρ_2, k) для першої пари частот ω_1 для наступних фіксованих значень параметрів: $\rho_3 = 0.8, T_1 = 0, T_2 = 0, h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$. З графіку видно, що криві $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ розбивають площину на 5 областей. В областях S_1, S_3, S_4 – $\Lambda_1 > 0$, а в областях S_2, S_5 – $\Lambda_1 < 0$.

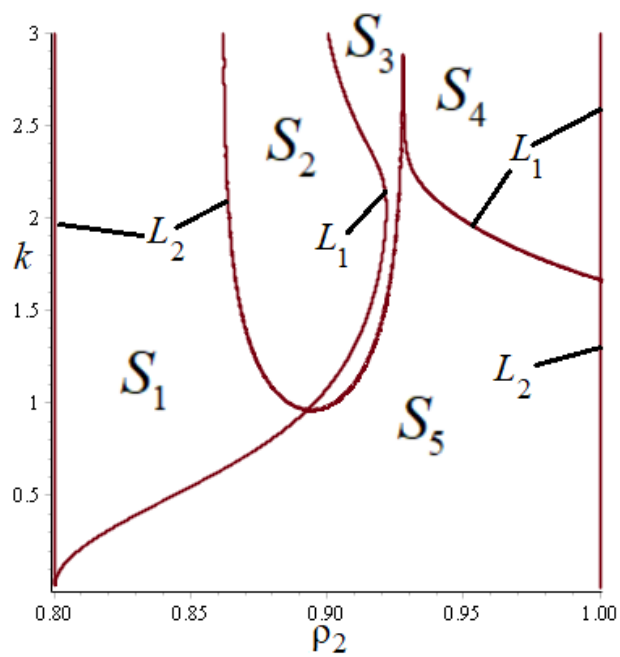


Рис. 3.44. Области знакосталості Λ_1

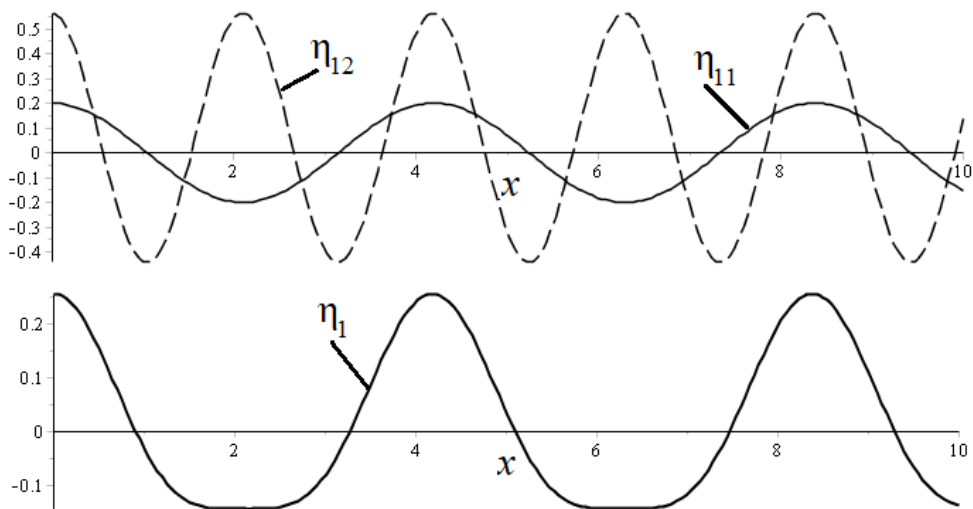


Рис. 3.45. $\Lambda_1 > 0$

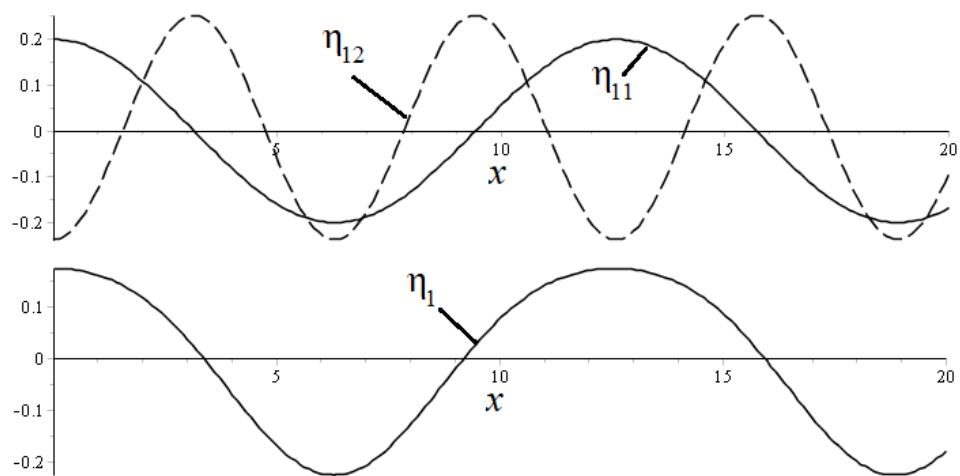


Рис. 3.46. $\Lambda_1 < 0$

На рис. 3.45. і 3.46. наведено графіки перших двох гармонік η_{11} та η_{12} та відхилення поверхні контакту η_1 для випадків $\Lambda_1 > 0$ та $\Lambda_1 < 0$ відповідно для першої пари частот ω_1 . Фіксовані параметри набувають таких значень: $t = 0, a = 0.1, \alpha = 0.1, \rho_2 = 0.85, k = 1.5$ (рис. 3.45.) та $\rho_2 = 0.9, k = 0.5$ (рис. 3.46.).

У випадку $\Lambda_1 > 0$ амплітуда першої гармоніки η_{11} значно менша за амплітуду другої η_{12} . Максимум другої гармоніки η_{12} співпадає з мінімумом першої η_{11} , далі наступний максимум η_{12} співпадає з максимумом η_{11} . Це призводить до загострення гребнів та затуплення підшв. Отже, в областях S_1, S_3, S_4 хвиля має \cup - подібну форму.

Аналізуючи випадок $\Lambda_1 < 0$ (рис. 3.46.), видно, що амплітуда першої гармоніки η_{11} менша за амплітуду другої гармоніки η_{12} . Мінімуми η_{12} і η_{11} співпадають, наступний мінімум другої гармоніки η_{12} співпадає з максимумом першої гармоніки η_{11} . З цього слідує, що в областях S_2, S_5 хвиля має \cap - подібну форму.

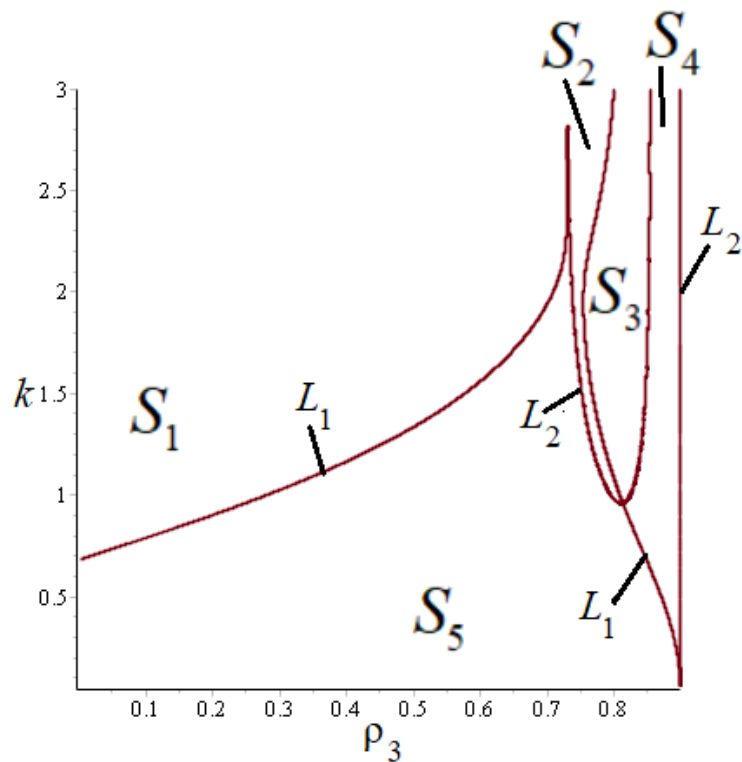


Рис. 3.47. Области знакосталості Λ_1

На рис. 3.47. наведений графік знакосталості рівняння Λ_1 у системі (ρ_3, k) для першої пари частот ω_1 для наступних значень: $\rho_2 = 0.9, T_1 = 0, T_2 = 0, h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$. Аналогічно до попереднього графіка (рис. 3.44.) $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ розбивають площину на 5 областей. В областях S_1, S_2, S_4 – $\Lambda_1 > 0$, а в областях S_3, S_5 – $\Lambda_1 < 0$.

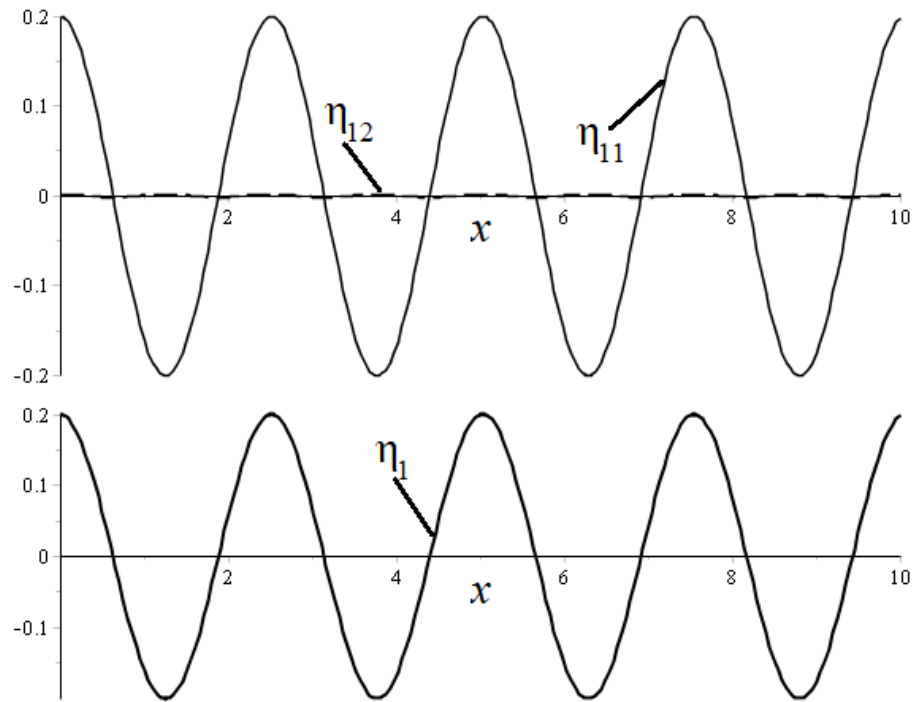


Рис. 3.48. $\Lambda_1 > 0$

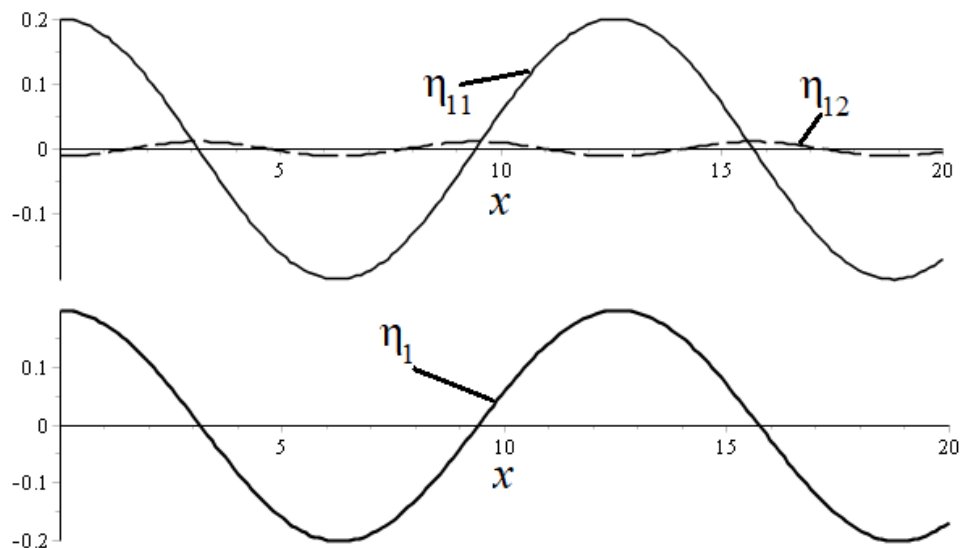


Рис. 3.49. $\Lambda_1 < 0$

На рис. 3.48. і 3.49. наведені графіки перших двох гармонік η_{11} , η_{12} та відхилення поверхні контакту η_1 для випадків $\Lambda_1 > 0$ та $\Lambda_1 < 0$ відповідно для першої пари частот ω_1 .

Для $\Lambda_1 > 0$ фіксовані параметри густини верхнього шару й хвильового числа набувають значень: $\rho_3 = 0.7, k = 2.5$. На рис. 3.48. помітно, що амплітуда першої гармоніки значно перевищує амплітуду другої. Максимум η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} , далі максимуми гармонік η_{11} та η_{12} співпадають. Це означає, що в областях S_1, S_2, S_4 відбувається незначне затушення підошв і загострення гребнів. Отже, хвильовий пакет має \cup - подібну форму.

На рис. 3.49. амплітуда другої гармоніки η_{12} також значно менша за амплітуду першої гармоніки η_{11} , проте порівняно з рис. 3.48., амплітуда другої гармоніки більша. Фіксовані параметри у випадку $\Lambda_1 < 0$ набувають наступних значень: $\rho_3 = 0.4, k = 0.5$. З графіку видно, що мінімум другої гармоніки η_{12} співпадає з мінімумом першої гармоніки η_{11} . Потім мінімум η_{12} співпадає з максимумом η_{11} . Як наслідок, в областях S_3, S_5 відбувається загострення підошв і затушення гребнів, тобто хвиля має \cap - подібну форму.

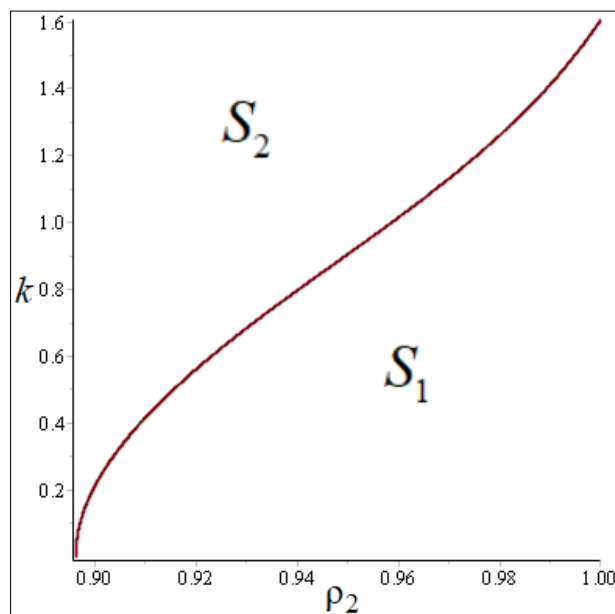


Рис. 3.50. Области знакосталості Λ_1

На рис. 3.50. наведено графік знакосталості рівняння Λ_1 у системі (ρ_2, k) для другої пари частот ω_2 . Крива ділить площину на дві області. В області S_1 $-\Lambda_1 < 0$, а в області S_2 $-\Lambda_1 > 0$.

На рис. 3.51. і 3.52. наведені графіки перших двох гармонік η_{11} та η_{12} та відхилення поверхні контакту η_1 для випадків $\Lambda_1 > 0$ та $\Lambda_1 < 0$ відповідно для другої пари частот ω_2 .

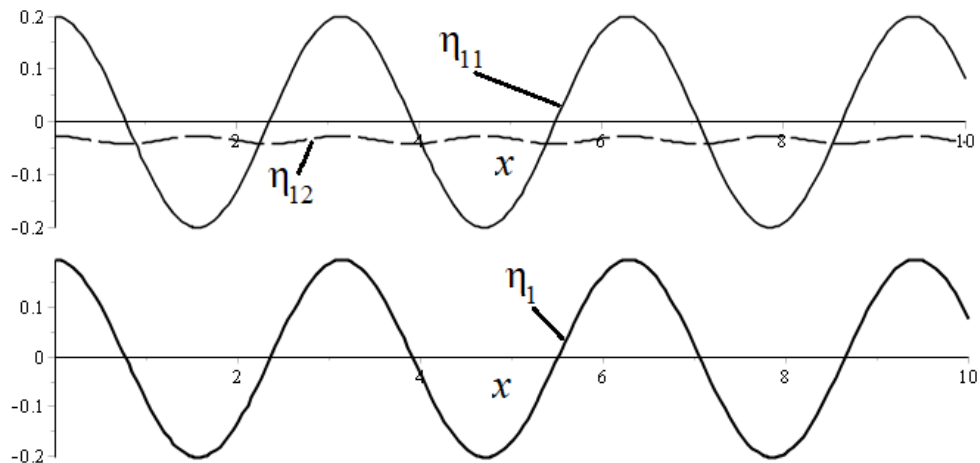


Рис. 3.51. $\Lambda_1 > 0$

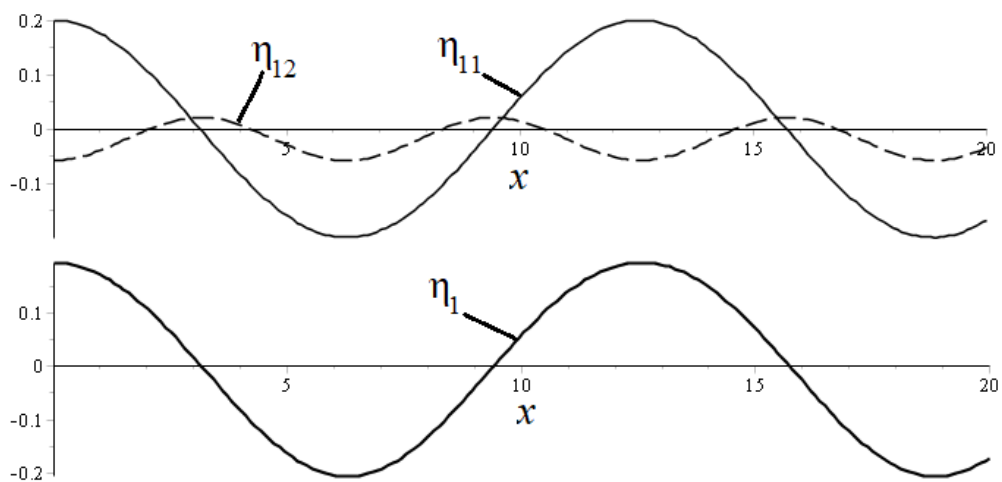


Рис. 3.52. $\Lambda_1 < 0$

Для $\Lambda_1 > 0$ (рис. 3.51.) параметри густини середнього шару та хвильового числа наступні: $\rho_2 = 0.98, k = 2$. З графіку видно, що амплітуда першої гармоніки η_{11} значно більша за амплітуду другої гармоніки η_{12} . Максимум η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} , далі наступний максимум η_{12}

співпадає з максимумом η_{11} . Це призводить до загострення підошв і затуплення гребнів. Тобто в області S_2 хвиля має \cap - подібну форму.

На графіку 3.52. при $\Lambda_1 < 0$ ($\rho_2 = 0.98, k = 0.5$) амплітуда другої гармоніки більша ніж у випадку на рис. 3.51. Проте амплітуда η_{12} також значно менша за амплітуду η_{11} . Мінімуми η_{11} і η_{12} співпадають, далі максимум η_{11} співпадає з мінімумом η_{12} . В результаті форма хвильового пакету також набуває \cap - подібної форми.

На рис. 3.53. представлено графік знакосталості рівняння Λ_1 у системі (ρ_3, k) для другої пари частот ω_2 . Крива розбиває площину на дві області. В області $S_2 - \Lambda_1 > 0$, а в області $S_1 - \Lambda_1 < 0$.

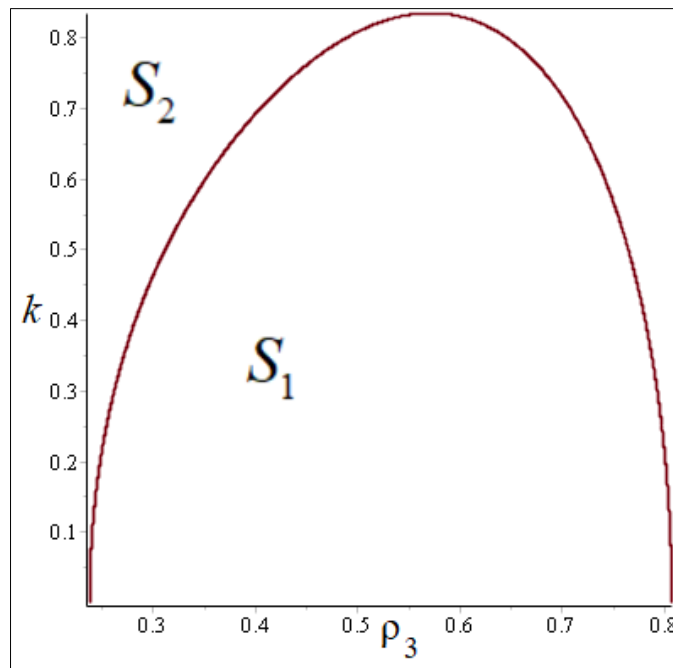


Рис. 3.53. Области знакосталості Λ_1

На рис. 3.54. наведено графіки відхилення нижньої поверхні контакту та перших двох гармонік η_{11} та η_{12} у випадку $\Lambda_1 > 0$ для таких фіксованих значень $\rho_3 = 0.3, k = 1$. Амплітуда другої гармоніки менша за амплітуду першої. Максимум η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} , наступний максимум другої гармоніки співпадає з максимумом першої. Як наслідок, хвиля має \cap - подібну форму.

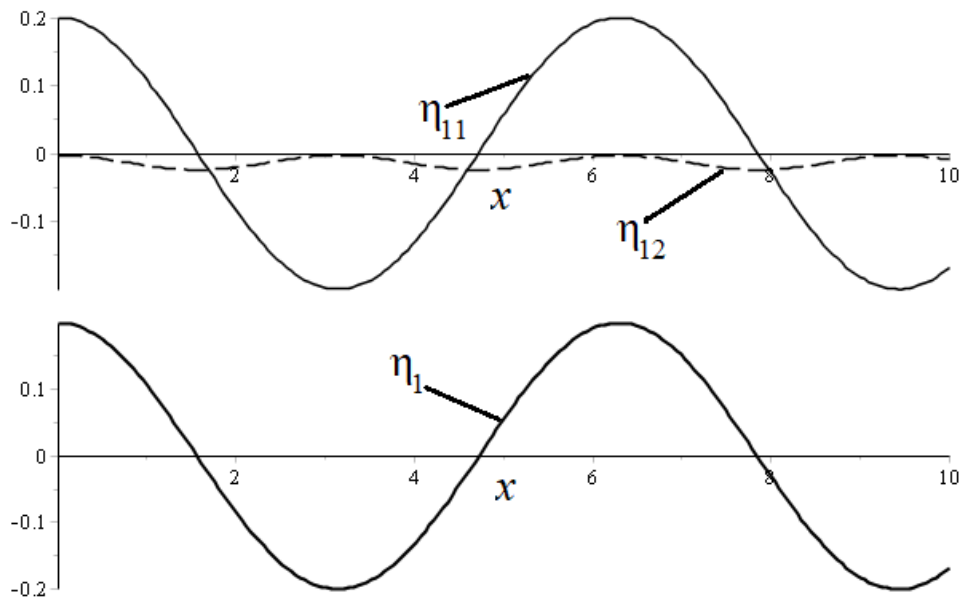


Рис. 3.54. $\Lambda_1 > 0$

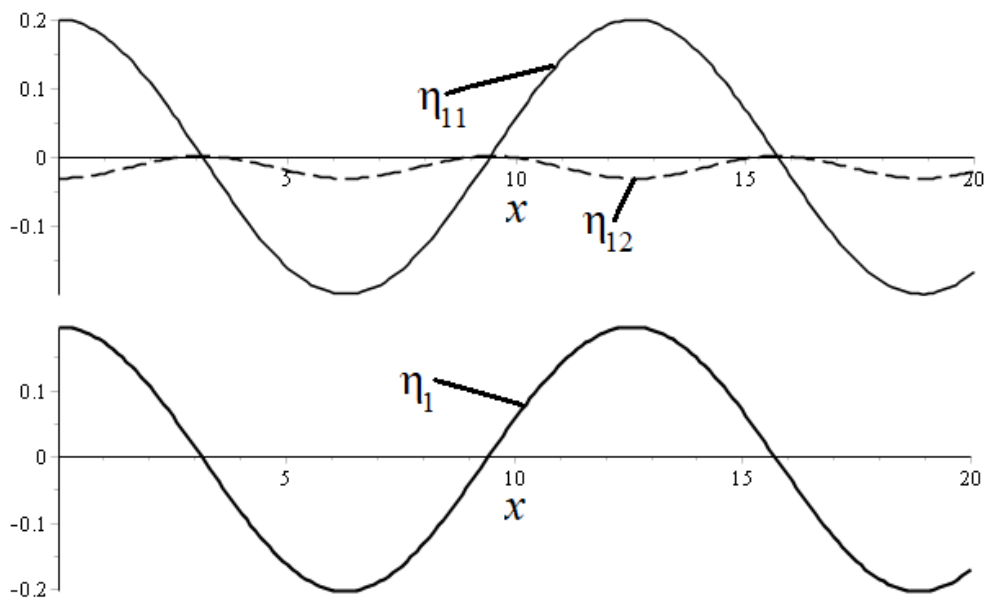


Рис. 3.55. $\Lambda_1 < 0$

Якщо $\Lambda_1 < 0$ ($\rho_3 = 0.5, k = 0.5$) (рис. 3.55.) амплітуда другої гармоніки помітно менша за амплітуду першої. Мінімум другої гармоніки η_{12} співпадає з мінімумом η_{11} , наступний мінімум другої гармоніки співпадає з максимумом першої. Отже, хвиля також має \cap - подібну форму.

3.4.2. Аналіз форми хвильового пакету на верхній поверхні контакту.

Позначимо:

$$\begin{aligned} C_0^{[2]} &= C^* A \bar{A}, \bar{C}_0^{[2]} = C^* A \bar{A} \\ C_2^{[2]} &= \Lambda_2 A^2, \bar{C}_2^{[2]} = \Lambda_2 \bar{A}^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отже, для верхньої поверхні контакту формули відхилення мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \eta_{21} &= K_5 A \cdot e^{i\theta} + K_5 \bar{A} \cdot e^{-i\theta} \\ \eta_{22} &= C^* \cdot A \bar{A} + \Lambda_2 \cdot A^2 e^{2i\theta} + cc, \end{aligned} \quad (3.9)$$

де cc – комплексно спряжена, A – обвідна хвильового пакету. \bar{A} – спряжена до обвідної хвильового пакету.

Коефіцієнт $C_1^{[2]}$ не враховується.

$$\begin{aligned} C^* &= -\frac{1}{2(\rho_2 - \rho_3)} \left[k \left((-\text{ch}^2(kh_3) - \text{sh}^2(kh_3)) k K_4^2 + 2K_4 K_5 \text{sh}(kh_3) \omega \right) \rho_3 + \right. \\ &\quad \left. + \left((\text{ch}^2(kh_2) + \text{sh}^2(kh_2)) K_3^2 + 2K_2 K_3 \text{ch}(kh_2) + K_2^2 \right) k + 2K_3 K_5 \text{sh}(kh_2) \omega \right) \rho_2 \Big] \\ \Lambda_2 &= \frac{ik \left(iK_4 K_5 \text{ch}(kh_3) k + i(K_3 \text{ch}(kh_2) - K_4 \text{ch}(kh_3) + K_2) K_5 k + \frac{(U_1 U_2 - U_3)}{U_4} - U_1 \right)}{\omega} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Коефіцієнти $U_1 - U_4$ задаються виразами (3.6).

Після виконання аналогічних до пункту 3.4.1. перетворень та підстановок отримуємо формулу (3.11), яка визначає форму хвильового пакету на верхній поверхні контакту:

$$\eta_2(x, t) = 2K_5 a \cos(kx - \tilde{\omega}t) + \alpha a^2 \left[2C^* + 2\Lambda_2 \cos(2(kx - \tilde{\omega}t)) \right] \quad (3.11)$$

З даного рівняння видно, що для дослідження форми верхньої поверхні контакту потрібно визначити знак коефіцієнта $\Lambda_2 = \frac{M_1}{M_2}$. При переході через криву $M_1 = 0$, уздовж якої $\Lambda_2(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) = 0$, або $M_2 = 0$, уздовж якої $\Lambda_2(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) \rightarrow \infty$, величина Λ_2 змінює знак.

На рис. 3.56. представлений графік знакосталості коефіцієнта Λ_2 верхньої поверхні контакту в системі (ρ_2, k) для першої пари коренів ω_1 .

Криві $M_1 = 0, M_2 = 0$ розділяють площину на чотири області. В областях $S_1, S_3 - \Lambda_2 > 0$, а в областях $S_2, S_4 - \Lambda_2 < 0$.

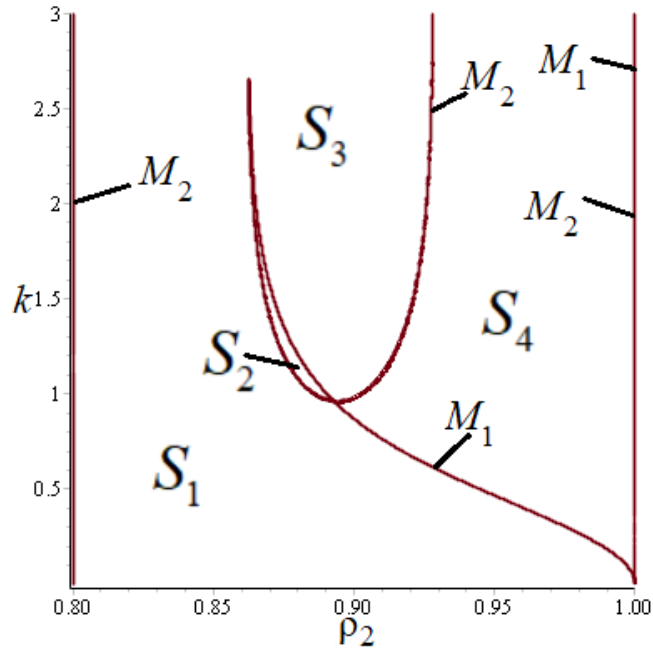


Рис. 3.56. Области знакосталості Λ_2

Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 3.57.) фіксовані параметри набувають значень $\rho_2 = 0.85, k = 1$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 3.58.) фіксовані параметри набувають значень $\rho_2 = 0.95, k = 2$. Інші параметри аналогічні попереднім випадкам.

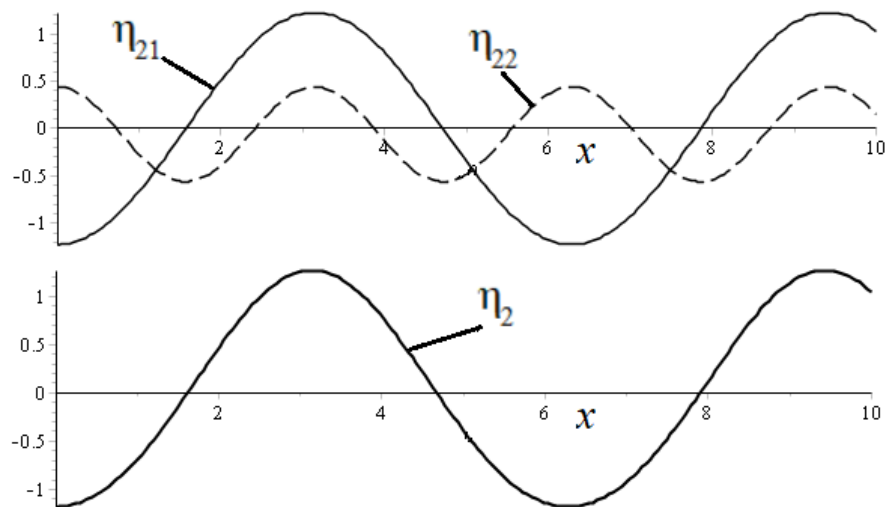


Рис. 3.57. $\Lambda_2 > 0$

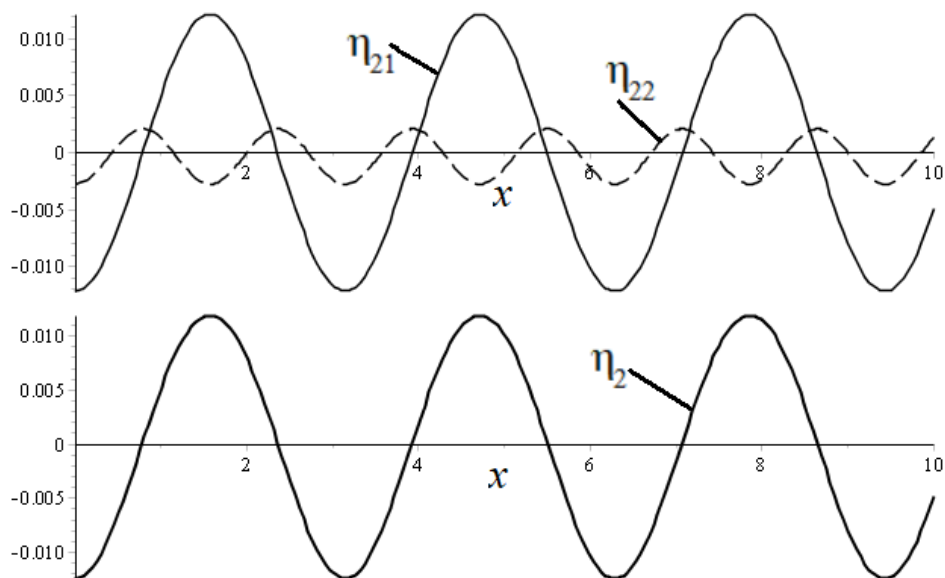


Рис. 3.58. $\Lambda_2 < 0$

Аналізуючи графік 3.57. помітно, що амплітуда першої гармоніки η_{21} більша за амплітуду другої гармоніки η_{22} , максимум η_{22} співпадає з максимумом η_{21} , наступний максимум η_{22} навпаки співпадає з мінімумом η_{21} . Отже, в областях S_1, S_3 , у яких $\Lambda_2 > 0$, спостерігається загострення гребнів і затушення підосів, тобто хвиля η_2 у такому випадку матиме \cup - подібну форму.

На рис. 3.58. представлений випадок, коли $\Lambda_2 < 0$. Амплітуда другої гармоніки менша за амплітуду першої. Мінімум другої гармоніки співпадає з максимумом першої, далі мінімуми η_{21} та η_{22} співпадають. Отже, в областях S_2, S_4 спостерігається загострення підосів і затушення гребнів, тобто форма хвилі має \cap - подібну форму.

На рис. 3.59. представлені графіки кривих $M_1 = 0, M_2 = 0$ коефіцієнта Λ_2 , що розділяють площину (ρ_3, k) на чотири області для першої пари коренів. В областях $S_1, S_3 - \Lambda_2 < 0$, в областях $S_2, S_4 - \Lambda_2 > 0$.

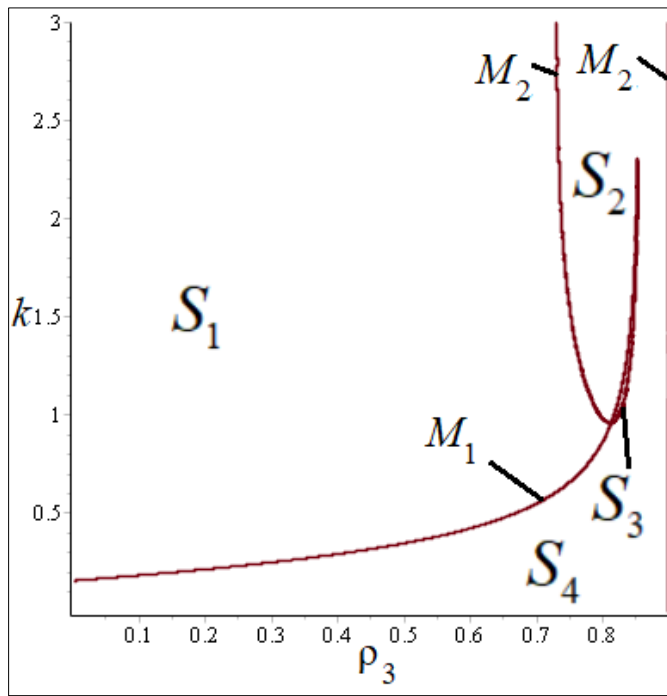


Рис. 3.59. Области знакосталості Λ_2

Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 3.60.) фіксовані параметри набувають значень $\rho_3 = 0.8, k = 2$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 3.61.) фіксовані параметри набувають значень $\rho_3 = 0.5, k = 2$. З рис. 3.60. видно, що амплітуда другої гармоніки η_{22} значно менша за амплітуду першої гармоніки η_{21} . Максимуми η_{21} та η_{22} співпадають, далі максимум η_{22} співпадає з мінімумом η_{21} . Така ситуація означає, що в областях S_2, S_4 відбувається загострення гребнів та затушення підшв. Отже, хвиля має \cup - подібну форму.

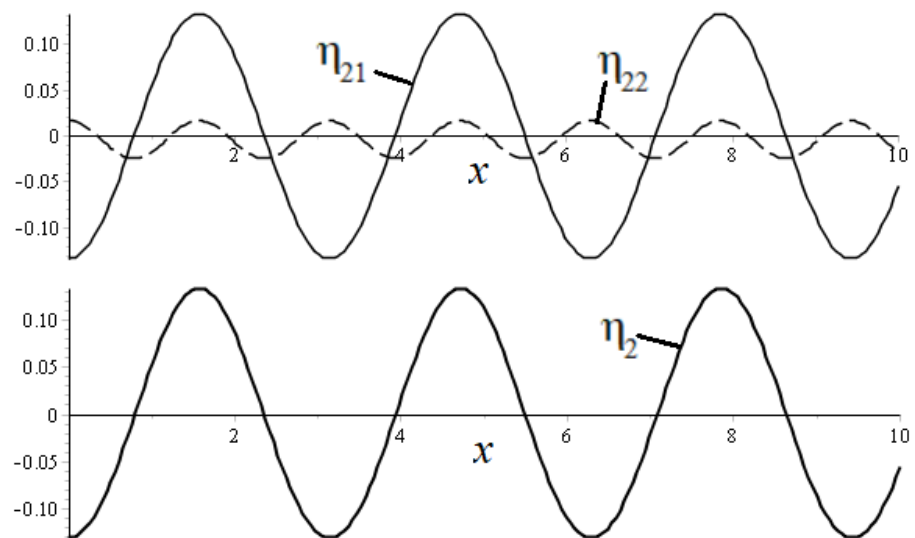


Рис. 3.60. $\Lambda_2 > 0$

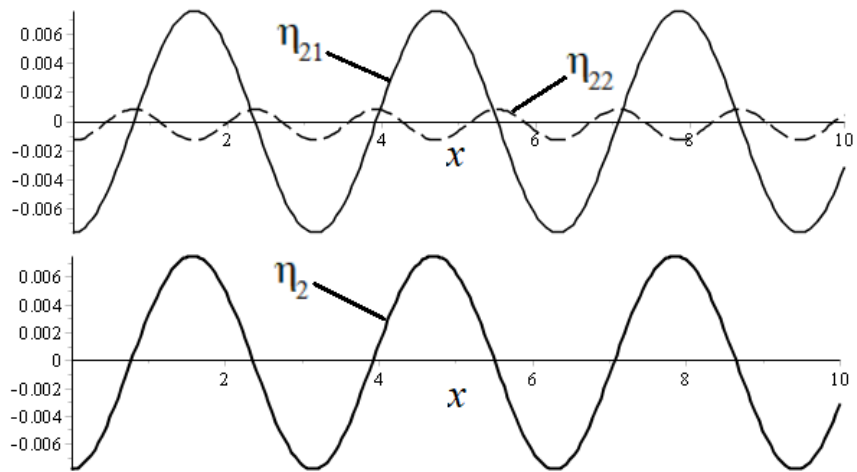


Рис. 3.61. $\Lambda_2 < 0$

На рис. 3.61. продемонстровано випадок, коли $\Lambda_2 < 0$. З графіку видно, що амплітуда другої гармоніки значно менша за амплітуду першої. Мінімум другої гармоніки η_{22} співпадає з максимумом першої гармоніки η_{21} , далі мінімуми обох гармонік співпадають. Це означає, що в областях S_1, S_3 гребні затуплюються, а підшви загострюються. Отже, хвиля в цих областях має \cap - подібну форму.

Графік 3.62. ілюструє зміну знака коефіцієнта Λ_2 у системі (ρ_2, k) для другої пари коренів. Криві ділять площину на три області. В областях S_1, S_3 – $\Lambda_2 > 0$, а в області S_2 – $\Lambda_2 < 0$.

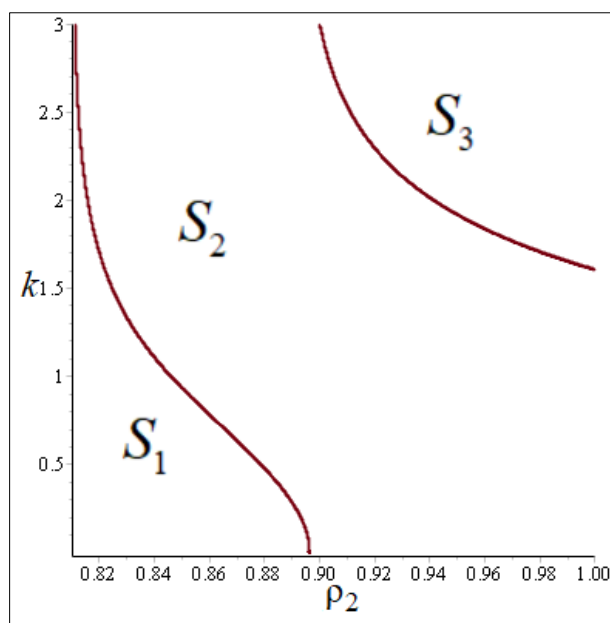


Рис. 3.62. Области знакосталості Λ_2

Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 3.63.) фіксовані параметри набувають значень $\rho_2 = 0.84, k = 0.5$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 3.64.) фіксовані параметри набувають значень $\rho_2 = 0.94, k = 0.5$. Аналізуючи графіки 3.63. і 3.64., видно, що амплітуда другої гармоніки η_{22} значно менша за амплітуду першої гармоніки η_{21} в обох випадках. Проте на графіку 3.63. максимум η_{22} співпадає з мінімумом η_{21} , наступний максимум η_{22} співпадає з максимумом η_{21} .

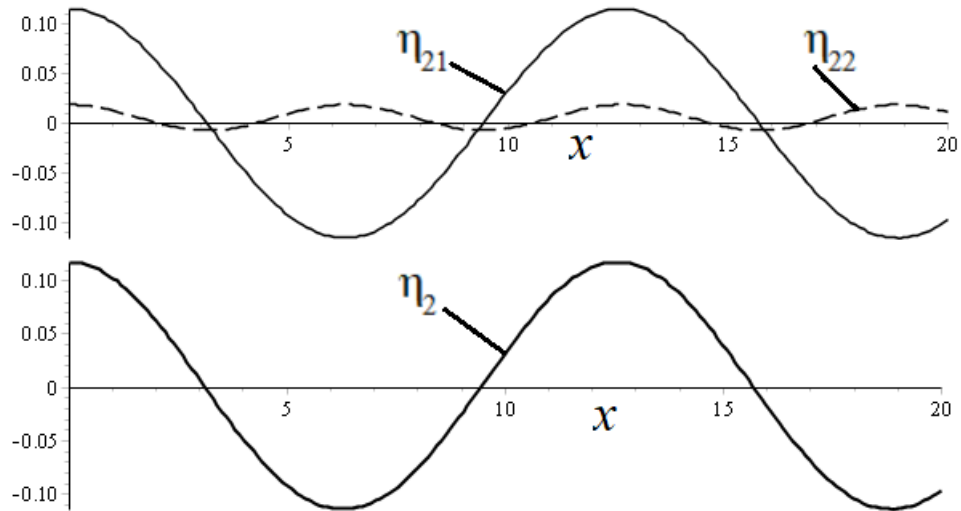


Рис. 3.63. $\Lambda_2 > 0$

На рис. 3.64. мінімуми обох гармонік співпадають, далі наступний мінімум другої гармоніки співпадає з максимумом першої гармоніки. Це означає, що в областях S_1, S_3 відбувається загострення гребнів і затушення підосв.

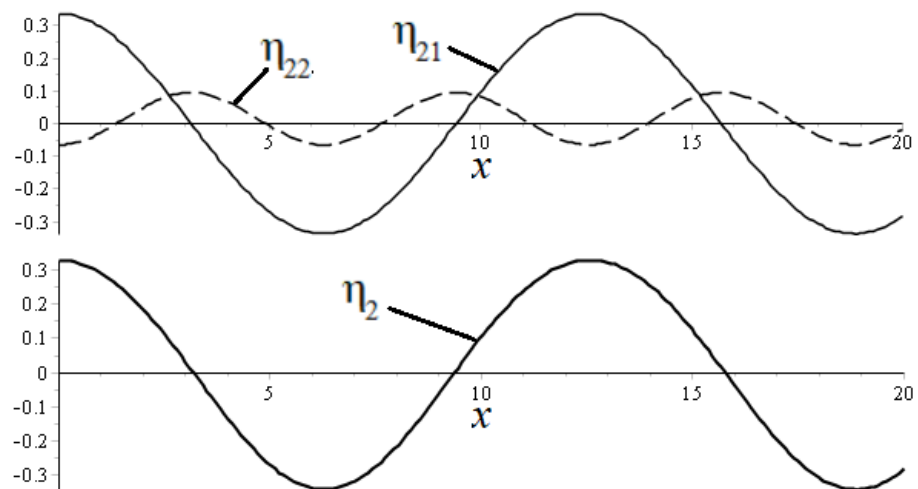


Рис. 3.64. $\Lambda_2 < 0$

Отже, хвиля стає \cup - подібної форми. В області S_2 спостерігається затушення гребнів і загострення підосів, тобто хвиля має \cap - подібну форму.

Графік 3.65. ілюструє зміну знака коефіцієнта Λ_2 для другої пари коренів у системі (ρ_3, k) . Криві ділять площину на три області. В областях $S_1, S_3 - \Lambda_2 > 0$, а в області $S_2 - \Lambda_2 < 0$.

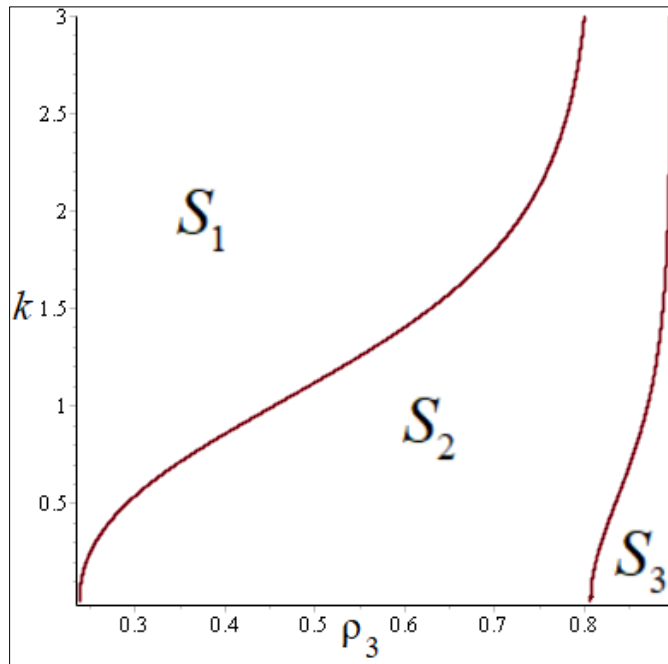


Рис. 3.65. Області знакосталості Λ_2

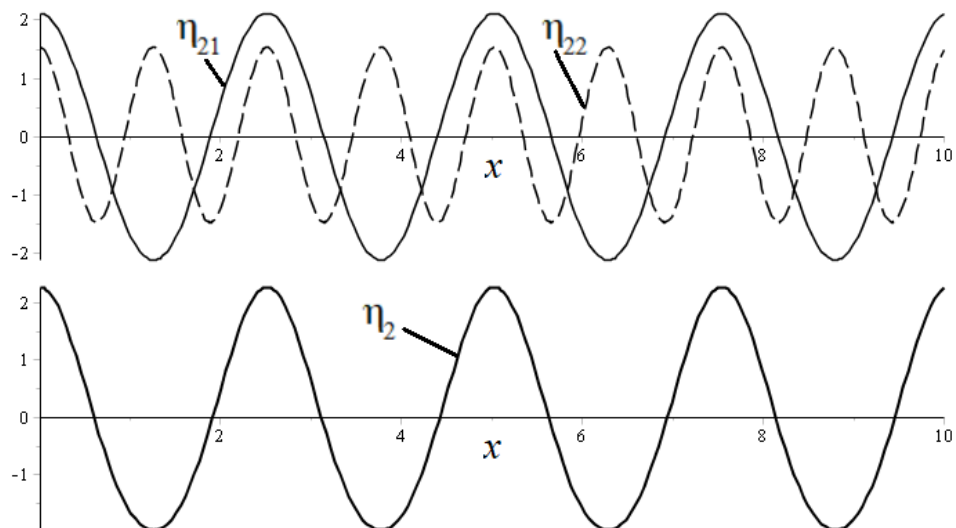


Рис. 3.66. $\Lambda_2 > 0$

Для $\Lambda_2 > 0$ (рис. 3.66.) фіксовані параметри набувають значень $\rho_3 = 0.5, k = 2.5$. Для $\Lambda_2 < 0$ (рис. 3.67.) фіксовані параметри набувають

значень $\rho_3 = 0.5, k = 0.4$. На рис. 3.66. видно, що амплітуда другої гармоніки η_{22} не набагато менша за амплітуду першої гармоніки η_{21} . Максимум η_{22} співпадає з мінімумом η_{21} , далі максимума гармонік співпадають. Отже, в областях S_1, S_3 підосви хвилі затуплюються, а гребні загострюються, тобто хвиля має \cup - подібну форму.

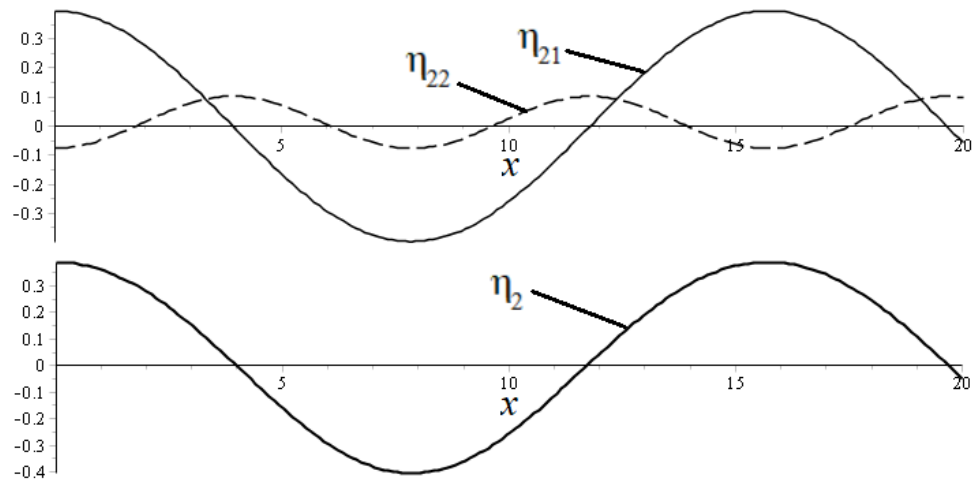


Рис. 3.67. $\Lambda_2 < 0$

На графіку 3.67. амплітуда другої гармоніки значно менша за амплітуду першої. Мінімуми обох гармонік співпадають, потім мінімум η_{22} співпадає з максимумом η_{21} . З цього випливає, що в області S_2 хвиля має \cap - подібну форму.

3.5. Дослідження потоку енергії хвильового руху

Нагадаємо, що ω_1 та ω_2 є коренями дисперсійного рівняння (2.23) і дорівнюють:

$$\omega_1^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \omega_2^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Графіки залежності сумарного потоку енергії отримано за допомогою пакету символьних обчислень Maple (додаток А).

Запишемо дані розв'язки першого наближення для обох пар частот:

для моди ω_1 :

$$\begin{aligned}
\varphi_{11}^{(1)} &= \frac{2\omega_1}{k\operatorname{sh}(kh_1)} \operatorname{ch}(k(h_1+z)) A \sin(kx - \omega_1 t) \\
\varphi_{21}^{(1)} &= - \left(\frac{2\omega_1 \operatorname{ch}(k(h_2-z))}{k\operatorname{sh}(kh_2)} + \frac{2((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_2)) \operatorname{ch}(kz)}{\rho_2 \omega_1 k} \right) \\
&\cdot A \sin(kx - \omega_1 t) \\
\varphi_{31}^{(1)} &= \frac{2\operatorname{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_2)) \operatorname{ch}(k(h_2+h_3-z))}{\rho_2 \omega_1 k \operatorname{sh}(kh_3)} \\
&\cdot A \sin(kx - \omega_1 t) \\
\eta_{11}^{(1)} &= 2A \cos(kx - \omega_1 t) \\
\eta_{21}^{(1)} &= - \frac{\operatorname{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_2))}{\omega_1^2 \rho_2} 2A \cos(kx - \omega_1 t)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ДЛЯ МОДИ ω_2 :

$$\begin{aligned}
\varphi_{11}^{(2)} &= - \frac{2\rho_2 \omega_2^3 \operatorname{ch}(k(h_1+z)) B \sin(kx - \omega_2 t)}{k \cdot \operatorname{sh}(kh_2) \operatorname{sh}(kh_1)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_2))} \\
\varphi_{21}^{(2)} &= \left(\frac{\rho_2 \omega_2^2 \operatorname{ch}(k(h_2-z))}{\operatorname{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_2))} + \operatorname{ch}(kz) \right) \\
&\cdot \frac{2\omega_2 B \sin(kx - \omega_2 t)}{k\operatorname{sh}(kh_2)} \\
\varphi_{31}^{(2)} &= - \frac{2\omega_2 \operatorname{ch}(k(h_2+h_3-z)) B \sin(kx - \omega_2 t)}{k\operatorname{sh}(kh_3)} \\
\eta_{11}^{(2)} &= - \frac{2B \cos(kx - \omega_2 t) \omega_2^2 \rho_2}{\operatorname{sh}(kh_2)((1-\rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_2))} \\
\eta_{21}^{(2)} &= 2B \cos(kx - \omega_2 t),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

де $\eta_{21}^{(1)}$ є внутрішньою прогресивною хвилею-відгуком на внутрішню хвилю $\eta_{11}^{(1)}$ з частотою ω_1 та амплітудою A на нижній поверхні контакту. А $\eta_{11}^{(2)}$ є відповідно внутрішньою хвилею-відгуком на внутрішню хвилю $\eta_{21}^{(2)}$ з частотою ω_2 та амплітудою B , яка поширюється на верхній поверхні контакту між другим та третім шаром.

Розглянемо потік енергії, яку переносять за період τ прогресивні хвилі, що задаються розв'язками (3.12) – (3.13), через площину $x = const$ на поверхнях контакту та на поверхні шару з твердою кришкою. Тоді згідно з [66] мають місце формули:

$$E_{vn1} = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h_1}^0 \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (3.14)$$

$$E_{vn2} = -\frac{\rho_2}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (3.15)$$

$$E_{vn3} = -\frac{\rho_3}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{h_2}^{h_2+h_3} \frac{\partial(\varphi_{31}^{(1)} + \varphi_{31}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{31}^{(1)} + \varphi_{31}^{(2)})}{\partial x} dz. \quad (3.16)$$

За формулами (3.14) – (3.16) обчислимо потік енергії, яку переносять внутрішні хвилі в шарі з твердим дном, середньому шарі та шарі з кришкою відповідно; $E_s = E_{vn1} + E_{vn2} + E_{vn3}$ – сумарний потік енергії тришарової системи. При цьому відхилення поверхонь контакту задаються наступним чином:

$$\eta_{11} = \eta_{11}^{(1)} + \eta_{11}^{(2)}, \quad \eta_{21} = \eta_{21}^{(1)} + \eta_{21}^{(2)} \quad (3.17)$$

Отримані результати будемо порівнювати з розрахунком потоку енергії, що переносить хвиля в гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар із кришкою», яка досліджувалася у [86]. Розв'язки цієї задачі в лінійній постановці мають вигляд:

$$\eta_1 = 2A \cos(kx - \omega t)$$

$$\varphi_{11} = \frac{2\omega}{k} A \sin(kx - \omega t) \frac{\text{ch}(k(h_1 + z))}{\text{sh}(kh_1)}$$

$$\varphi_{21} = -\frac{2\omega}{k} A \sin(kx - \omega t) \frac{\text{ch}(k(h_2 - z))}{\text{sh}(kh_2)}$$

Потік енергії, яку переносить хвиля в такій системі, обчислюється за формулами:

$$E_{k1} = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h_1}^0 \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial t} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} dz$$

$$E_{k2} = -\frac{\rho}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} dz$$

3.5.1. Аналіз залежності потоку енергії від товщини верхнього та нижнього шару при різних значеннях хвильового числа

На рис. 3.68. показано залежність сумарного потоку енергії E_s від товщини нижнього шару h_1 при різних значеннях хвильового числа k для таких параметрів системи $\rho_2 = 0.95$, $\rho_3 = 0.92$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1$, $A = 0.5$, $B = 0.1$, $t = 0$ без урахування поверхневого натягу.

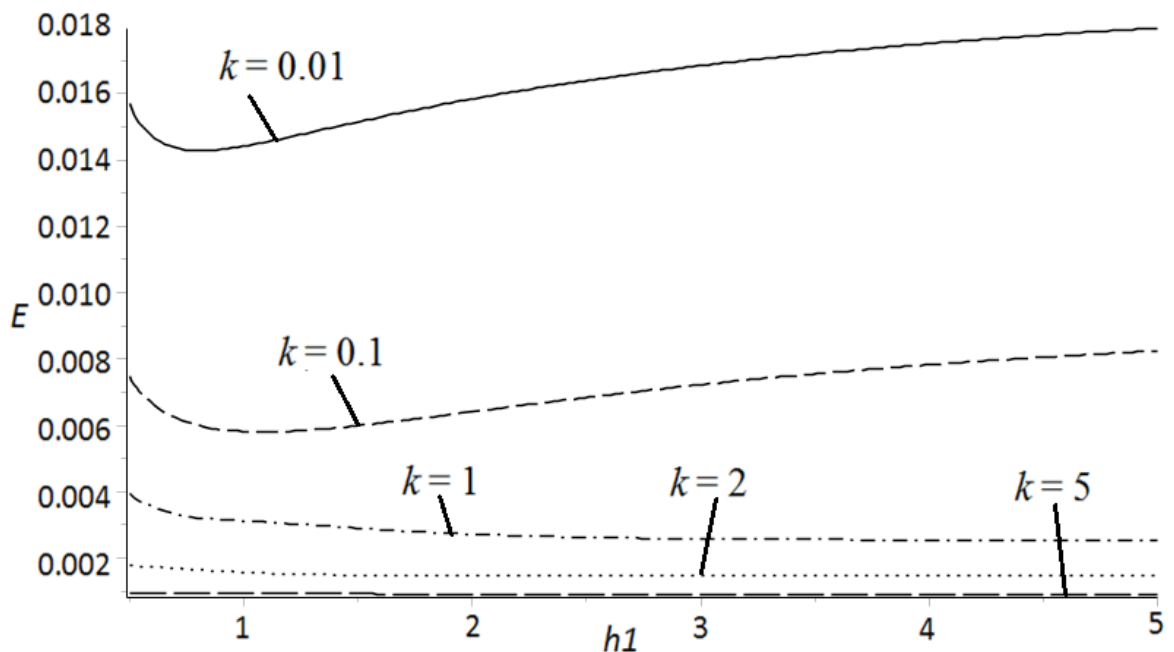


Рис. 3.68. Залежність потоку енергії від товщини нижнього шару

З графіку видно, що при збільшенні хвильового числа графіки мають спадаючий характер. При малих значеннях хвильового числа $k = 0.01$, $k = 0.1$ повний потік енергії спочатку спадає, а потім зростає, при $k = 1$, $k = 2$ та $k = 5$ графіки потоку енергії E_s спадають і досить швидко збігаються до певного граничного значення, при чому при різних k граничне значення відрізняється.

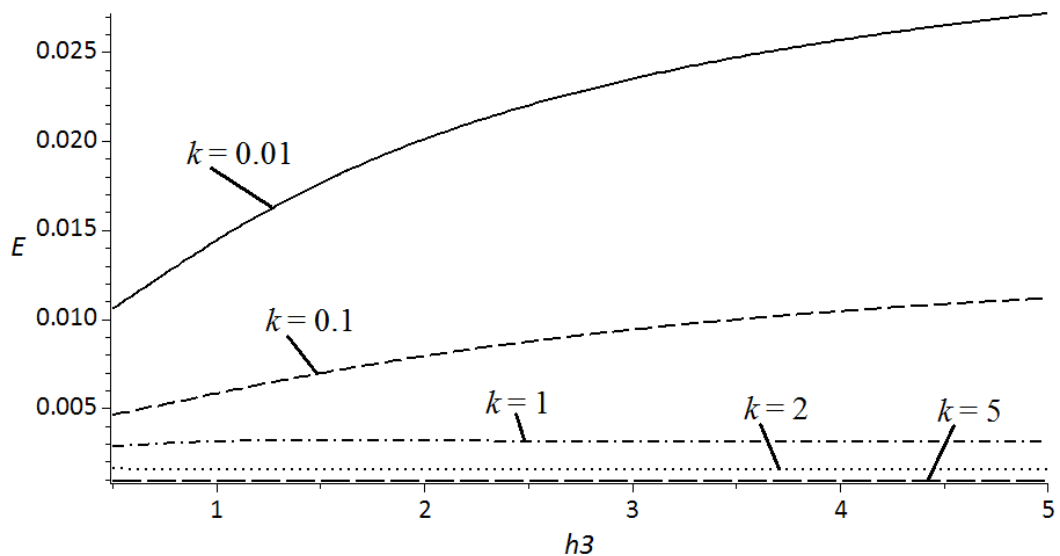


Рис. 3.69. Залежність потоку енергії від товщини верхнього шару

Аналогічно на рис. 3.69. показано залежність сумарного потоку енергії від товщини верхнього шару h_3 за тих самих значень хвильового числа та параметрів системи (замість $h_3 = 1$ взяли $h_1 = 1$).

З графіку видно, що при збільшенні товщини верхнього шару $h_3 \rightarrow \infty$ графіки сумарного потоку енергії E_s зростають до певного граничного значення при малих значеннях хвильового числа $k = 0.1$ та $k = 0.01$. При збільшенні хвильового числа k графіки сумарного потоку енергії мають спадаючий характер. При $k = 1$ графік зростає до певного максимуму, потім спадає до певного граничного значення. При $k = 2$ та $k = 5$ графіки сумарного потоку енергії E_s спадають до певного граничного значення.

3.5.2. Аналіз залежності потоку енергії хвиль від хвильового числа при різних значеннях товщини верхнього та нижнього шарів

На рис. 3.70. показана залежність сумарного потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях h_1 для наступних параметрів системи $\rho_2 = 0.95$, $\rho_3 = 0.92$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1$, $A = 0.5$, $B = 0.1$, $t = 0$ без урахування поверхневого натягу.

З графіку видно, що зі збільшенням хвильового числа сумарний потік енергії при всіх значеннях h_1 спадає. Проте початкове значення при $h_1 = 1$

менше за значення при $h_1 = 0.5$. При $h_1 = 3$ початкове значення більше за два попередні, та при $h_1 = 10$ початкове значення найбільше. Графіки сумарного потоку енергії, починаючи з деякого числа, співпадають.

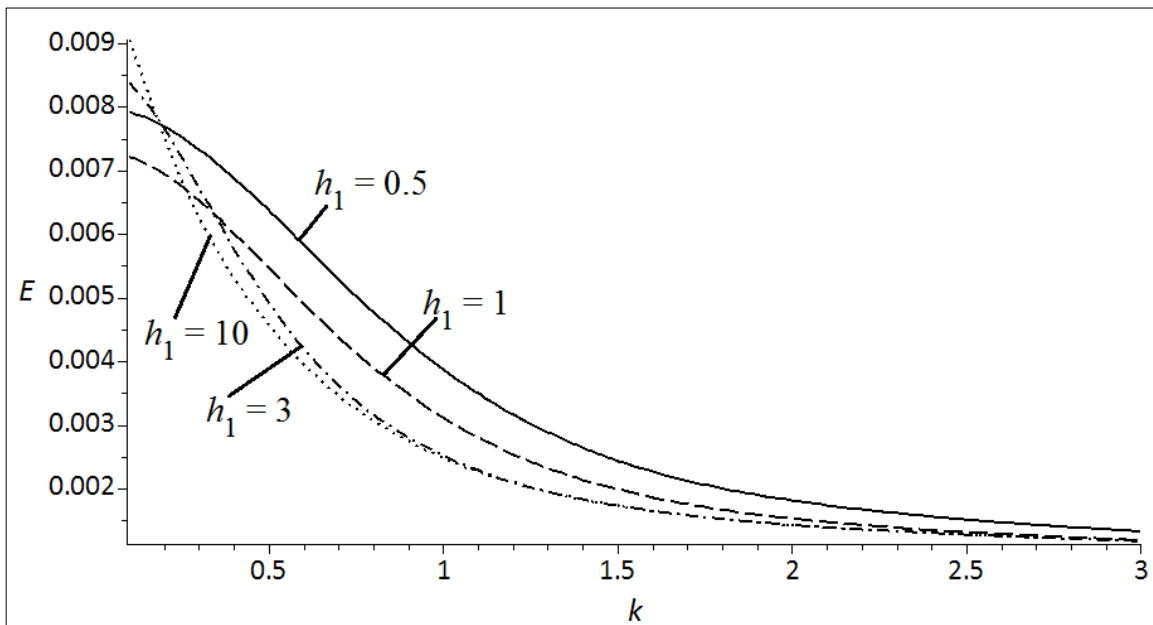


Рис. 3.70. Залежність потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях h_1

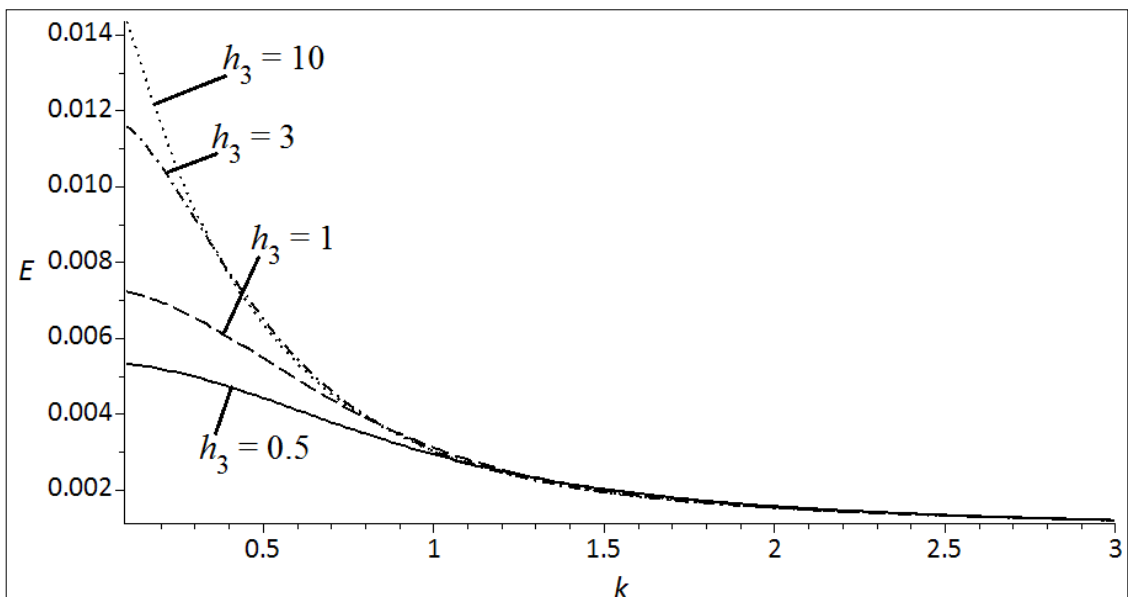


Рис. 3.71. Залежність потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях h_3

На рис. 3.71. показано залежність сумарного потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях h_3 для наступних параметрів системи $\rho_2 = 0.95$, $\rho_3 = 0.92$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, $A = 0.5$, $B = 0.1$, $t = 0$ без урахування поверхневого натягу. З графіку видно, що при збільшенні h_3

графіки сумарного потоку енергії мають зростаючий характер, проте, починаючи з деякого числа, усі чотири графіки співпадають. Сумарний потік енергії хвильового руху спадає при довільному значенні h_3 .

3.5.3. Аналіз залежності потоку енергії хвиль від хвильового числа при різних значеннях густин

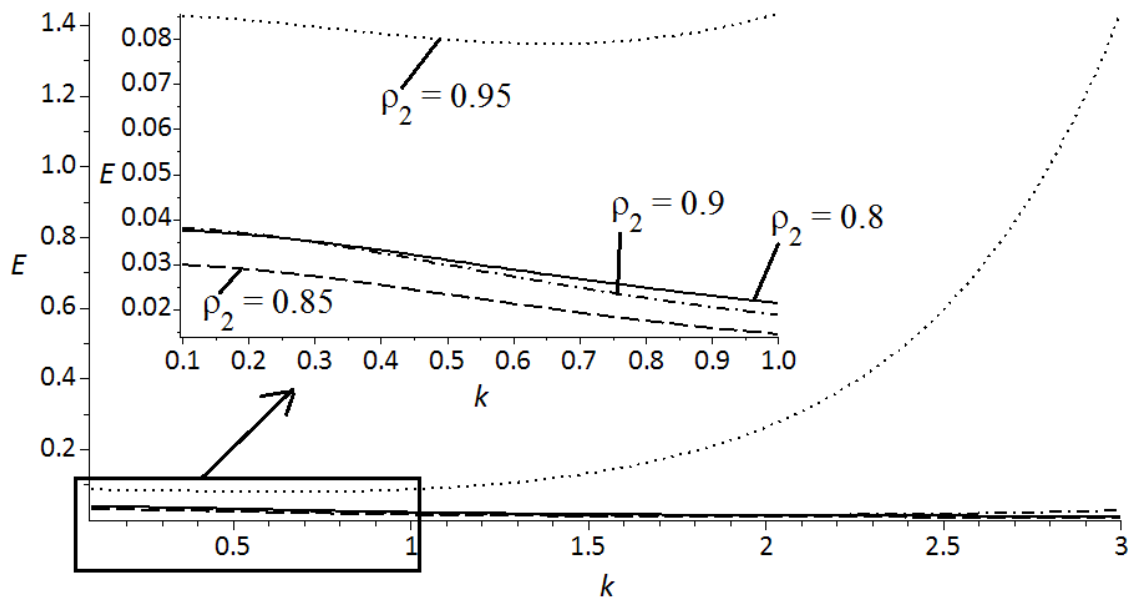


Рис. 3.72. Залежність потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях густини середнього шару

На рис. 3.72. показано залежність сумарного потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях густини середнього шару ρ_2 . Густина верхнього шару $\rho_3 = 0.8$. З графіку видно, що при $\rho_2 = 0.8$ та $\rho_2 = 0.85$ сумарний потік енергії хвильового руху на даному проміжку спадає, при $\rho_2 = 0.95$ та $\rho_2 = 0.9$ потік енергії спадає до певного значення, потім зростає. Причому чим більша густина ρ_2 , тим раніше зростає графік повного потоку енергії.

На рис. 3.73. показана залежність сумарного потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях густини верхнього шару ρ_3 . Густина середнього шару $\rho_2 = 0.95$. З графіку видно, що при збільшенні густини верхнього шару сумарний потік енергії хвильового руху має

спадаючий характер. За умови рівності густин другого та третього шару ($\rho_2 = \rho_3 = 0.95$) сумарний потік енергії найменший.

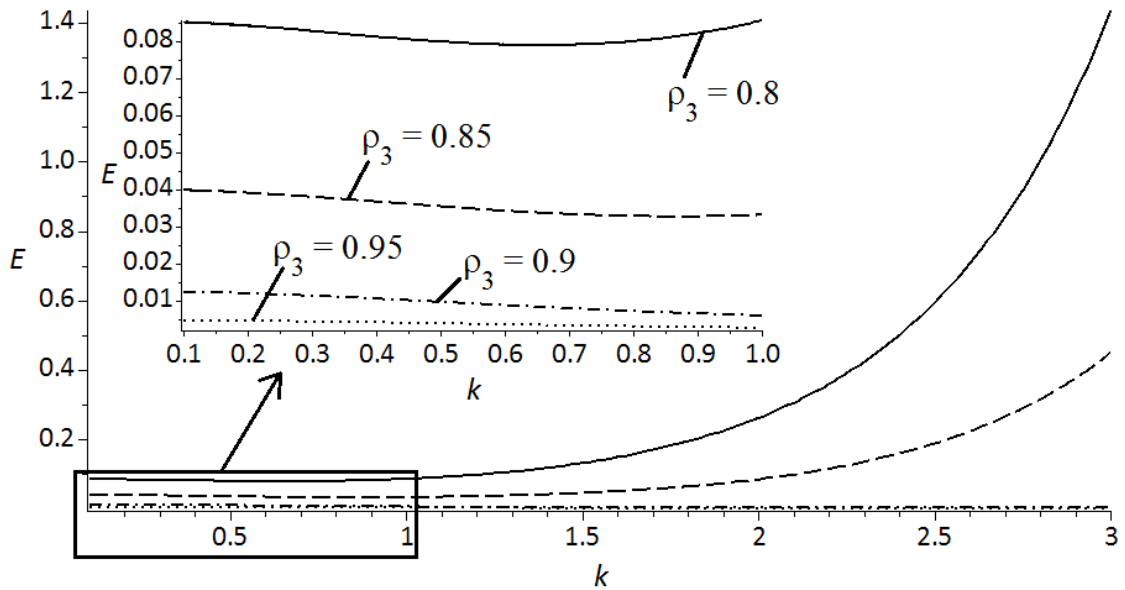


Рис. 3.73. Залежність потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях густини верхнього шару

При $\rho_3 = 0.8$, $\rho_3 = 0.85$ та $\rho_3 = 0.9$ сумарний потік енергії на даному проміжку спочатку спадає, потім зростає, чим більша густина верхнього шару, тим пізніше зростає потік енергії хвильового руху. При $\rho_3 = 0.95$ потік енергії спадає при $k \rightarrow \infty$.

3.5.4. Аналіз залежності потоку енергії хвиль від хвильового числа при різних значеннях поверхневого натягу

На рис. 3.74. представлено залежність сумарного потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях поверхневого натягу нижнього шару T_1 . Поверхневий натяг середнього шару $T_2 = 0$. При $T_1 = 0$ сумарний потік енергії хвильового руху спадає зі збільшенням хвильового числа.

При $T_1 = 0.05$ на даному проміжку потік енергії спадає, потім зростає. При $T_1 = 0.1$ та $T_1 = 0.15$ сумарний потік енергії E_s зростає. При збільшенні поверхневого натягу нижнього шару графіки потоку енергії хвильового руху мають зростаючий характер.

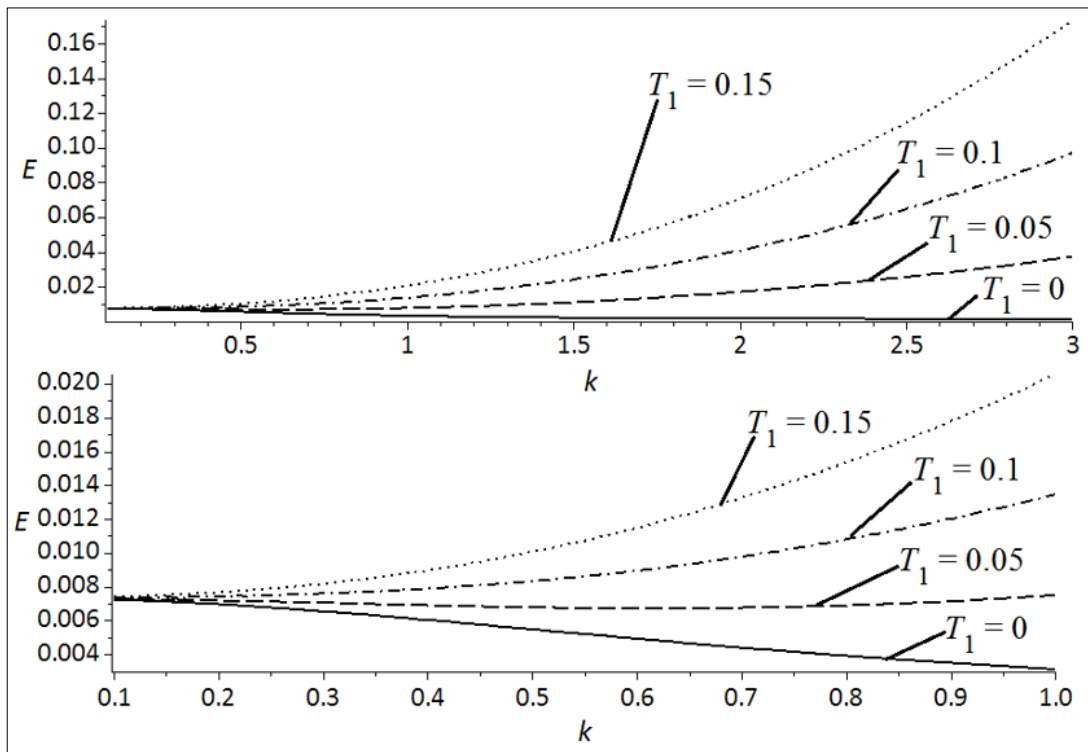


Рис. 3.74. Залежність потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях поверхневого натягу нижнього шару T_1

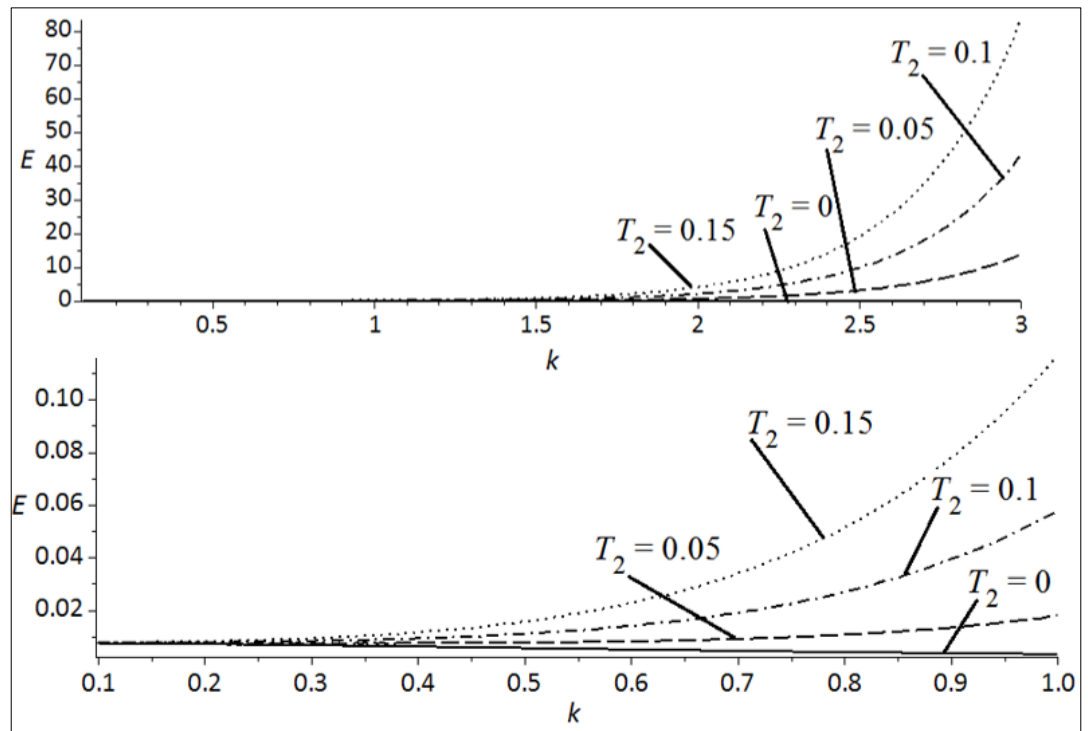


Рис. 3.75. Залежність потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях поверхневого натягу середнього шару T_2

Рис. 3.75. демонструє залежність сумарного потоку енергії від хвильового числа k при різних значеннях поверхневого натягу середнього шару T_2 . Поверхневий натяг нижнього шару $T_1 = 0$.

Аналогічно до попереднього графіка (рис. 3.74.) при $T_2 = 0$ сумарний потік енергії хвильового руху спадає. При $T_2 > 0$ потік енергії зростає. При збільшенні поверхневого натягу середнього шару T_2 графіки потоку енергії хвильового руху мають зростаючий характер.

3.5.5. Сумарний потік енергії хвильового руху в граничному випадку

Розглянемо залежність потоку енергії від товщини нижнього шару h_1 у тришаровій системі та залежність потоку енергії від товщини шару h_1 у двошаровій системі.

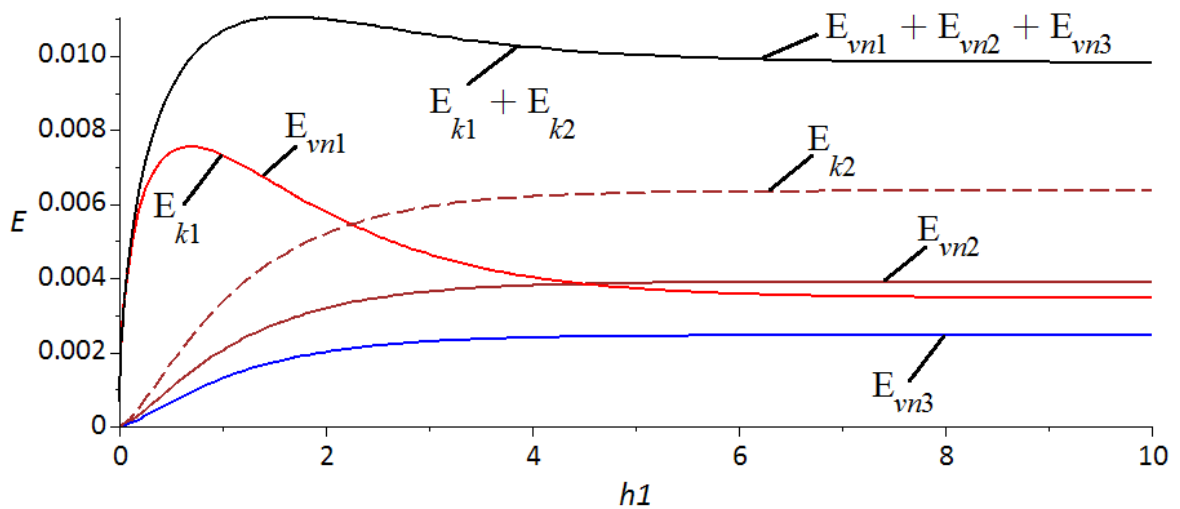


Рис. 3.76. Загальний потік енергії в граничному випадку

Граничний випадок описується рівністю густин $\rho_2 = \rho_3 = 0.9, \rho = 0.9$, амплітуда внутрішньої прогресивної хвилі $A = 0.5$. У цьому випадку отримуємо двошарову систему «шар із твердим дном – шар із кришкою». На рис. 3.76. показано залежність E_{vn1} , E_{vn2} , E_{vn3} , $E_{vn1} + E_{vn2} + E_{vn3}$ та E_{k1} , E_{k2} , $E_{k1} + E_{k2}$ від товщини нижнього шару для наступних параметрів $k = 0.5$, $h_2 = h_3 = 1$, $T = T_1 = T_2 = 0$, $B = 0$, $t = 0$, $x = 0$. Товщина верхнього шару двошарової системи дорівнює сумі товщин середнього та верхнього шарів тришарової системи $h_2 = h_2 + h_3$. Як помітно з рис. 3.76. потік енергії тришарової системи $E_{vn1} + E_{vn2} + E_{vn3}$ наближається до потоку енергії

двошарової системи $E_{k_1} + E_{k_2}$.

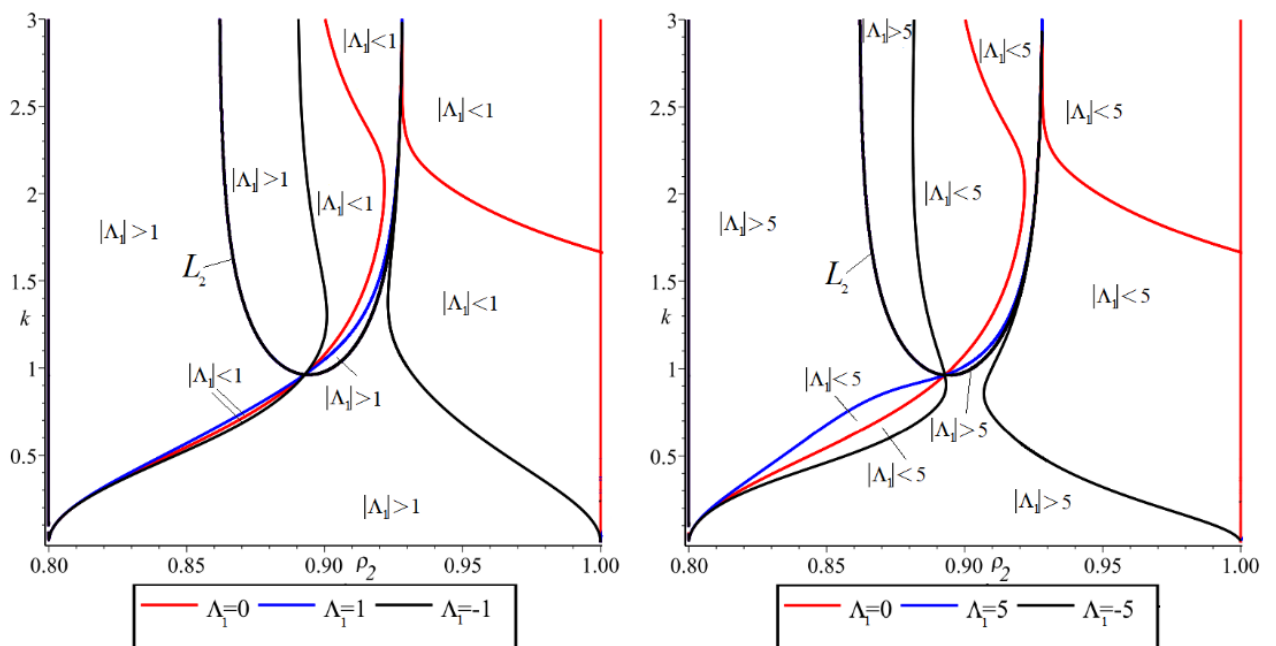
Отже, тришарова система «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» вироджується у двошарову систему «шар із твердим дном – шар із кришкою». Це підтверджує фізичну достовірність результатів досліджуваної тришарової системи [81].

3.6. Дослідження резонансу другої гармоніки хвильового руху в тришаровій рідині

Графіки резонансних областей отримано в середовищі Maple. Корені ω_1 та ω_2 задаються формулами (2.24).

У пункті 3.4. було досліджено форму хвильових пакетів на поверхнях контакту, внаслідок чого були виявлені криві $L_2 = 0$ та $M_2 = 0$, вздовж яких $\Lambda_1(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) \rightarrow \infty$ та $\Lambda_2(\rho_2, \rho_3, T_1, T_2, k, h_1, h_2, h_3) \rightarrow \infty$.

Це пояснюється тим, що в околах $L_2 = 0$ та $M_2 = 0$ виникає резонанс других гармонік, тобто амплітуди других гармонік нижньої та верхньої поверхонь контакту η_{12} та η_{22} зростають порівняно з відповідними амплітудами η_{11} та η_{21} .



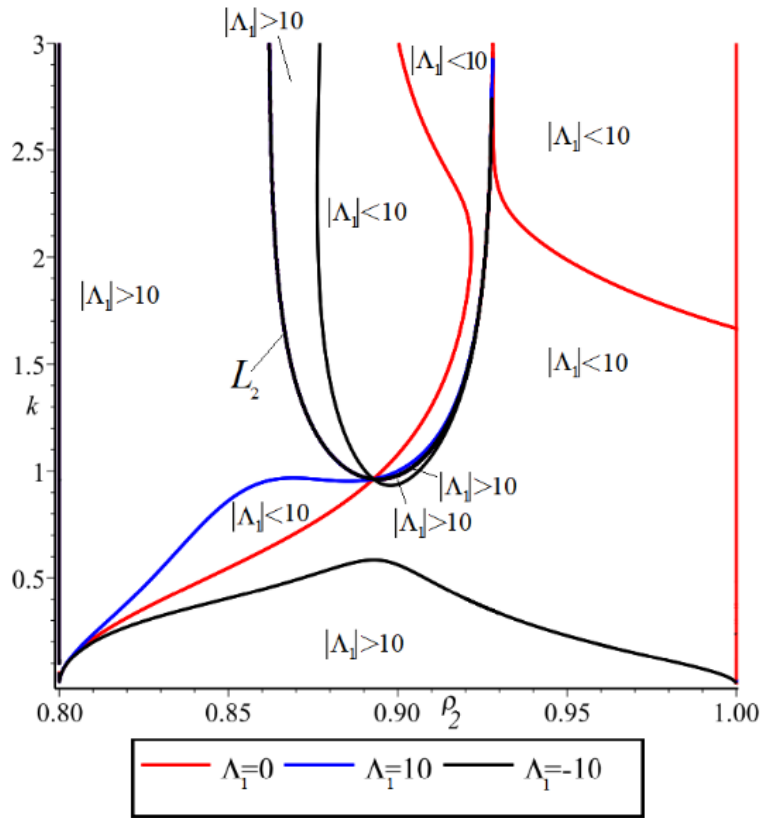
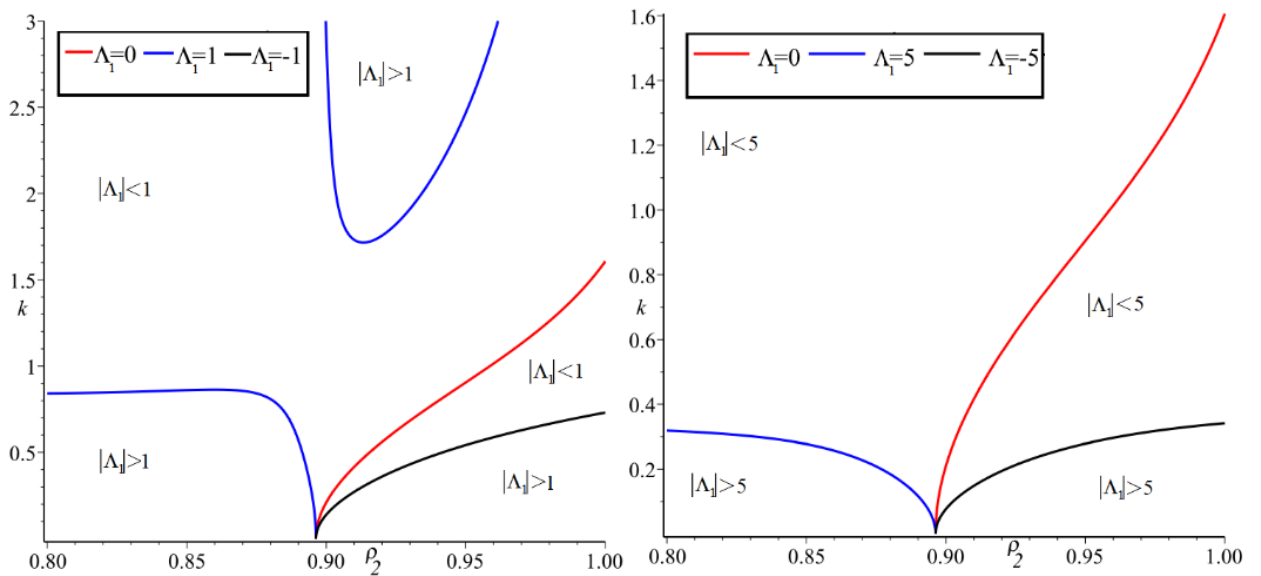


Рис. 3.77. Области резонансу для ω_1 у системі (ρ_2, k)

На рис. 3.77. у системі (ρ_2, k) для нижньої поверхні контакту продемонстровано графіки $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ для першої пари коренів ω_1 для таких значень товщини нижнього, середнього та верхнього шарів: $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$. Околиці кривої $L_2 = 0$, у яких значення величини Λ_1 більші за задані значення, позначено $|\Lambda_1| > 1$, $|\Lambda_1| > 5$ та $|\Lambda_1| > 10$.



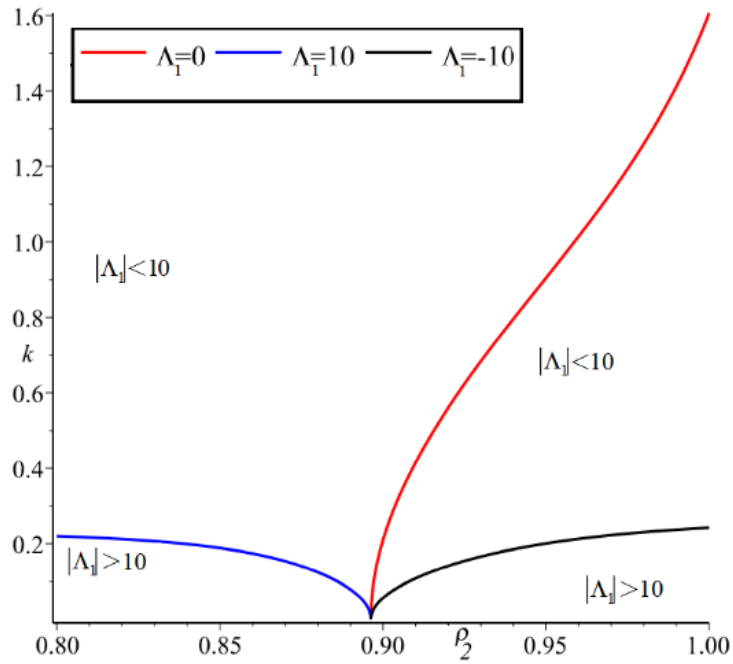
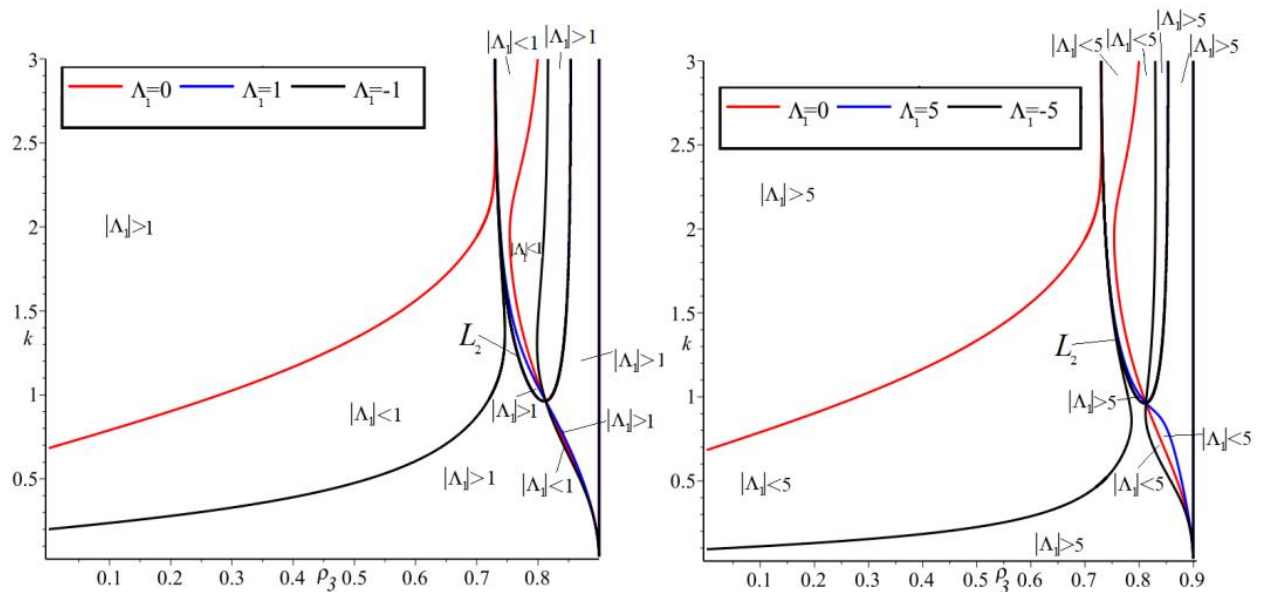


Рис. 3.78. Области резонансу для ω_2 у системі (ρ_2, k)

На рис. 3.78. для другої пари коренів ω_2 зображено графіки областей резонансу, у яких значення величини Λ_1 більші за задані значення позначено $|\Lambda_1| > 1$, $|\Lambda_1| > 5$ та $|\Lambda_1| > 10$.

На рис. 3.79. та представлено графіки $L_1 = 0$ та $L_2 = 0$ для першої пари коренів у системі (ρ_3, k) . Значення товщини шарів та величини Λ_1 повторюються. На рис. 3.80. наведено області резонансу для другої пари коренів в системі (ρ_3, k) .



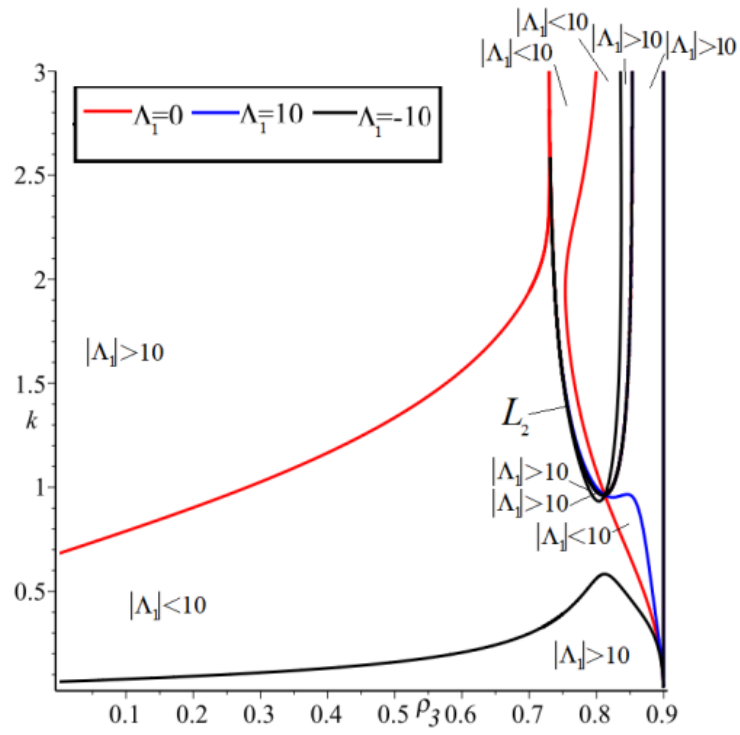
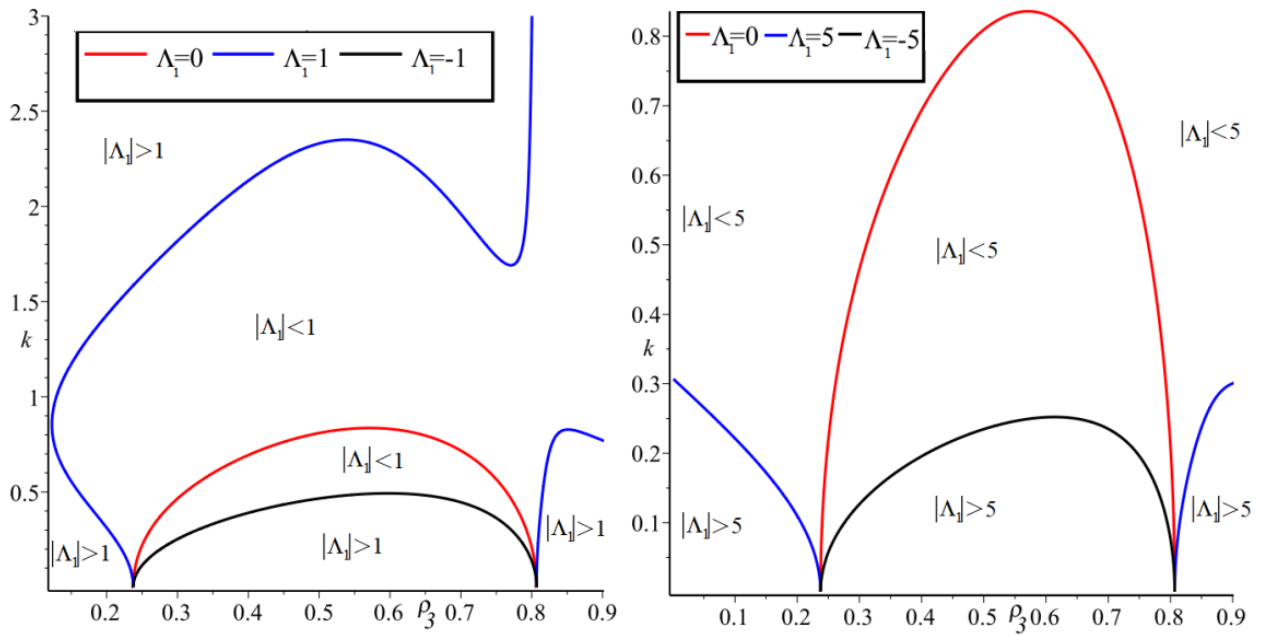


Рис. 3.79. Области резонансу для ω_1 у системі (ρ_3, k)



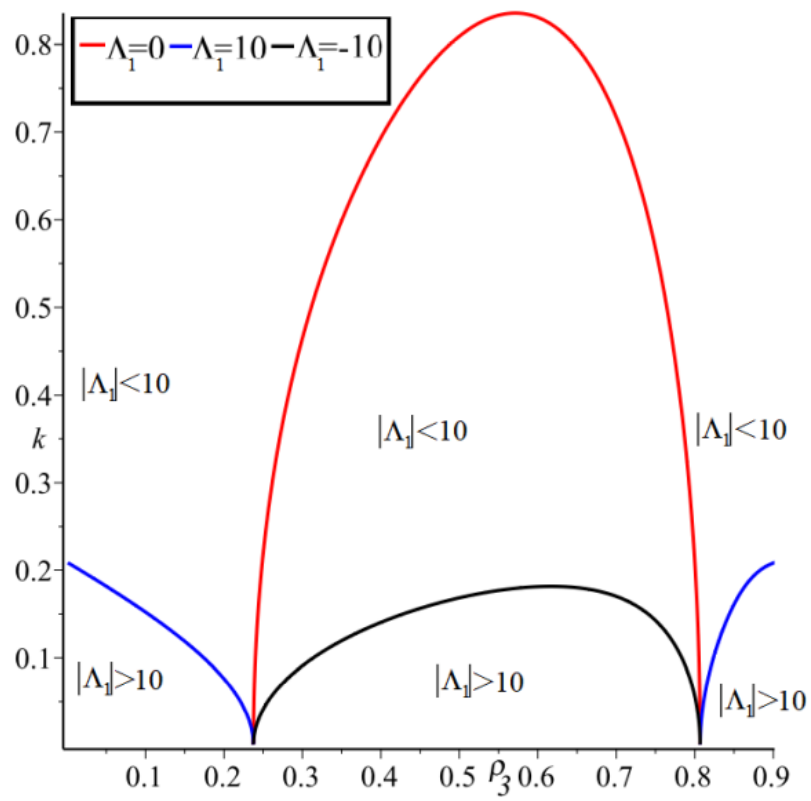
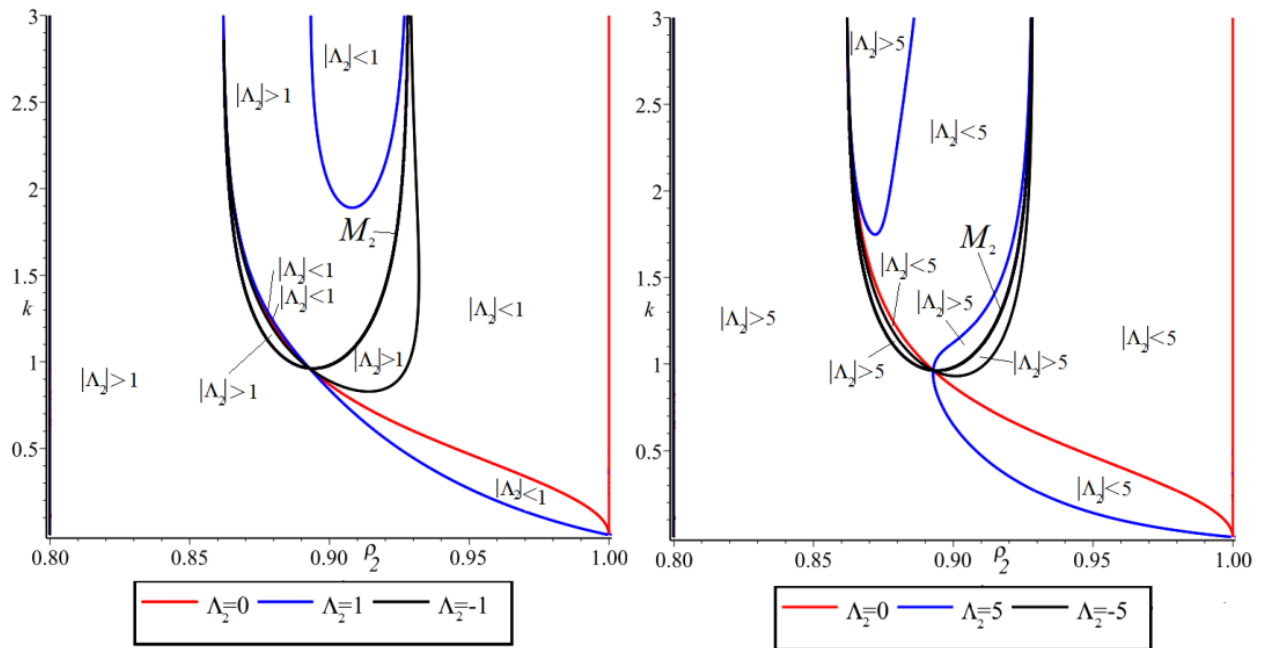


Рис. 3.80. Области резонансу для ω_2 у системі (ρ_3, k)



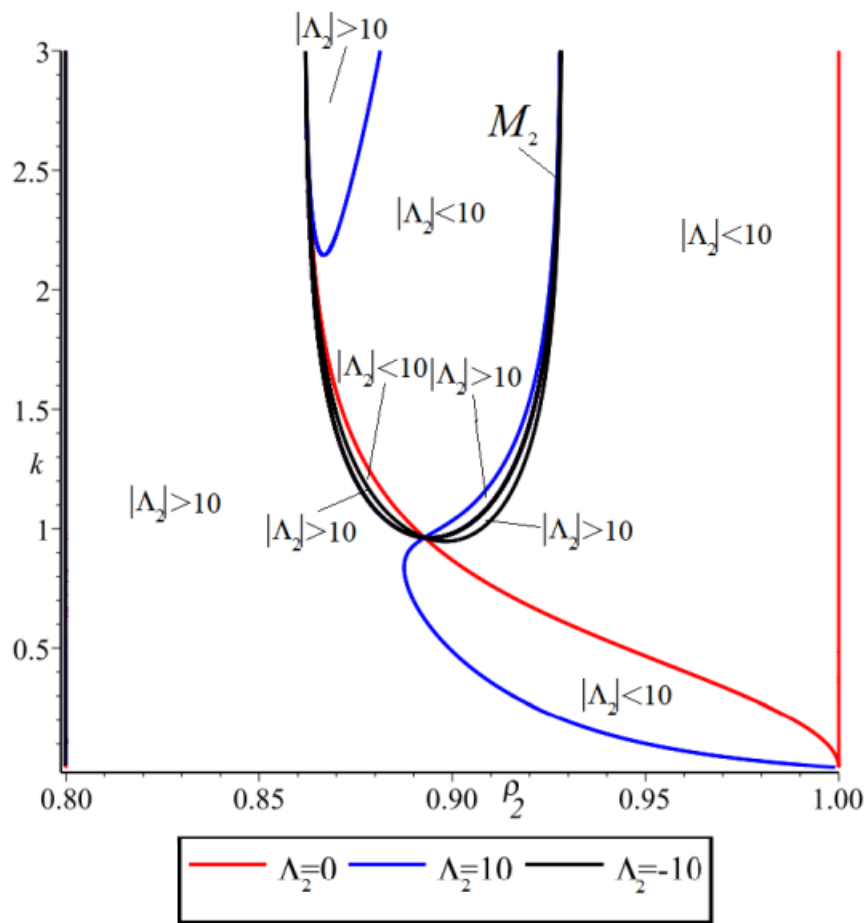
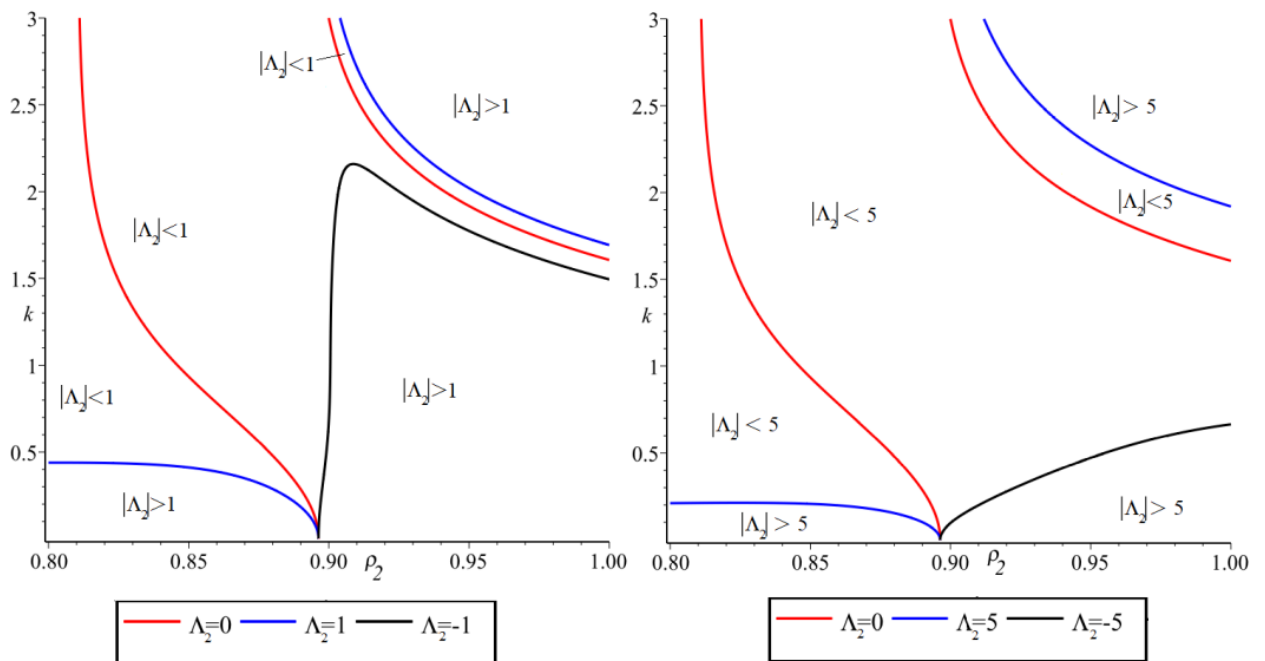


Рис. 3.81. Области резонансу для ω_1 у системі (ρ_2, k)



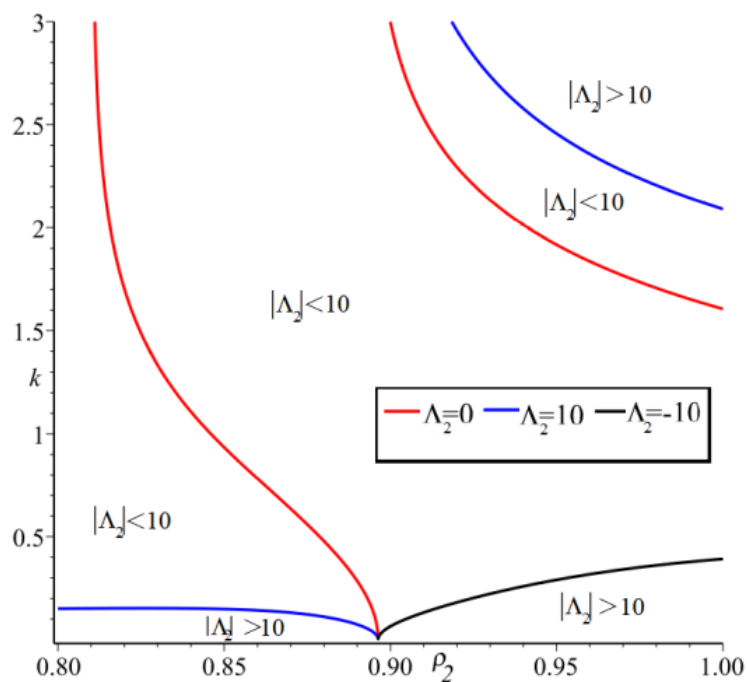


Рис. 3.82. Области резонансу для ω_2 у системі (ρ_2, k)

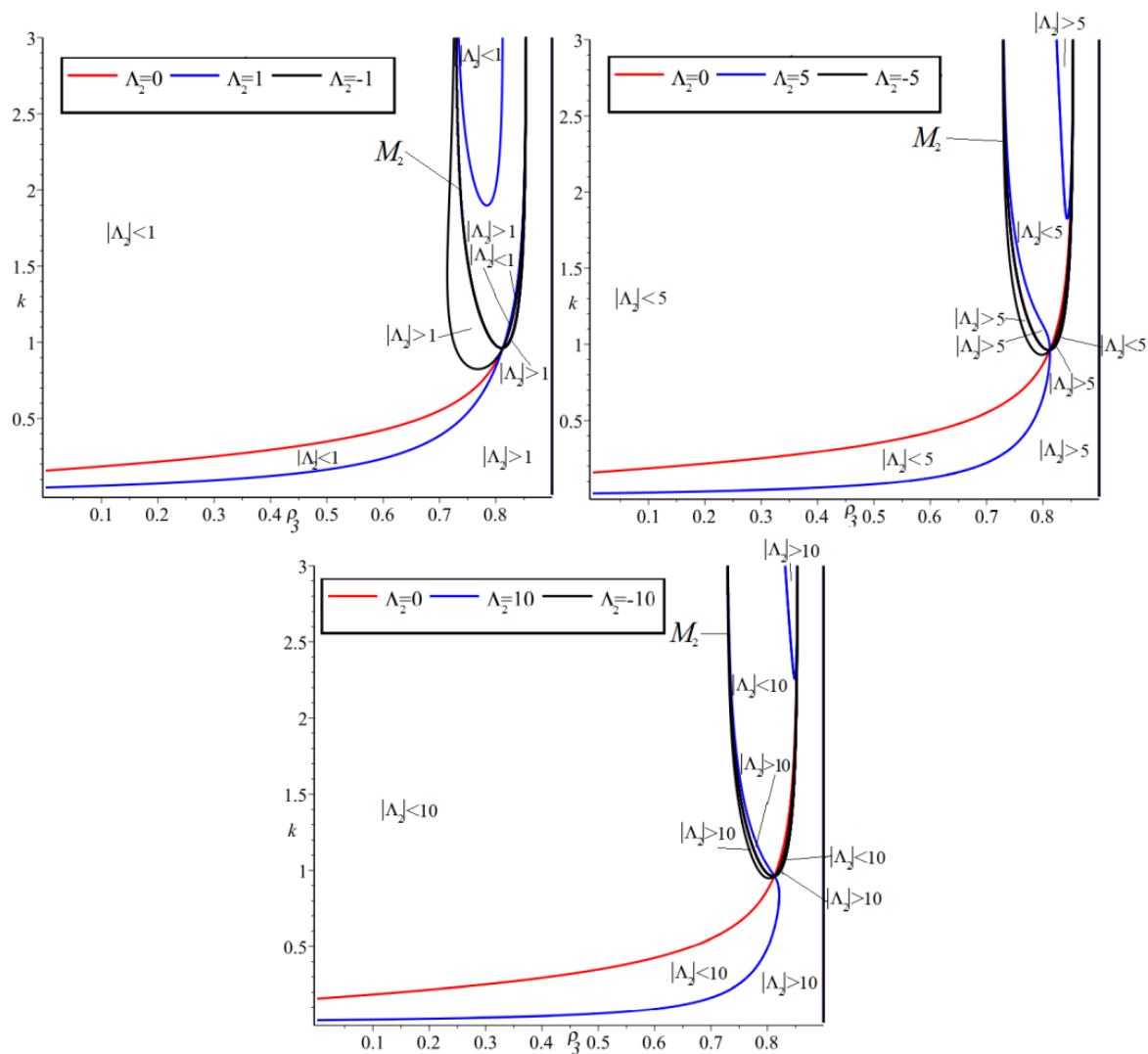


Рис. 3.83. Области резонансу для ω_1 у системі (ρ_3, k)

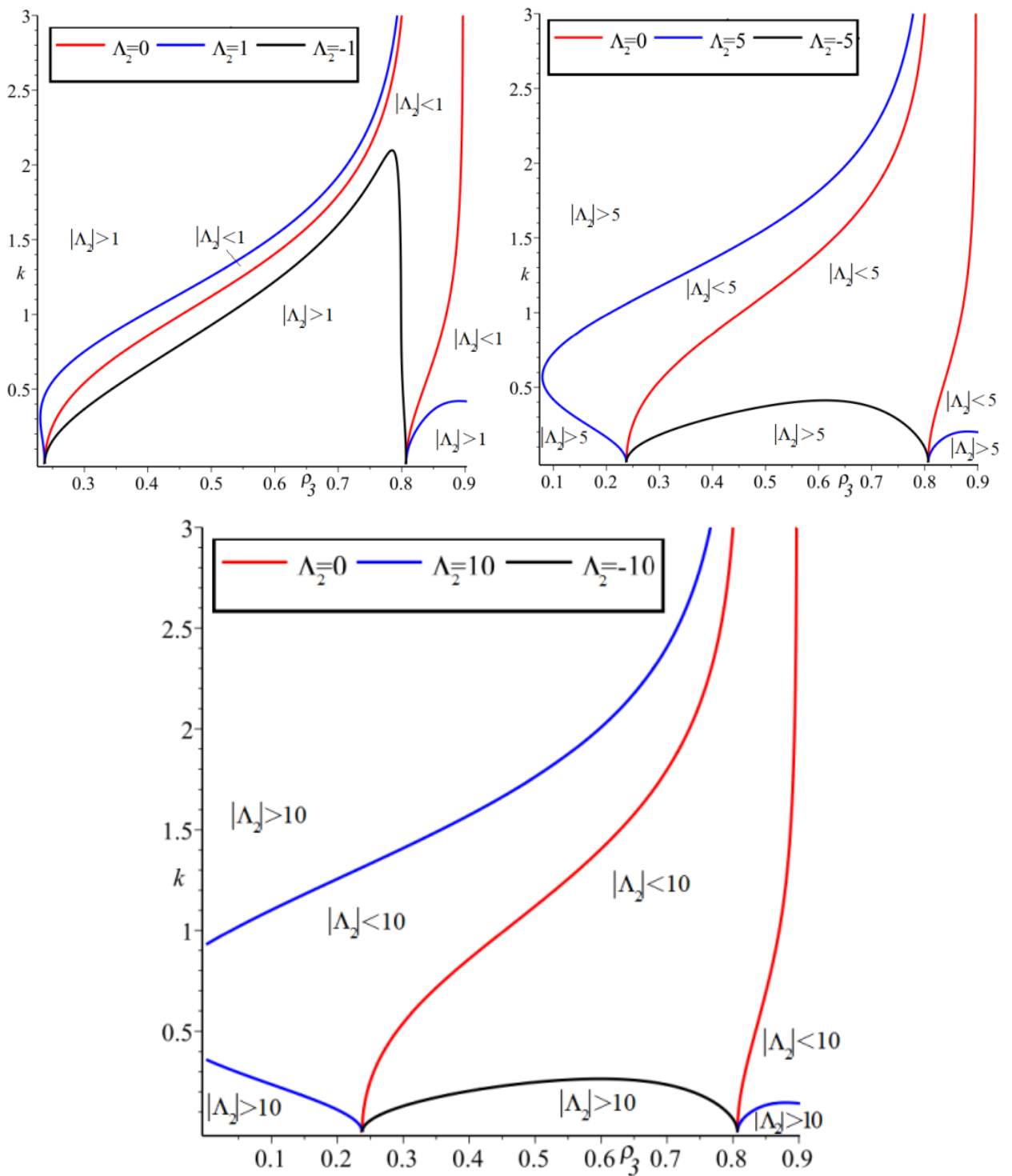


Рис. 3.84. Области резонансу для ω_2 у системі (ρ_3, k)

На рис. 3.81. для верхньої поверхні контакту в системі (ρ_2, k) продемонстровано графіки $M_1 = 0$ та $M_2 = 0$ для першої пари коренів ω_1 . Околиці кривої $M_2 = 0$, у яких значення величини Λ_2 більші за задані значення, позначено $|\Lambda_2| > 1$, $|\Lambda_2| > 5$ та $|\Lambda_2| > 10$.

На рис. 3.82. наведено графіки областей резонансу для другої пари коренів ω_2 . На рис. 3.83. та рис. 3.84. представлено графіки резонансу в системі (ρ_3, k) .

Області резонансу вказують на параметри, за яких другі гармоніки набувають великих значень. Це пояснюється тим, що в досліджуваній математичній моделі не враховувалися наближення вищих порядків та в'язкість. Оскільки коефіцієнт α є досить малою величиною, доданки розвинення для відхилень поверхонь контакту (2.16) стають співрозмірними. Як наслідок, вклад другого доданку з амплітудою $a^2\alpha\Lambda_1$ стає приблизно таким самим, як і вклад першого доданка з амплітудою a для нижньої поверхні контакту. Аналогічно, для верхньої поверхні контакту, вклад другого доданку з амплітудою $a^2\alpha\Lambda_2$ стає приблизно таким самим, як і вклад першого доданка з амплітудою K_3a . Таким чином, ефект резонансу другої гармоніки в значній мірі компенсується.

Таким чином, можна стверджувати, що метод багатомасштабних розвинень є прийнятним для застосування при дослідженні тришарової гідродинамічної системи «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою».

3.7. Теоретичні результати до розділу 3

На основі аналітичних розрахунків I–III розділів та за допомогою математичного пакету Maple отримано такі результати:

У першому та другому наближеннях отримано вирази відношень амплітуд відхилень поверхонь контакту. Побудовано графіки залежності відношень амплітуд від товщини нижнього та верхнього шарів та хвильового числа для різних фізичних параметрів системи.

Для першого наближення помітно, що зміна густини середнього або верхнього шарів трохи більше впливає на зміну значення абсолютних величин a_1 та a_2 , ніж зміна висот h_1 та h_3 . Проте якісна поведінка графіків не

змінюється: у системах (a_1, h_1) та (a_2, h_1) значення абсолютних величин збільшується зі збільшенням товщини h_1 . У системах (a_1, h_3) та (a_2, h_3) значення абсолютних величин зменшуються. В усіх випадках існують граничні значення, до яких наближаються абсолютні величини a_1 та a_2 .

Проте в системах (a_1, k) та (a_2, k) поведінка графіків відрізняється та у випадках $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$ та $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$ суттєво змінюється.

Також зафіксовано випадки рівності абсолютних величин a_1 та a_2 .

Для другого наближення поведінка графіків абсолютних величин c_1 та c_2 на різних проміжках відрізняється. Виявлено випадки локальних максимумів та мінімумів. Це дозволяє виявити ті фізичні параметри системи, за яких внесок хвиль із частотами $2\omega_1$ та $2\omega_2$ у внутрішній хвильовий рух є максимальним. Також для першого та другого наближень виявлено, що внесок хвиль із частотами ω_1 та ω_2 у хвильовий рух приблизно однаковий.

При дослідженні модуляційної стійкості виявлений значний вплив на межі областей стійкості таких фізичних та геометричних параметрів системи, як товщина нижнього та верхнього шарів, густини середнього та верхнього шарів. Отримано відповідні діаграми модуляційної стійкості в системах (ρ_3, k) та (ρ_2, k) для обох пар коренів дисперсійного рівняння та виконано їх аналіз. У системах (ρ_3, k) та (ρ_2, k) для першого кореня при рівності $h_1 = 1$, $h_3 = 1$ налічується чотири області модуляційної стійкості та дві області нестійкості. Збільшення однієї з товщин $h_1 = 4$ або $h_3 = 4$ призводить до злиття двох областей стійкості в одну в результаті зменшення однієї з областей нестійкості. Таким чином кількість областей стійкості зменшується до трьох. Подальше збільшення однієї з товщин вже не впливає на зміну меж стійкості. У випадку одночасного збільшення товщин $h_1 = 5$, $h_3 = 5$ у системі (ρ_3, k) налічується одна область нестійкості та дві області модуляційної стійкості. З точки зору впливу густини в системі (ρ_3, k) наявні чотири області

стійкості та дві області нестійкості. При збільшенні густини середнього шару з $\rho_2 = 0.7$ до $\rho_2 = 0.8$ межі областей стійкості суттєво не змінюються. У системі (ρ_2, k) при збільшенні густини верхнього шару з $\rho_3 = 0.1$ до $\rho_3 = 0.7$ межі стійкості помітно змінюються. Для всіх випадків наявні області стійкості, які відповідають як гравітаційним, так і капілярним хвилям.

Для другого кореня в системі (ρ_3, k) при $\rho_2 = 0.7$ та $\rho_2 = 0.8$ наявні дві області стійкості та одна область нестійкості. Проте при $\rho_2 = 0.9$ налічується одна область стійкості та дві області модуляційної нестійкості. Отже, збільшення густини середнього шару призводить до злиття областей стійкості. При збільшенні висоти нижнього шару та при одночасному збільшенні h_1 та h_3 налічується одна область нестійкості, оточена областю модуляційної стійкості. У системі (ρ_2, k) для всіх значень густини верхнього шару налічується одна область модуляційної нестійкості, оточена областю стійкості. В усіх випадках області стійкості та нестійкості відповідають гравітаційним хвилям.

При дослідженні форми хвильових пакетів отримано рівняння, якими визначається форма хвильового пакету, для обох поверхонь контакту. Графічно проілюстровано та проаналізовано межі знакосталості коефіцієнтів, які впливають на форму хвильових пакетів. Також наведено графіки відхилень поверхонь контакту для обох пар частот, виконано їх аналіз. Встановлено, що через урахування другого наближення для відхилень обох поверхонь контакту виникає асиметрія гребнів та підшвів хвильових пакетів. Періодичне затуплення або загострення гребнів хвиль указує на вплив ефектів дисперсії та нелінійності. Також встановлено, що для другої пари частот для нижньої поверхні контакту хвильові пакети завжди будуть мати \cap - подібну форму.

Також досліджено явище резонансу других гармонік, отримано графіки областей резонансу для обох пар коренів у системах (ρ_3, k) та (ρ_2, k) . Області

резонансу вказують на параметри тришарової системи, при яких друга гармоніка набуває великих значень. Причиною є те, що при дослідженні резонансу не враховувалися наближення вищих порядків. Також у математичній постановці системи не враховувалася в'язкість. Проте, оскільки друге наближення множиться на α , який є досить малою величиною, ефект резонансу компенсується.

Досліджено потік енергії, яку переносять за період τ внутрішні прогресивні хвилі на поверхнях контакту та на поверхні шару з твердою кришкою. Побудовано та проаналізовано графіки залежності повного потоку енергії від різних геометричних та фізичних параметрів тришарової гідродинамічної системи. Досліджено граничний випадок, за якого тришарова система «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» вироджується у двошарову систему «шар із твердим дном – шар із кришкою», що підтверджує фізичну достовірність отриманих результатів.

ВИСНОВКИ

При дослідженні задачі поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» з використанням математичного пакету Maple отримано наступні результати:

Досліджено стан вивчення проблеми поширення внутрішніх хвиль у стратифікованих рідинах за останні декілька років. Результати показали, що на сьогоднішній час досить мала кількість досліджень присвячена вивченню внутрішніх хвиль, довжина яких значно менша від товщини рідкого шару. Математичні моделі, представлені сьогодні вченими з різних країн світу, не охоплюють усіх видів стратифікованих рідин. Отже, проблема поширення хвиль у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» є актуальною.

Виконано математичну постановку слабконелінійної задачі поширення та взаємодії хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою». Дану постановку отримано в безрозмірному вигляді. За допомогою методу багатомасштабних розвинень отримано перші три наближення задачі.

Для першої лінійної задачі отримано дисперсійне співвідношення, яке має дві пари коренів, які є частотами центрів хвильових пакетів. Дані корені виникли вперше серед задач такого класу. Встановлено зв'язок між амплітудами верхньої та нижньої поверхонь контакту. Наявність додаткової пари коренів пояснюється існуванням двох поверхонь контакту.

Отримано аналітичні розв'язки задачі другого наближення та частина розв'язків для задачі третього наближення. Для другого та третього наближень отримано відповідні умови існування нетривіальних розв'язків за рахунок виключення секулярних членів. Перевірку отриманих умов виконано з використанням математичного пакету Maple.

На основі дисперсійного співвідношення та умов існування нетривіальних розв'язків другого та третього наближень отримано

еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на нижній та верхній поверхнях контакту у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера. На основі еволюційних рівнянь для нижньої та верхньої поверхонь контакту отримано умови модуляційної стійкості.

Отримано вирази відношень амплітуд відхилень поверхонь контакту для перших двох наближень. Побудовано та проаналізовано графіки залежності відношень амплітуд від різних фізичних параметрів. Для першого наближення виявлено випадки рівності абсолютних величин. Для другого наближення виявлено випадки локальних максимумів та мінімумів, що допомогло виявити фізичні параметри системи, при яких хвилі з частотами $2\omega_1$ та $2\omega_2$ роблять максимальний внесок у внутрішній хвильовий рух. Для перших двох наближень проаналізовано рівень внеску хвиль із частотами ω_1 та ω_2 у внутрішні хвильові рухи на поверхнях контакту.

Досліджено умови модуляційної стійкості для обох коренів дисперсійного рівняння для нижньої та верхньої поверхонь контакту. Виявлений суттєвий вплив на зміну меж модуляційної стійкості таких фізичних та геометричних параметрів системи, як товщина нижнього та верхнього шарів, густини середнього та верхнього шарів. Побудовано та проаналізовано діаграми модуляційної стійкості в системах (ρ_3, k) та (ρ_2, k) . Виявлено випадки злиття областей модуляційної стійкості.

В результаті дослідження форми хвильових пакетів отримано рівняння, якими визначається форма хвильового пакету на поверхнях контакту. Побудовано та проаналізовано графіки меж знакосталості коефіцієнтів, які впливають на форму хвильових пакетів. Графіки областей знакосталості показують, що у всіх випадках наявні області, у яких хвилі мають загострену або затушлену форму. Також побудовано та проаналізовано графіки відхилень поверхонь контакту для обох пар частот. Виявлено, що для другої пари частот для нижньої поверхні контакту хвильові пакети завжди матимуть \cap - подібну форму. Встановлено, що через урахування другого наближення

для відхилень обох поверхонь контакту виникає асиметрія гребнів та підосів хвильових пакетів, що свідчить про вплив ефектів дисперсії та нелінійності.

Досліджено явище резонансу других гармонік, побудовано та проаналізовано графіки областей резонансу в системах (ρ_3, k) та (ρ_2, k) . Области резонансу відповідають параметрам системи, при яких друга гармоніка набуває великих значень. Дане явище виникає через неврахування в'язкості та наближень вищих порядків. Проте ефект резонансу компенсується за рахунок наявності множника α . Також, здійснено оцінку застосовності методу багатомасштабних розвинень.

Досліджено потік енергії, яку переносять за період τ внутрішні прогресивні хвилі на поверхнях контакту та на поверхні шару з твердою кришкою в першому наближенні. Побудовано та проаналізовано графіки залежності потоку повної енергії від різних геометричних та фізичних параметрів тришарової гідродинамічної системи. Досліджено граничний випадок, який описується рівністю густин середнього та верхнього шарів. Установлено, що тришарова система «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» вироджується у двошарову систему «шар із твердим дном – шар із кришкою», що є підтвердженням достовірності отриманих результатів.

Теоретичний та практичний інтерес результатів дослідження тришарової системи «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою» підтверджується тим, що дана гідродинамічна стратифікована система моделює подібні стратифіковані ділянки Світового океану в прибережних зонах за наявності льодового покриття або іншої твердої поверхні. Тому вони можуть бути використані як теоретична база для досліджень, пов'язаних із вивченням внутрішніх хвиль в океані або гідродинамічних системах, створених у лабораторних умовах, та досліджень, що мають на меті розробку спеціальних пристроїв, які використовують енергію внутрішніх хвиль. Таким чином, тема дослідження враховує сучасні проблеми математичного моделювання та суміжних наук.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Abrashkin A. A. Dynamics of a Wave Packet on the Surface of an Inhomogeneously Vortical Fluid (Lagrangian Description) / A. A. Abrashkin, E. N. Pelinovsky // *Izvestiya - Atmospheric and Oceanic Physics*. – 2018. – Vol. 54(1). – P. 101-105.
2. Adcock T. A. A. Fast and local non-linear evolution of steep wave-groups on deep water: A comparison of approximate models to fully non-linear simulations / T. A. A. Adcock, P. H. Taylor // *PHYSICS OF FLUIDS*. – 2016. – Vol. 28(1).
3. Akylas T. R. David J. Benney: Nonlinear Wave and Instability Processes in Fluid Flows / T. R. Akylas // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 2020. – Vol. 52. – P. 21-36.
4. Alias A. Coupled Ostrovsky equations for internal waves in a shear flow / A. Alias, R. H. J. Grimshaw, K. R. Khusnutdinova // *Physics of fluids*. – 2014. – Vol. 26(12). – 126603.
5. Alias A. The Evolution of Nonlinear Wave Packets in Variable-coefficient Ostrovsky Equation / A. Alias // *Proceeding of the 25th national symposium on mathematical sciences (sksm25): mathematical sciences as the core of intellectual excellence*. – Kuantan, Malaysia, 2018. – Vol. 1974. – 020073.
6. Allilueva A. I. Short-Wave Asymptotic Solutions of the Wave Equation with Localized Perturbations of the Velocity / A. I. Allilueva, A. I. Shafarevich // *Russ. J. Math. Phys.* – 2020. – Vol. 27(2). – P. 145-154.
7. Ankudinov N. O. Vertical Momentum Transfer Induced by Internal Waves in a Two-Dimensional Flow / N. O. Ankudinov, A. A. Slepyshev // *Fluid dynamics*. – 2021. – Vol. 56(3). – P. 343-352. doi: 10.1134/S0015462821030022
8. Avramenko O. Analysis of energy of internal waves in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system / O. Avramenko, M. Lunyova // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2018. – Vol. 2/5(92). – P. 26-33.

9. Avramenko O. Stability of wave-packets in the two-layer fluid with free surface and rigid bottom / O. Avramenko, V. Naradovyy // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. – 2011. – Vol. 1. – P. 5-12.
10. Avramenko O. V. Analysis of Propagation of Weakly Nonlinear Waves in a Two-layer Fluid with Free Surface / O.V. Avramenko, V. Naradovyi // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2015. – Vol. 4. – № 7(76). – P. 39-44.
11. Avramenko O. V. Energy of Motion of Internal and Surface Waves in a Two-Layer Hydrodynamic System / O. V. Avramenko, V. V. Naradovyi, I. T. Selezov // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 229(3). – P. 241–252.
12. Avramenko O. Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid / O. Avramenko, M. Lunyova, V. Naradovyi // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – Vol. 5(5). – P. 58-66. doi: 10.15587/1729-4061.2017.111941
13. Barros R. Choi W. Milewski P. A. Strongly nonlinear effects on internal solitary waves in three-layer flows / R. Barros, W. Choi, P. A. Milewski // J. Fluid Mech. – 2020. – Vol. 883.
14. Bianchini R. Near-critical reflection of internal waves / R. Bianchini, A. L. Dalibard, L. Saint-Raymond // Analysis & PDE. – 2021. – Vol. 14, №. 1. – P. 205-249. doi: 10.2140/apde.2021.14.205
15. Cai T. Enhancement of wave transmissions in multiple radiative and convective zones / T. Cai, C. Yu, X. Wei // Journal of fluid mechanics. – 2021. – Vol. 915. – A125. doi: 10.1017/jfm.2021.178
16. Cal F. S. Edge waves propagating in a two-layer fluid along a periodic coastline / F. S. Cal, G. A. S. Dias, B. M. M. Pereira, J. H. Videman // Journal of engineering mathematics. – 2014. – Vol. 85(1). – P. 1-17.
17. Calvert R. Laboratory study of the wave-induced mean flow and set-down in unidirectional surface gravity wave packets on finite water depth / R. Calvert,

- C. Whittaker, A. Raby, P. H. Taylor, A. G. L. Borthwick, T. S. van den Bremer // *Physical review fluids*. – 2019. – Vol. 4(11).
18. Camassa R. Hamiltonian Aspects of Three-Layer Stratified Fluids / R. Camassa, G. Falqui, G. Ortenzi, M. Pedroni, T. T. V. Ho // *Journal of nonlinear science*. – 2021. – Vol. 31(4). – 70. – P. 1-32. doi: 10.1007/s00332-021-09726-0
 19. Chan H. N. Modeling internal rogue waves in a long wave-short wave resonance framework / H. N. Chan, R. H. J. Grimshaw, K. W. Chow // *Physical Review Fluids*. – 2018. – Vol. 3(12).
 20. Chashechkin Y. D. Conventional Partial and Complete Solutions of the Fundamental Equations of Fluid Mechanics in the Problem of Periodic Internal Waves with Accompanying Ligaments Generation / Y. D. Chashechkin // *Mathematics*. – 2021. – Vol. 9(6). – 586 – P. 1-26. doi: 10.3390/math9060586
 21. Chen L. On rotational flows with discontinuous vorticity beneath steady water waves near stagnation / L. Chen, B. Basu, C. I. Martin // *Journal of fluid mechanics*. – 2021. – Vol. 912. doi: 10.1017/jfm.2020.1057
 22. Chow K. W. Brief communication: Modulation instability of internal waves in a smoothly stratified shallow fluid with a constant buoyancy frequency / K. W. Chow, H. N. Chan, R.H. J. Grimshaw // *Natural Hazards and Earth System Sciences*. 2019. – Vol. 19(3). – P. 583-587.
 23. Cui J. F. A theory of nonlinear interfacial-internal wave propagation in three-layer density-stratified fluid systems with free upper boundary / J. F. Cui, S. R. Munjam, X. G. Chen, W. Y. Wen, B. L. Zhang // *Indian Journal of Geo-Marine Sciences*. – 2018. – Vol. 47(11). – P. 2171-2181.
 24. Cui W. Second-order Stokes wave solutions for gravity capillary water waves in three-layer density-stratified fluid / W. Cui, Z. Z. Yan, R. Mu // *Acta physica sinica*. – 2014. – Vol. 63(14). – 140301.
 25. Deepwell D. Vortex generation due to internal solitary wave propagation past a sidewall constriction / D. Deepwell, C. Clarry, C. Subich, M. Stastna //

- Journal of fluid mechanics. – 2021. – Vol. 913. – A47; PII S0022112021000252. doi: 10.1017/jfm.2021.25
26. Deike L. Lagrangian transport by breaking surface waves / L. Deike, N. Pizzo, W. K. Melville // Journal of fluid mechanics, 2017. – Vol. 829. – P. 364-391.
 27. Derzho O. G. Large amplitude capillary-gravity solitary waves in a stratified fluid sandwiched between two deep homogeneous layers / O. G. Derzho // CHAOS. – 2021. – Vol. 31(6). – 063104. doi: 10.1063/5.0047032
 28. Du H. Experimental investigation of elevation internal solitary wave propagation over a ridge / H. Du, S. D. Wang, X. L. Wang, J. N. Xu, H. L. Guo, G. Wei // Physics of fluids.– 2021. – Vol. 33(4). – 042108. doi: 10.1063/5.0046407
 29. Dyachenko A. I. Free surface in two-dimensional potential flow: singularities, invariants and virtual fluid / A.I. Dyachenko, S.A. Dyachenko, V.E. Zakharov // J. Fluid Mech. – 2022. – Vol. 952. – A30.
 30. Grimshaw R. Modulational Instability and Rogue Waves in Shallow Water Models / R. Grimshaw, K. W. Chow, H. N. Chan // New Approaches to Nonlinear Waves. – 2016. – Vol. 908. – P. 135-151.
 31. Howland C. J. Shear-induced breaking of internal gravity waves / C. J. Howland, J. R. Taylor, C. P. Caulfield // Journal of fluid mechanics. – 2021. – Vol. 921. – A24. doi: 10.1017/jfm.2021.506
 32. Hsu H. C. Lagrangian approach to interfacial water waves with free surface / H. C. Hsu, C.C. Tsai // Applied ocean research. – 2016. – Vol. 59. – P. 616-637.
 33. Hur V. M. Stability of periodic traveling waves for nonlinear dispersive equations / V. M. Hur, M. A. Johnson // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 2015. – Vol. 47(5). – P.3528-3554.
 34. Jo T. C. Dynamics of strongly nonlinear internal long waves in a three-layer fluid system / T. C. Jo, Y. K. Choi // Ocean science journal. – 2014. – Vol. 49(4). – P. 357-366.

35. Johnson E. R. Wave packets in the anomalous Ostrovsky equation / E. R. Johnson // *Physical review E*. – 2019. – Vol. 100(4). – 043109.
36. Kargbo O. Multiphase sloshing dynamics of a two-layered fluid and interfacial wave interaction with a porous T-shaped baffle in a tank / O. Kargbo, M. A. Xue, J. H. Zheng, X. L. Yuan // *Ocean engineering*. – 2021. – Vol. 229. – 108664. doi: 10.1016/j.oceaneng.2021.108664
37. Kharif C. Stability of periodic progressive gravity wave solutions of the Whitham equation in the presence of vorticity / C. Kharif, M. Abid, J. D. Carter, H. Kalisch // *Physics Letters A*. – 2020. – Vol. 384(2). – 126060.
38. Konstantinov A. V. Dynamic Methods of Damping the Oscillation in Structure–Free-Surface Fluid System / A. V. Konstantinov, O. S. Limarchenko, V. V. Lukyanchuk, A. A. Nefedov // *International Applied Mechanics*. – 2019. – Vol. 55. – P. 58–67.
39. Kundu P. Generation of surface waves due to initial axisymmetric surface disturbance in viscous fluid of finite depth / P. Kundu, B. N. Mandal // *Archive of Applied Mechanics*. – 2021. – Vol. 91(5). – P. 2381-2392. doi: 10.1007/s00419-021-01888-3
40. Kurkina O. E. Propagation regimes of interfacial solitary waves in a three-layer fluid / O. E. Kurkina, A. A. Kurkin, E. A. Rouvinskaya, T. Soomere // *Nonlinear processes in geophysics*. – 2015. – Vol. 22(2). – P. 117-132.
41. Legg S. Mixing by Oceanic Lee Waves / S. Legg // *Annual review of fluid mechanics*. – 2021. – Vol. 53. – P. 173-201. doi: 10.1146/annurev-fluid-051220-043904
42. Li Y. P. Stability of the planar rarefaction wave to two-dimensional Navier-Stokes-Korteweg equations of compressible fluids / Y. P. Li , Z. Z. Chen, Z. Luo // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 43(6). – P. 3307-3330.
43. Lobovikov P. V. Transformation of the First Mode Breather of Internal Waves above a Bottom Step in a Three-Layer Fluid / P. V. Lobovikov,

- O. E. Kurkina, A. A. Kurkin, M. V. Kokoulina // *Izvestiya atmospheric and oceanic PHYSICS*. – 2019. – Vol. 55(6). – P. 650-661.
44. Lu Z. Y. Research on Efficiency of a Wave Energy Conversion System / Z. Y. Lu, J. Z. Shang, Z. R. Luo, C. F. Sun, G. W. Chen // *IOP Conference Series-Materials Science and Engineering, Hong Kong, China*. – 2018. – Vol. 307. – 012009. doi:10.1088/1757-899X/307/1/012009
45. Luo M. J. Experimental and Numerical Study of Stratified Sloshing in a Tank under Horizontal Excitation / M. J. Luo, M. A. Xue, X. L. Yuan, F. Zhang, Z. Xu // *Shock and vibration*. – 2021. – Vol. 2021. – 6639223. doi: 10.1155/2021/6639223
46. Makarenko N. Internal waves in marginally stable abyssal stratified flows / N. Makarenko, J. Maltseva, E. Morozov, R. Tarakanov, K. Ivanova // *Nonlinear processes in geophysics*. – 2018. – Vol. 25(3). – P. 659-669.
47. Massel S. R. On the nonlinear internal waves propagating in an inhomogeneous shallow sea / S. R. Massel // *Oceanologia*. – 2016. – Vol. 58(2). – P. 59-70.
48. Mindlin I. M. Water Waves: Theory and Experiments / I. M. Mindlin// *Fluid dynamics*. – 2020. – Vol. 55(4). – P. 498-510.
49. Moretti G. Resonant wave energy harvester based on dielectric elastomer generator / G. Moretti, G. P. R. Papini, M. Righi, D. Forehand, D. Ingram, R. Vertechy, M. Fontana // *Smart Materials and Structures*. – 2018. – Vol. 27(3). – 035015.
50. Naradovyi V. Investigation of the energy of wave motions in a three-layer hydrodynamic system / V. Naradovyi, D. Kharchenko // *Waves in Random and Complex Media*. – 2021. – Vol. 31(6). – P. 1729-1748.
51. Nayfeh A. H. Nonlinear Propagation of Wave-Packets on Fluid Interfaces / A. H. Nayfeh // *J. Appl. Mech*. – 1976. – Vol. 43(4). – P. 584-588.
52. Ostrovsky L. A. Kinematics of interacting solitons in two-dimensional space / L. A. Ostrovsky, Y. A. Stepanyants // *Russian journal of earth sciences*. – 2020. – Vol. 20(4). – ES4007.

53. Pan Q. Triads and Rogue Events for Internal Waves in Stratified Fluids with a Constant Buoyancy Frequency / Q. Pan, H. M. Yin, K. W. Chow // *Journal of marine science and engineering*. – 2021. – Vol. 9(6). – 577. doi: 10.3390/jmse9060577
54. Panda S. Oblique Wave Scattering by An Undulating Porous Bottom in A Two-Layer Ice-Covered Fluid / S. Panda // *China ocean engineering*. – 2016. – Vol. 30(3). – P. 431-446.
55. Panda S. Transformation of Water-wave Energy in Two-layer Ocean in the Presence of Surface Tension / S. Panda, S. C. Martha // *In Conference on Recent Advances in Engineering and Computational Sciences*. – 2014, March. – Chandigarh, India.
56. Panda S. Water-waves Scattering by Permeable Bottom in Two-layer Fluid in the Presence of Surface Tension / S. Panda, S. C. Martha // *Mathematical modelling and analysis*. – 2017. – Vol. 22(6). – P. 827-851.
57. Pava J. A. Existence of solitary wave solutions for internal waves in two-layer systems / J. A. Pava, J. C. Saut // *Quarterly of applied mathematics*. – 2020. – Vol. 78(1). – P. 75-105.
58. Pelinovsky E. Interfacial long traveling waves in a two-layer fluid with variable depth/ E. Pelinovsky, T. Talipova, I. Didenkulova, E. Didenkulova // *Studies in applied mathematics*. – 2019. – Vol. 142(4). – P. 513-527.
59. Purkait A. Modulational instability of two obliquely interacting waves in two-layer fluid domain / A. Purkait, S. Debsarma // *Ocean Dynamics*. – 2019. – Vol. 69(1). – P. 21-27.
60. Purkait A. Modulational instability of two obliquely interacting waves in presence of a thin pycnocline / A. Purkait, S. Debsarma // *European Journal of Mechanics B-Fluids*. – 2020. – Vol. 84. – P. 517-527.
61. Quinting J. F. On the Impact of Tropical Cyclones on Rossby Wave Packets: A Climatological Perspective / J. F. Quinting, S. C. Jones // *Monthly weather review*. – 2016. – 144(5). – P. 2021-2048.

62. Selezov I. T. Nonlinear interaction of internal and surface gravity waves in a two-layer fluid with free surface / I. T. Selezov, O. V. Avramenko, Yu. V. Gurtovyi, and V. V. Naradovyi // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2010. – Vol. 168(4). – P. 590–602.
63. Shan Z. D. Transient wave propagation in a multi-layered soil with a fluid surface layer: 1D analytical /semi-analytical solutions / Z. D. Shan, L. P. Jing, L. Zhang, Z. N. Xie, D. S. Ling // *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. – 2021. – Vol. 45(13). – P. 2001-2015. doi: 10.1002/nag.3253
64. Su D. Exact azimuthal equatorially trapped waves with centripetal force in modified equatorial beta-plane approximation and at arbitrary latitude / D. Su // *Monatshefte fur mathematic*. – 2022. – Vol. 197(2). – P. 365-380. doi: 10.1007/s00605-021-01565-1
65. Talipova T. Internal Wave Breathers in the Slightly Stratified Fluid / T. Talipova, O. Kurkina, A. Kurkin, E. Didenkulova, E. Pelinovsky // *Microgravity Science and Technology*. – 2020. – Vol. 32(1). – P. 69-77.
66. Tarapov I. E. *Continuum Mechanics: Vol. 3, Mechanics of Inviscid Liquid* [in Russian], Zolotye Stranitsy, Kharkov. – 2005.
67. Ter-Krikorov A. M. Evolution of vortices and internal waves in a stratified fluid / A. M. Ter-Krikorov // *Phys.-Dokl.* 39. – 1994. – No. 9. – P. 650-652.
68. Terletska K. Frontal collision of internal solitary waves of first mode / K. Terletska, K. T. Jung, V. Maderich, K. O. Kim // *Wave Motion*. – 2018. – Vol. 77. – P.229-242. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2017.12.006>
69. Terletska K. V. Modeling of gravity currents in oceans and inland reservoirs / K. V. Terletska // According to the materials of scientific report at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine. – 2019, September 11. <https://doi.org/10.15407/visn2019.10.031>
70. Vincze M. Experiments on barotropic-baroclinic conversion and the applicability of linear n-layer internal wave theories / M. Vincze, B. Tamas // *Experiments in Fluids*. – 2017. – Vol. 58(10). – 136.

71. Wang L. Semirational solutions and baseband modulational instability of the AB system in fluid mechanics / L. Wang, Z. Z. Wang, D. Y. Jiang, F. H. Qi, R. Guo // *European Physical Journal Plus*. – 2015. – Vol. 130(10). – P. 199.
72. Wang S. Y. Density Perturbation and Energy Flux of Internal Waves from Velocity Data / S. Y. Wang, J. H. Wang, X. Chen, J. Meng, H. Wang // *Journal of ocean university of China*. – 2018. – Vol. 17(4). – P. 727-732.
73. Wang X. Numerical and experimental study of internal solitary wave loads on tension leg platforms / X. Wang, J. F. Zhou // *Journal of Hydrodynamics*. – 2021. – Vol. 33(1). – P. 93-103. doi: 10.1007/s42241-021-0015-y
74. Watanabe Y. Wave packet focusing in shallow water / Y. Watanabe, Y. Tsuda, A. Saruwatari // *Coastal engineering journal*. – 2020. – Vol. 62(2). – P. 336-348.
75. Weber J. E. H. On the singular behavior of the Stokes drift in layered miscible fluids / J. E. H. Weber, K. H. Christensen // *Wave motion*. – 2021. – Vol. 102. – P. 102712. doi: 10.1016/j.wavemoti.2021.102712
76. Zhao B. B. Experimental and numerical studies on internal solitary waves with a free surface / B. B. Zhao, Z. Wang, W. Y. Duan, R. C. Ertekin, M. Hayatdavoodi, T. Y. Zhang // *Journal of fluid mechanics*. – 2020. – Vol. 899.
77. Авраменко О. Модуляційна стійкість хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі / О. Авраменко, М. Луньова // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА* – 2019. – Вип. 1(40). – С. 30-34.
78. Алексеев Д. В. Моделирование ветровых волн и течений в Каркинитском заливе Черного моря / Д. В. Алексеев, В. А. Иванов, Е. В. Иванча, Л. В. Черкесов // *Доповіді Національної академії наук України*. – 2009. – № 10. – С. 108-114.
79. Лимарченко О. С. Перерозподіл енергії між резервуаром і рідиною з вільною поверхнею при кутових рухах системи / О. С. Лимарченко, К. О. Семенович // *Нелінійні коливання*. – 2016. – Т. 19, № 1. – С. 85-92.

80. Нарadowий В. В. Дослідження хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» / Математичне моделювання // В. В. Нарadowий, Д. С. Харченко. – 2022. – №1(46). – С. 32-43. Doi: [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(46\)2022.258346](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(46)2022.258346)
81. Нарadowий В. В. Енергія хвиль в тришаровій гідродинамічній системі в гарничному випадку / В. В. Нарadowий, Д. С. Харченко // Наукові записки. Серія: Математичні науки. – 2019. – № 75.
82. Нарadowий В. В. Резонанс другої гармоніки в тришаровій рідині / В. В. Нарadowий, Д. С. Харченко // Наукові записки молодих учених. – 2021. – № 8. <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1891/pdf>
83. Пацегон Н. Ф. Устойчивость свободной поверхности вязкой намагничивающейся жидкости при многопараметрическом возбуждении / Н. Ф. Пацегон, С. И. Поцелуев // Прикладна гідромеханіка. – 2014. – Вип. 16, № 3. – С. 36-51.
84. Селезов И. Т. Бифуркация рождения цикла в береговых экогеосистемах / И. Т. Селезов, Ю. Г. Кривонос, В. М. Московкин // Кібернетика і системний аналіз. – 2016. – Вип. 52 (4). – С. 55-64.
85. Селезов И. Т. Нелинейная устойчивость распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости / И. Т. Селезов, О. В. Авраменко, Ю. В. Гуртовий // Прикладна гідромеханіка. – 2006. – Вип. 8. – № 4. – С. 60-65.
86. Селезов И. Т. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины / И. Т. Селезов, О. В. Авраменко, Ю. В. Гуртовий // Прикладна гідромеханіка. – 2005. – Т. 7(79), № 1. – С. 80–89.
87. Харченко Д. С. Форма хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі / Д. С. Харченко // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна

математика і механіка». – 2021. – Том 94. – С. 77-90. Doi: <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2021-94-05>

88. Харченко Д. С. Дослідження енергії хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі / Д. С. Харченко // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: Збірка матеріалів XIV міжнародної наукової конференції для молодих вчених / Під ред. проф. Жолткевича Г. М. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – С. 35-36.
89. Харченко Д. С. Дослідження модуляційної стійкості хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі / Д. С. Харченко // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: тези доповідей XVI Міжнародної наукової конференції для студентів та молодих вчених (12 - 13 березня 2021 р. м. Харків, Україна). – Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2021 – С. 27-29.
90. Харченко Д. С. Дослідження форми пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» / Д. С. Харченко // Пріоритетні шляхи розвитку науки і освіти: матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції м. Львів, 20-21 липня 2022 року. – Львів: Львівський науковий форум, 2022. – С. 23-25.
91. Харченко Д. С. Дослідження явища резонансу у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» / Д. С. Харченко // Теорія і практика сучасної науки та освіти: матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції м. Львів, 20-21 червня 2022 року. – Львів: Львівський науковий форум, 2022. – С. 45-47.
92. Харченко Д. С. Модуляційна стійкість хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» / Д. С. Харченко, В. В. Наратовий // Матеріали VI Всеукраїнської онлайн-конференції молодих науковців «Сучасні проблеми природничих і точних наук». – Ніжин: «Наука-сервіс», 2021. – С. 63-64.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А.

Програма для розрахунку повної енергії, що переносить хвиля у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» у першому наближенні

restart:

// підключаємо необхідні бібліотеки лінійної алгебри
with(plots):

// задаємо розв'язки першого наближення

// для моди ω_1

phi1[11] := unapply(2*omega[1]*cosh(k*(h[1]+z))*A*sin(k*x-t*omega[1])/(k*sinh(k*h[1])), z, x, t):

phi1[21] := unapply(-((omega[1]*cosh(k*(h[2]-z)))/(k*sinh(k*h[2]))+((1-rho[2])*k+T[1]*k^3-omega[1]^2*coth(k*h[1])-rho[2]*omega[1]^2*coth(k*h[2]))*cosh(k*z)/(rho[2]*omega[1]*k))^2)*A*sin(k*x-t*omega[1]), z, x, t):

phi1[31] := unapply(2*sinh(k*h[2])*((1-rho[2])*k+T[1]*k^3-omega[1]^2*coth(k*h[1])-rho[2]*omega[1]^2*coth(k*h[2]))*cosh(k*(h[2]+h[3]-z))*A*sin(k*x-t*omega[1])/(rho[2]*omega[1]*k*sinh(k*h[3])), z, x, t):

// для моди ω_2

phi2[11] := unapply(-2*omega[2]^3*rho[2]*cosh(k*(h[1]+z))*B*sin(k*x-t*omega[2])/(k*sinh(k*h[1])*sinh(k*h[2])*((1-rho[2])*k+T[1]*k^3-omega[2]^2*coth(k*h[1])-rho[2]*omega[2]^2*coth(k*h[2]))), z, x, t):

phi2[21] := unapply(2*omega[2]*(omega[2]^2*rho[2]*cosh(k*(h[2]-z))/(sinh(k*h[2])*((1-rho[2])*k+T[1]*k^3-omega[2]^2*coth(k*h[1])-rho[2]*omega[2]^2*coth(k*h[2])))+cosh(k*z))*B*sin(k*x-t*omega[2])/(k*sinh(k*h[2])), z, x, t):

phi2[31] := unapply(-2*omega[2]*cosh(k*(h[2]+h[3]-z))*B*sin(k*x-t*omega[2])/(k*sinh(k*h[3])), z, x, t):

// Обчислення повної енергії для поверхонь контакту та для поверхні з кришкою

dob1 := unapply((diff(phi1[11](z, x, t)+phi2[11](z, x, t), t))*(diff(phi1[11](z, x, t)+phi2[11](z, x, t), x)), z, x, t):

dob2 := unapply(expand((diff(phi1[21](z, x, t)+phi2[21](z, x, t), t))*(diff(phi1[21](z, x, t)+phi2[21](z, x, t), x))), z, x, t):

dob3 := unapply((diff(phi1[31](z, x, t)+phi2[31](z, x, t), t))*(diff(phi1[31](z, x, t)+phi2[31](z, x, t), x)), z, x, t):

prom1 := unapply(int(dob1(z, x, t), z), z, x, t):

prom2 := unapply(int(dob2(z, x, t), z), z, x, t):

prom3 := unapply(int(dob3(z, x, t), z), z, x, t):

pr1 := unapply(prom1(0, x, t)-prom1(-h[1], x, t), x, t):

pr2 := unapply(prom2(h[2], x, t)-prom2(0, x, t), x, t):

pr3 := unapply(prom3(h[2]+h[3], x, t)-prom3(h[2], x, t), x, t):

```
E1 := unapply(-(int(pr1(x, t), t = t .. t+tau))/tau, A, B, k, rho[2], rho[3], h[1], h[2], h[3], T[1],
T[2], t, tau, omega[1], omega[2], x):
```

```
EE2 := unapply(-rho[2]*(int(pr2(x, t), t))/tau, A, B, k, rho[2], rho[3], h[1], h[2], h[3], T[1], T[2],
t, tau, omega[1], omega[2], x):
```

```
E2 := unapply(EE2(A, B, k, rho[2], rho[3], h[1], h[2], h[3], T[1], T[2], t+tau, tau, omega[1],
omega[2], x)-EE2(A, B, k, rho[2], rho[3], h[1], h[2], h[3], T[1], T[2], t, tau, omega[1], omega[2],
x), A, B, k, rho[2], rho[3], h[1], h[2], h[3], T[1], T[2], t, tau, omega[1], omega[2], x):
```

```
E3 := unapply(-rho[3]*(int(pr3(x, t), t = t .. t+tau))/tau, A, B, k, rho[2], rho[3], h[1], h[2], h[3],
T[1], T[2], t, tau, omega[1], omega[2], x):
```

// *Задаємо коефіцієнти дисперсійного рівняння*

```
a := rho[2]^2/sinh(k*h[2])^2-
(rho[2]*coth(k*h[2])+rho[3]*coth(k*h[3]))*(coth(k*h[1])+rho[2]*coth(k*h[2])):
b := (rho[2]*coth(k*h[2])+rho[3]*coth(k*h[3]))*((1-rho[2])*k+T[1]*k^3)+(k*(rho[2]-
rho[3])+T[2]*k^3)*(coth(k*h[1])+rho[2]*coth(k*h[2])):
c := -(k*(rho[2]-rho[3])+T[2]*k^3)*((1-rho[2])*k+T[1]*k^3):
```

// *Задаємо корені дисперсійного рівняння*

```
v1 := unapply(sqrt((-b-sqrt(-4*a*c+b^2))/(2*a)), k, rho[2], rho[3], h[1], h[2], h[3], T[1], T[2]):
v2 := unapply(sqrt((-b+sqrt(-4*a*c+b^2))/(2*a)), k, rho[2], rho[3], h[1], h[2], h[3], T[1], T[2]):
```

// *Задаємо значення фізичних параметрів для побудови графіків повної енергії для n'яти випадків значення хвильового числа k={0.01;0.1;1;2;5}*

```
AA := 0.5; p := AA; m := 5;
hh2 := 1; hh3 := 1; TT1 := 0; TT2 := 0; rr2 := 0.95; rr3 := 0.92; tt := 0; xx := 0; ttau := 100;
BB := 0.1;
```

```
kk := 0.01:
```

```
evalf(v1(kk, rr2, rr3, hh1, hh2, hh3, TT1, TT2)):
evalf(v2(kk, rr2, rr3, hh1, hh2, hh3, TT1, TT2)):
E1gr11 := unapply(evalf(E1(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
E2gr21 := unapply(evalf(E2(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
E3gr31 := unapply(evalf(E3(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
ES1 := unapply(E1gr11(h1)+E2gr21(h1)+E3gr31(h1), h1):
gr11 := plot(E1gr11(h1), h1 = p .. m, E, color = red, legend = "E1,k=0.01");
gr21 := plot(E2gr21(h1), h1 = p .. m, E, color = green, legend = "E2,k=0.01");
gr31 := plot(E3gr31(h1), h1 = p .. m, E, color = blue, legend = "E3,k=0.01");
gr41 := plot(ES1(h1), h1 = p .. m, E, color = black, legend = "Sum,k=0.01");
```

```
kk := 0.1:
```

```
E1gr12 := unapply(evalf(E1(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
E2gr22 := unapply(evalf(E2(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
```

```

E3gr32 := unapply(evalf(E3(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
ES2 := unapply(E1gr12(h1)+E2gr22(h1)+E3gr32(h1), h1):
gr12 := plot(E1gr12(h1), h1 = p .. m, E, color = red, legend = "E1,k=0.1", linestyle = dash);
gr22 := plot(E2gr22(h1), h1 = p .. m, E, color = green, legend = "E2,k=0.1", linestyle = dash);
gr32 := plot(E3gr32(h1), h1 = p .. m, E, color = blue, legend = "E3,k=0.1", linestyle = dash);
gr42 := plot(ES2(h1), h1 = p .. m, E, color = black, legend = "Sum,k=0.1", linestyle = dash);

kk := 1:
E1gr13 := unapply(evalf(E1(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
E2gr23 := unapply(evalf(E2(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
E3gr33 := unapply(evalf(E3(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
ES3 := unapply(E1gr13(h1)+E2gr23(h1)+E3gr33(h1), h1):
gr13 := plot(E1gr13(h1), h1 = p .. m, E, color = red, legend = "E1,k=1", linestyle = dashdot);
gr23 := plot(E2gr23(h1), h1 = p .. m, E, color = green, legend = "E2,k=1", linestyle = dashdot);
gr33 := plot(E3gr33(h1), h1 = p .. m, E, color = blue, legend = "E3,k=1", linestyle = dashdot);
gr43 := plot(ES3(h1), h1 = p .. m, E, color = black, legend = "Sum,k=1", linestyle = dashdot);

kk := 2:
E1gr14 := unapply(evalf(E1(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
E2gr24 := unapply(evalf(E2(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
E3gr34 := unapply(evalf(E3(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
ES4 := unapply(E1gr14(h1)+E2gr24(h1)+E3gr34(h1), h1):
gr14 := plot(E1gr14(h1), h1 = p .. m, E, color = red, legend = "E1,k=2", linestyle = dot);
gr24 := plot(E2gr24(h1), h1 = p .. m, E, color = green, legend = "E2,k=2", linestyle = dot);
gr34 := plot(E3gr34(h1), h1 = p .. m, E, color = blue, legend = "E3,k=2", linestyle = dot);
gr44 := plot(ES4(h1), h1 = p .. m, E, color = black, legend = "Sum,k=2", linestyle = dot);

kk := 5:
E1gr15 := unapply(evalf(E1(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
E2gr25 := unapply(evalf(E2(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
E3gr35 := unapply(evalf(E3(AA, BB, kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2, tt, ttau, v1(kk, rr2,
rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), v2(kk, rr2, rr3, h[1], hh2, hh3, TT1, TT2), xx)), h[1]):
ES5 := unapply(E1gr15(h1)+E2gr25(h1)+E3gr35(h1), h1):
gr15 := plot(E1gr15(h1), h1 = p .. m, E, color = red, legend = "E1,k=5", linestyle = longdash);
gr25 := plot(E2gr25(h1), h1 = p .. m, E, color = green, legend = "E2,k=5", linestyle = longdash);
gr35 := plot(E3gr35(h1), h1 = p .. m, E, color = blue, legend = "E3,k=5", linestyle = longdash);
gr45 := plot(ES5(h1), h1 = p .. m, E, color = black, legend = "Sum,k=5", linestyle = longdash);

display(gr41, gr42, gr43, gr44, gr45);

```


Програма виводу умови розв'язуваності для другого наближення у тришаровій
гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою»

restart:

// підключаємо необхідні бібліотеки лінійної алгебри

with(linalg):

// Задаємо розв'язки першого наближення

A1 := apply(A, x1, x2, t1, t2):

eta11 := unapply(A1*exp(I*(k*x0-omega*t0)), x0, t0, z):

eta21 := unapply(K5*A1*exp(I*(k*x0-omega*t0)), x0, t0, z):

phi11 := unapply(I*K1*cosh(k*(h1+z))*A1*exp(I*(k*x0-omega*t0)), x0, t0, z):

phi21 := unapply((I*K2*cosh(k*(h2-z))+I*K3*cosh(k*z))*A1*exp(I*(k*x0-omega*t0)), x0, t0, z):

phi31 := unapply(I*K4*cosh(k*(z-h2-h3))*A1*exp(I*(k*x0-omega*t0)), x0, t0, z):

// Задаємо розв'язки другого наближення

eta12 := unapply(B0+B1*exp(I*(k*x0-omega*t0))+B2*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)), x0, t0, z):

eta22 := unapply(C0+C1*exp(I*(k*x0-omega*t0))+C2*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)), x0, t0, z):

phi12 := unapply(F11*(z+h1)*sinh(k*(z+h1))*exp(I*(k*x0-

omega*t0))+F10*cosh(k*(z+h1))*exp(I*(k*x0-

omega*t0))+F20*cosh(2*k*(z+h1))*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)), x0, t0, z):

phi22 := unapply((N11*z+N10)*exp(I*(k*x0-omega*t0)+k*(h2-z))+N20*exp((2*I)*(k*x0-

omega*t0)+2*k*(h2-z))+M11*z+M10)*exp(I*(k*x0-omega*t0)-k*(h2-

z))+M20*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)-2*k*(h2-z)), x0, t0, z):

phi32 := unapply(L11*(z-h2-h3)*sinh(k*(z-h2-h3))*exp(I*(k*x0-omega*t0))+L10*cosh(k*(z-

h2-h3))*exp(I*(k*x0-omega*t0))+L20*cosh(2*k*(z-h2-h3))*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)), x0,

t0, z):

// Обчислюємо ліві частини другої лінійної задачі, підставляємо замість знеобхідні параметри

lleft4 := unapply(diff(eta12(x0, t0, z), t0)-(diff(phi12(x0, t0, z), z)), x0, t0, z):

lleft5 := unapply(diff(eta12(x0, t0, z), t0)-(diff(phi22(x0, t0, z), z)), x0, t0, z):

lleft6 := unapply(diff(eta22(x0, t0, z), t0)-(diff(phi22(x0, t0, z), z)), x0, t0, z):

lleft7 := unapply(diff(eta22(x0, t0, z), t0)-(diff(phi32(x0, t0, z), z)), x0, t0, z):

lleft8 := unapply(diff(phi12(x0, t0, z), t0)-rho2*(diff(phi22(x0, t0, z), t0))+(1-rho2)*eta12(x0, t0, z)-T1*(diff(eta12(x0, t0, z), `\$(x0, 2))), x0, t0, z):

lleft9 := unapply(rho2*(diff(phi22(x0, t0, z), t0))-rho3*(diff(phi32(x0, t0, z), t0))+(rho2-rho3)*eta22(x0, t0, z)-T2*(diff(eta22(x0, t0, z), `\$(x0, 2))), x0, t0, z):

left4 := lleft4(x0, t0, 0):

left5 := lleft5(x0, t0, 0):

left6 := lleft6(x0, t0, h2):

left7 := lleft7(x0, t0, h2):

left8 := lleft8(x0, t0, 0):

left9 := lleft9(x0, t0, h2):

// Обчислюємо праві частини другої лінійної задачі, підставляємо замість знеобхідні параметри

```

right4 := unapply(-(diff(eta11(x0, t0, z), t1))-(diff(eta11(x0, t0, z), x0))*(diff(phi11(x0, t0, z), x0))+eta11(x0, t0, z)*(diff(phi11(x0, t0, z), `$(z, 2))), x0, t0, z):
right5 := unapply(-(diff(eta11(x0, t0, z), t1))-(diff(eta11(x0, t0, z), x0))*(diff(phi21(x0, t0, z), x0))+eta11(x0, t0, z)*(diff(phi21(x0, t0, z), `$(z, 2))), x0, t0, z):
right6 := unapply(-(diff(eta21(x0, t0, z), t1))-(diff(eta21(x0, t0, z), x0))*(diff(phi21(x0, t0, z), x0))+eta21(x0, t0, z)*(diff(phi21(x0, t0, z), `$(z, 2))), x0, t0, z):
right7 := unapply(-(diff(eta21(x0, t0, z), t1))-(diff(eta21(x0, t0, z), x0))*(diff(phi31(x0, t0, z), x0))+eta21(x0, t0, z)*(diff(phi31(x0, t0, z), `$(z, 2))), x0, t0, z):
right8 := unapply(-(diff(phi11(x0, t0, z), t1))-eta11(x0, t0, z)*(diff(phi11(x0, t0, z), [t0, z]))+rho2*(diff(phi21(x0, t0, z), t1)+eta11(x0, t0, z)*(diff(phi21(x0, t0, z), [t0, z]))) - 1/2*((diff(phi11(x0, t0, z), x0))^2+(diff(phi11(x0, t0, z), z))^2)+(1/2)*rho2*((diff(phi21(x0, t0, z), x0))^2+(diff(phi21(x0, t0, z), z))^2)+2*T1*(diff(eta11(x0, t0, z), [x0, x1])), x0, t0, z):
right9 := unapply(-rho2*(diff(phi21(x0, t0, z), t1))-rho2*eta21(x0, t0, z)*(diff(phi21(x0, t0, z), [t0, z]))+rho3*(diff(phi31(x0, t0, z), t1)+eta21(x0, t0, z)*(diff(phi31(x0, t0, z), [t0, z]))) - (1/2)*rho2*((diff(phi21(x0, t0, z), x0))^2+(diff(phi21(x0, t0, z), z))^2)+(1/2)*rho3*((diff(phi31(x0, t0, z), x0))^2+(diff(phi31(x0, t0, z), z))^2)+2*T2*(diff(eta21(x0, t0, z), [x0, x1])), x0, t0, z):

```

```

right4 := rright4(x0, t0, 0):
right5 := rright5(x0, t0, 0):
right6 := rright6(x0, t0, h2):
right7 := rright7(x0, t0, h2):
right8 := rright8(x0, t0, 0):
right9 := rright9(x0, t0, h2):

```

// Прирівнюємо праві і ліві частини та залишаємо коефіцієнти біля $\exp(I*(k*x0-\omega*t0))$

```

coeff(left4, exp(I*(k*x0-omega*t0))) = coeff(right4, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
ll4 := -I*B1*omega-F11*sinh(k*h1)-F11*h1*cosh(k*h1)*k-F10*sinh(k*h1)*k:

```

```

coeff(left5, exp(I*(k*x0-omega*t0)))+coeff(left5, exp(I*(k*x0-omega*t0)-k*h2))*exp(-k*h2)+coeff(left5, exp(I*(k*x0-omega*t0)+k*h2))*exp(k*h2) = coeff(right5, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
ll5 := -I*B1*omega-M10*k*exp(-k*h2)+N10*k*exp(k*h2)-M11*exp(-k*h2)-N11*exp(k*h2):

```

```

expand(coeff(left6, exp(I*(k*x0-omega*t0)))) = coeff(right6, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
ll6 := -I*C1*omega-N11+N11*h2*k+N10*k-M11-M11*h2*k-M10*k:
coeff(left7, exp(I*(k*x0-omega*t0))) = coeff(right7, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
ll7 := -I*C1*omega+L11*sinh(k*h3)+L11*h3*cosh(k*h3)*k+L10*sinh(k*h3)*k:

```

```

coeff(left8, exp(I*(k*x0-omega*t0)))+coeff(left8, exp(I*(k*x0-omega*t0)+k*h2))*exp(k*h2)+coeff(left8, exp(I*(k*x0-omega*t0)-k*h2))*exp(-k*h2) = coeff(right8, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
ll8 := -I*F11*h1*sinh(k*h1)*omega-I*F10*cosh(k*h1)*omega+expand((1-rho2)*B1)+T1*B1*k^2+I*rho2*N10*omega*exp(k*h2)+I*rho2*M10*omega*exp(-k*h2):

```

```

expand(coeff(left9, exp(I*(k*x0-omega*t0)))) = coeff(right9, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
ll9 := -I*rho2*omega*N11*h2-I*rho2*N10*omega-I*rho2*omega*M11*h2-I*rho2*M10*omega+I*rho3*L11*h3*sinh(k*h3)*omega+I*rho3*L10*cosh(k*h3)*omega+C1*rho2-C1*rho3+T2*C1*k^2:

```

// Задаємо коефіцієнти розв'язків першого наближення

$$K1 := -\omega/(k*\sinh(k*h1));$$

$$K2 := \omega/(k*\sinh(k*h2));$$

$$K3 := ((1-\rho2)*k+T1*k^3-\omega^2*\coth(k*h1)-\rho2*\omega^2*\coth(k*h2))/(\rho2*\omega*k);$$

$$K4 := -\sinh(k*h2)*((1-\rho2)*k+T1*k^3-\omega^2*\coth(k*h1)-\rho2*\omega^2*\coth(k*h2))/(\rho2*\omega*k*\sinh(k*h3));$$

$$K5 := -\sinh(k*h2)*((1-\rho2)*k+T1*k^3-\omega^2*\coth(k*h1)-\rho2*\omega^2*\coth(k*h2))/(\omega^2*\rho2);$$

//Коефіцієнти перших трьох рівнянь задачі другого наближення

$$F11 := K1*Ax1;$$

$$M11 := (1/2)*Ax1*K2+(1/2)*Ax1*\exp(k*h2)*K3;$$

$$N11 := -(1/2)*Ax1*K2-(1/2)*Ax1*K3/\exp(k*h2);$$

$$L11 := K4*Ax1;$$

// Обчислюємо умову розв'язуваності другого наближення

$$\text{right4} := -At1+(F11*h1*\cosh(k*h1)*k+F11*\sinh(k*h1));$$

$$\text{right5} := -At1+(M11*\exp(-k*h2)+N11*\exp(k*h2));$$

$$\text{right6} := -K5*At1+(M11*h2*k-N11*h2*k+M11+N11);$$

$$\text{right7} := -K5*At1-L11*h3*\cosh(k*h3)*k-L11*\sinh(k*h3);$$

$$\text{right8} := -I*(-K2*At1*\cosh(k*h2)*\rho2+K1*At1*\cosh(k*h1)-K3*At1*\rho2-2*Ax1*T1*k)+I*F11*h1*\sinh(k*h1)*\omega;$$

$$\text{right9} := -I*(K3*At1*\cosh(k*h2)*\rho2-K4*\cosh(k*h3)*At1*\rho3-2*K5*Ax1*T2*k+K2*At1*\rho2)-$$

$$I*\rho3*L11*h3*\sinh(k*h3)*\omega+I*\rho2*\omega*M11*h2+I*\rho2*\omega*N11*h2;$$

// Задаємо матрицю зі стовпцями відносно right, C1, F10, N10, M10, L10

$$M := \text{matrix}(6, 6, [[\text{right4}, \text{coeff}(l14, C1), \text{coeff}(l14, F10), \text{coeff}(l14, N10), \text{coeff}(l14, M10), \text{coeff}(l14, L10)], [\text{right5}, \text{coeff}(l15, C1), \text{coeff}(l15, F10), \text{coeff}(l15, N10), \text{coeff}(l15, M10), \text{coeff}(l15, L10)], [\text{right6}, \text{coeff}(l16, C1), \text{coeff}(l16, F10), \text{coeff}(l16, N10), \text{coeff}(l16, M10), \text{coeff}(l16, L10)], [\text{right7}, \text{coeff}(l17, C1), \text{coeff}(l17, F10), \text{coeff}(l17, N10), \text{coeff}(l17, M10), \text{coeff}(l17, L10)], [\text{right8}, \text{coeff}(l18, C1), \text{coeff}(l18, F10), \text{coeff}(l18, N10), \text{coeff}(l18, M10), \text{coeff}(l18, L10)], [\text{right9}, \text{coeff}(l19, C1), \text{coeff}(l19, F10), \text{coeff}(l19, N10), \text{coeff}(l19, M10), \text{coeff}(l19, L10)]]);$$

// Обчислюємо визначник матриці та шукаємо коефіцієнти при Ax1 та At1

$$Dm := \det(M);$$

$$Kf1 := \text{coeff}(Dm, Ax1);$$

$$Kf2 := \text{coeff}(Dm, At1);$$

// Коефіцієнти дисперсійного рівняння

$$a := \rho2^2/\sinh(k*h2)^2-(\rho2*\coth(k*h2)+\rho3*\coth(k*h3))*(\coth(k*h1)+\rho2*\coth(k*h2));$$

$$b := (\rho2*\coth(k*h2)+\rho3*\coth(k*h3))*(k*(1-\rho2)+T1*k^3)+(k*(\rho2-\rho3)+T2*k^3)*(\coth(k*h1)+\rho2*\coth(k*h2));$$

$$c := -(k*(\rho2-\rho3)+T2*k^3)*(k*(1-\rho2)+T1*k^3);$$

// Формули для обчислення коренів дисперсійного рівняння

$$\omega[a[1]] := \text{unapply}(\text{sqrt}((-b+\text{sqrt}(-4*a*c+b^2))/(2*a)), \rho2, \rho3, T1, T2, k, h1, h2, h3);$$

```

omega[2] := unapply(sqrt((-b-sqrt(-4*a*c+b^2))/(2*a)), rho2, rho3, T1, T2, k, h1, h2, h3):

pw1 := unapply(diff(omega[1](rho2, rho3, T1, T2, k, h1, h2, h3), k), rho2, rho3, T1, T2, k, h1,
h2, h3):
pw2 := unapply(diff(omega[2](rho2, rho3, T1, T2, k, h1, h2, h3), k), rho2, rho3, T1, T2, k, h1,
h2, h3):

// Задаємо значення необхідних параметрів
rr2 := 0.8; rr3 := 0.9; TT1 := 0; TT2 := 0; hh1 := 1; hh2 := 1; hh3 := 1; kk := 0.1;

evalf(pw1(rr2, rr3, TT1, TT2, kk, hh1, hh2, hh3));
evalf(pw2(rr2, rr3, TT1, TT2, kk, hh1, hh2, hh3));

// Перевірка умови розв'язуваності
KKf1 := unapply(Kf1, rho2, rho3, T1, T2, k, h1, h2, h3):
KKf2 := unapply(Kf2, rho2, rho3, T1, T2, k, h1, h2, h3):

Kf1onKf2 := unapply(KKf1(rho2, rho3, T1, T2, k, h1, h2, h3)/KKf2(rho2, rho3, T1, T2, k, h1,
h2, h3), rho2, rho3, T1, T2, k, h1, h2, h3, omega):

evalf(Kf1onKf2(rr2, rr3, TT1, TT2, kk, hh1, hh2, hh3, omega[1](rr2, rr3, TT1, TT2, kk, hh1,
hh2, hh3)));
evalf(Kf1onKf2(rr2, rr3, TT1, TT2, kk, hh1, hh2, hh3, omega[2](rr2, rr3, TT1, TT2, kk, hh1,
hh2, hh3)));

```

Програма символного виводу умови розв'язуваності задачі поширення хвиль у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» у третьому наближенні

restart:

// підключаємо необхідні бібліотеки лінійної алгебри

with(linalg):

// задаємо розв'язки першого наближення

eta11 := A(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))+sA(x1, x2, t1, t2)*exp(-I*(k*x0-omega*t0)):

eta21 := K5*A(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))+K5*sA(x1, x2, t1, t2)*exp(-I*(k*x0-omega*t0)):

phi11 := I*K1*cosh(k*(h1+z))*A(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))-

I*K1*cosh(k*(h1+z))*sA(x1, x2, t1, t2)*exp(-I*(k*x0-omega*t0)):

phi21 := (I*K2*cosh(k*(h2-z))+I*K3*cosh(k*z))*A(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))+(-I*K2*cosh(k*(h2-z))-I*K3*cosh(k*z))*sA(x1, x2, t1, t2)*exp(-I*(k*x0-omega*t0)):

phi31 := I*K4*cosh(k*(z-h2-h3))*A(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))-I*K4*cosh(k*(z-h2-h3))*sA(x1, x2, t1, t2)*exp(-I*(k*x0-omega*t0)):

// задаємо розв'язки другого наближення

eta12 := B0(x1, x2, t1, t2)+B1(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))+B2(x1, x2, t1, t2)*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))+sB0(x1, x2, t1, t2)+sB1(x1, x2, t1, t2)*exp(-I*(k*x0-omega*t0))+sB2(x1, x2, t1, t2)*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0)):

eta22 := C0(x1, x2, t1, t2)+C1(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))+C2(x1, x2, t1, t2)*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))+sC0(x1, x2, t1, t2)+sC1(x1, x2, t1, t2)*exp(-I*(k*x0-omega*t0))+sC2(x1, x2, t1, t2)*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0)):

phi12 := F11(x1, x2, t1, t2)*(h1+z)*sinh(k*(h1+z))*exp(I*(k*x0-omega*t0))+F10(x1, x2, t1, t2)*cosh(k*(h1+z))*exp(I*(k*x0-omega*t0))+F20(x1, x2, t1,

t2)*cosh(2*k*(h1+z))*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))+sF11(x1, x2, t1,

t2)*(h1+z)*sinh(k*(h1+z))*exp(-I*(k*x0-omega*t0))+sF10(x1, x2, t1,

t2)*cosh(k*(h1+z))*exp(-I*(k*x0-omega*t0))+sF20(x1, x2, t1, t2)*cosh(2*k*(h1+z))*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0)):

phi22 := (N10(x1, x2, t1, t2)+N11(x1, x2, t1, t2)*z)*exp(I*(k*x0-omega*t0)+k*(h2-z))+N20(x1, x2, t1, t2)*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)+2*k*(h2-z))+M10(x1, x2, t1, t2)+M11(x1, x2, t1,

t2)*z)*exp(I*(k*x0-omega*t0)-k*(h2-z))+M20(x1, x2, t1, t2)*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)-

2*k*(h2-z))+sN10(x1, x2, t1, t2)+sN11(x1, x2, t1, t2)*z)*exp(-I*(k*x0-omega*t0)+k*(h2-

z))+sN20(x1, x2, t1, t2)*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0)+2*k*(h2-z))+sM10(x1, x2, t1,

t2)+sM11(x1, x2, t1, t2)*z)*exp(-I*(k*x0-omega*t0)-k*(h2-z))+sM20(x1, x2, t1, t2)*exp(-

(2*I)*(k*x0-omega*t0)-2*k*(h2-z));

phi32 := L11(x1, x2, t1, t2)*(z-h2-h3)*sinh(k*(z-h2-h3))*exp(I*(k*x0-omega*t0))+L10(x1, x2,

t1, t2)*cosh(k*(z-h2-h3))*exp(I*(k*x0-omega*t0))+L20(x1, x2, t1, t2)*cosh(2*k*(z-h2-

h3))*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))+sL11(x1, x2, t1, t2)*(z-h2-h3)*sinh(k*(z-h2-h3))*exp(-

I*(k*x0-omega*t0))+sL10(x1, x2, t1, t2)*cosh(k*(z-h2-h3))*exp(-I*(k*x0-

omega*t0))+sL20(x1, x2, t1, t2)*cosh(2*k*(z-h2-h3))*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0)):

// шукаємо кожен доданок правої частини рівняння 4 задачі третього наближення

dodanok1 := unapply(-(diff(eta11, x0))*(diff(phi11, x1)), z):

dodanok2 := unapply(-(diff(eta11, x0))*(diff(phi12, x0)), z):

dodanok3 := unapply(-(diff(eta11, x1))*(diff(phi11, x0)), z):

dodanok4 := unapply(-(diff(eta12, x0))*(diff(phi11, x0)), z):

dodanok5 := unapply(-(diff(eta11, t2)), z):

```

dodanok6 := unapply(-(diff(eta12, t1)), z):
dodanok7 := unapply(eta11*(diff(phi12, `(z, 2))), z):
dodanok8 := unapply(eta12*(diff(phi11, `(z, 2))), z):
dodanok9 := unapply((1/2)*eta11^2*(diff(phi11, `(z, 3))), z):
dodanok10 := unapply(-eta11*(diff(eta11, x0))*(diff(phi11, [x0, z])), z):

```

// Замість зпідставляємо 0.

```

dod1 := simplify(expand(dodanok1(0))): dod2 := simplify(expand(dodanok2(0))):
dod3 := simplify(expand(dodanok3(0))): dod4 := simplify(expand(dodanok4(0))):
dod5 := simplify(expand(dodanok5(0))): dod6 := simplify(expand(dodanok6(0))):
dod7 := simplify(expand(dodanok7(0))): dod8 := simplify(expand(dodanok8(0))):
dod9 := simplify(expand(dodanok9(0))): dod10 := simplify(expand(dodanok10(0))):

```

// Шукаємо коефіцієнти біля $\exp(I(k*x0-\omega*t0))$*

```

dod1exp1 := coeff(dod1, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod2exp1 := coeff(dod2, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod3exp1 := coeff(dod3, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod4exp1 := coeff(dod4, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod5exp1 := coeff(dod5, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod6exp1 := coeff(dod6, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod7exp1 := coeff(dod7, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod8exp1 := coeff(dod8, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod9exp1 := coeff(dod9, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod10exp1 := coeff(dod10, exp(I*(k*x0-omega*t0)));

```

// Доданки перенесені з лівої частини в праву

```

d4 := unapply(-(1/2)*(I*K1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))-2*K1*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2))*k+(2*I)*(diff(F10(x1, x2, t1, t2), x1))*k-I*(diff(F11(x1, x2, t1, t2), x1)))*sinh(k*h1)/k-
(1/2*(I*K1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))-2*K1*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2))*k+(2*I)*(diff(F10(x1, x2, t1, t2), x1))*k-I*(diff(F11(x1, x2, t1, t2), x1))))*h1*cosh(k*h1)-
I*(diff(F11(x1, x2, t1, t2), x1))*h1*cosh(k*h1)-(1/2*I)*(diff(F11(x1, x2, t1, t2),
x1))*h1^2*sinh(k*h1)*k, z);

```

// Сума всіх коефіцієнтів правої частини біля $\exp(I(k*x0-\omega*t0))$*

```

l4exp1 :=
dod1exp1+dod2exp1+dod3exp1+dod4exp1+dod5exp1+dod6exp1+dod7exp1+dod8exp1+dod9e
xp1+dod10exp1+d4(0);

```

// Аналогічні кроки виконуємо для рівнянь 5-9.

```

dodanok51 := unapply(-(diff(eta11, x0))*(diff(phi21, x1)), z):
dodanok52 := unapply(-(diff(eta11, x0))*(diff(phi22, x0)), z):
dodanok53 := unapply(-(diff(eta11, x1))*(diff(phi21, x0)), z):
dodanok54 := unapply(-(diff(eta12, x0))*(diff(phi21, x0)), z):
dodanok55 := unapply(-(diff(eta11, t2)), z):
dodanok56 := unapply(-(diff(eta12, t1)), z):
dodanok57 := unapply(eta11*(diff(phi22, `(z, 2))), z):
dodanok58 := unapply(eta12*(diff(phi21, `(z, 2))), z):
dodanok59 := unapply((1/2)*eta11^2*(diff(phi21, `(z, 3))), z):
dodanok510 := unapply(-eta11*(diff(eta11, x0))*(diff(phi21, [x0, z])), z):

```

```

dod51 := simplify(expand(dodanok51(0))):
dod52 := simplify(expand(dodanok52(0))):

```

dod53 := simplify(expand(dodanok53(0))):
dod54 := simplify(expand(dodanok54(0))):
dod55 := simplify(expand(dodanok55(0))):
dod56 := simplify(expand(dodanok56(0))):
dod57 := simplify(expand(dodanok57(0))):
dod58 := simplify(expand(dodanok58(0))):
dod59 := simplify(expand(dodanok59(0))):
dod510 := simplify(expand(dodanok510(0))):

dod51exp1 := coeff(dod51, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod52exp1 := coeff(dod52, exp(-I*omega*t0+2*k*h2+I*k*x0))*exp(2*k*h2)+coeff(dod52,
exp(-I*omega*t0-2*k*h2+I*k*x0))*exp(-2*k*h2);
dod53exp1 := coeff(dod53, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod54exp1 := coeff(dod54, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod55exp1 := coeff(dod55, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod56exp1 := coeff(dod56, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod57exp1 := coeff(dod57, exp(-I*omega*t0+2*k*h2+I*k*x0))*exp(2*k*h2)+coeff(dod57,
exp(-I*omega*t0-2*k*h2+I*k*x0))*exp(-2*k*h2);
dod58exp1 := coeff(dod58, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod59exp1 := coeff(dod59, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod510exp1 := coeff(dod510, exp(I*(k*x0-omega*t0))):

d5 := unapply((1/4)*(-2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k*K2-2*exp(-k*h2)*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2))*k*K3+I*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K2+I*exp(-k*h2)*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1,
x1))*K3+(4*I)*(diff(N10(x1, x2, t1, t2), x1))*k+(2*I)*(diff(N11(x1, x2, t1, t2),
x1)))*exp(k*h2)/k-(1/4)*(-2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k*K2*exp(-k*h2)-2*(diff(A(x1, x2, t1,
t2), x2))*k*K3+I*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K2*exp(-k*h2)+(4*I)*(diff(M10(x1, x2, t1,
t2), x1))*k*exp(-k*h2)+I*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K3-(2*I)*(diff(M11(x1, x2, t1, t2),
x1))*exp(-k*h2))/k, z);

l5exp1 :=
dod51exp1+dod52exp1+dod53exp1+dod54exp1+dod55exp1+dod56exp1+dod57exp1+dod58exp1+dod59exp1+dod510exp1+d5(0);

dodanok61 := unapply(-(diff(eta21, x0))*(diff(phi21, x1)), z):
dodanok62 := unapply(-(diff(eta21, x0))*(diff(phi22, x0)), z):
dodanok63 := unapply(-(diff(eta21, x1))*(diff(phi21, x0)), z):
dodanok64 := unapply(-(diff(eta22, x0))*(diff(phi21, x0)), z):
dodanok65 := unapply(-(diff(eta21, t2)), z):
dodanok66 := unapply(-(diff(eta22, t1)), z):
dodanok67 := unapply(eta21*(diff(phi22, '\$(z, 2))), z):
dodanok68 := unapply(eta22*(diff(phi21, '\$(z, 2))), z):
dodanok69 := unapply((1/2)*eta21^2*(diff(phi21, '\$(z, 3))), z):
dodanok610 := unapply(-eta21*(diff(eta21, x0))*(diff(phi21, [x0, z])), z):

dod61 := simplify(expand(dodanok61(h2))):
dod62 := simplify(expand(dodanok62(h2))):
dod63 := simplify(expand(dodanok63(h2))):
dod64 := simplify(expand(dodanok64(h2))):
dod65 := simplify(expand(dodanok65(h2))):
dod66 := simplify(expand(dodanok66(h2))):
dod67 := simplify(expand(dodanok67(h2))):

dod68 := simplify(expand(dodanok68(h2))):
dod69 := simplify(expand(dodanok69(h2))):
dod610 := simplify(expand(dodanok610(h2))):

dod61exp1 := coeff(dod61, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod62exp1 := coeff(dod62, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod63exp1 := coeff(dod63, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod64exp1 := coeff(dod64, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod65exp1 := coeff(dod65, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod66exp1 := coeff(dod66, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod67exp1 := coeff(dod67, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod68exp1 := coeff(dod68, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod69exp1 := coeff(dod69, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod610exp1 := coeff(dod610, exp(I*(k*x0-omega*t0)));

d6 := unapply(I*(diff(N11(x1, x2, t1, t2), x1))*h2+(1/4)*(-2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k*K2-
2*exp(-k*h2)*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k*K3+I*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K2+I*exp(-
k*h2)*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K3+(4*I)*(diff(N10(x1, x2, t1, t2),
x1))*k+(2*I)*(diff(N11(x1, x2, t1, t2), x1)))/k-((1/2*I)*(diff(N11(x1, x2, t1, t2),
x1))*h2^2+(1/4)*(-2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k*K2-2*exp(-k*h2)*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2))*k*K3+I*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K2+I*exp(-k*h2)*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1,
x1))*K3+(4*I)*(diff(N10(x1, x2, t1, t2), x1))*k+(2*I)*(diff(N11(x1, x2, t1, t2), x1))*h2/k)*k-
I*(diff(M11(x1, x2, t1, t2), x1))*h2-(1/4)*(-2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k*K2*exp(-k*h2)-
2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k*K3+I*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K2*exp(-
k*h2)+(4*I)*(diff(M10(x1, x2, t1, t2), x1))*k*exp(-k*h2)+I*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K3-
(2*I)*(diff(M11(x1, x2, t1, t2), x1))*exp(-k*h2))/(k*exp(-k*h2))+(-1/2*I)*(diff(M11(x1, x2, t1,
t2), x1))*h2^2-(1/4)*(-2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k*K2*exp(-k*h2)-2*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2))*k*K3+I*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K2*exp(-k*h2)+(4*I)*(diff(M10(x1, x2, t1, t2),
x1))*k*exp(-k*h2)+I*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K3-(2*I)*(diff(M11(x1, x2, t1, t2),
x1))*exp(-k*h2))*h2/(k*exp(-k*h2))*k, z);

l6exp1 :=
dod61exp1+dod62exp1+dod63exp1+dod64exp1+dod65exp1+dod66exp1+dod67exp1+dod68exp1+dod69exp1+dod610exp1+d6(h2);

dodanok71 := unapply(-(diff(eta21, x0))*(diff(phi31, x1)), z):
dodanok72 := unapply(-(diff(eta21, x0))*(diff(phi32, x0)), z):
dodanok73 := unapply(-(diff(eta21, x1))*(diff(phi31, x0)), z):
dodanok74 := unapply(-(diff(eta22, x0))*(diff(phi31, x0)), z):
dodanok75 := unapply(-(diff(eta21, t2)), z):
dodanok76 := unapply(-(diff(eta22, t1)), z):
dodanok77 := unapply(eta21*(diff(phi32, `\$(z, 2))), z):
dodanok78 := unapply(eta22*(diff(phi31, `\$(z, 2))), z):
dodanok79 := unapply((1/2)*eta21^2*(diff(phi31, `\$(z, 3))), z):
dodanok710 := unapply(-eta21*(diff(eta21, x0))*(diff(phi31, [x0, z])), z):

dod71 := simplify(expand(dodanok71(h2))):
dod72 := simplify(expand(dodanok72(h2))):
dod73 := simplify(expand(dodanok73(h2))):
dod74 := simplify(expand(dodanok74(h2))):
dod75 := simplify(expand(dodanok75(h2))):

dod76 := simplify(expand(dodanok76(h2))):
dod77 := simplify(expand(dodanok77(h2))):
dod78 := simplify(expand(dodanok78(h2))):
dod79 := simplify(expand(dodanok79(h2))):
dod710 := simplify(expand(dodanok710(h2))):

dod71exp1 := coeff(dod71, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod72exp1 := coeff(dod72, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod73exp1 := coeff(dod73, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod74exp1 := coeff(dod74, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod75exp1 := coeff(dod75, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod76exp1 := coeff(dod76, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod77exp1 := coeff(dod77, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod78exp1 := coeff(dod78, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod79exp1 := coeff(dod79, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod710exp1 := coeff(dod710, exp(I*(k*x0-omega*t0))):

d7 := unapply((1/2)*(I*K4*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))-2*K4*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k+(2*I)*(diff(L10(x1, x2, t1, t2), x1))*k-I*(diff(L11(x1, x2, t1, t2), x1)))*sinh(k*h3)/k+(1/2*(I*K4*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))-2*K4*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k+(2*I)*(diff(L10(x1, x2, t1, t2), x1))*k-I*(diff(L11(x1, x2, t1, t2), x1))))*h3*cosh(k*h3)+I*(diff(L11(x1, x2, t1, t2), x1))*h3*cosh(k*h3)+(1/2*I)*(diff(L11(x1, x2, t1, t2), x1))*h3^2*sinh(k*h3)*k, z):

l7exp1 :=
dod71exp1+dod72exp1+dod73exp1+dod74exp1+dod75exp1+dod76exp1+dod77exp1+dod78exp1+dod79exp1+dod710exp1+d7(h2);

dodanok81 := unapply(-(diff(phi12, t1)), z):
dodanok82 := unapply(-(diff(phi11, t2)), z):
dodanok83 := unapply(-eta12*(diff(phi11, [t0, z])), z):
dodanok84 := unapply(-eta11*(diff(phi11, [t1, z])), z):
dodanok85 := unapply(-(1/2)*eta11^2*(diff(phi11, [t0, `(z, 2)])), z):
dodanok86 := unapply(rho2*(diff(phi21, t2)), z):
dodanok87 := unapply(rho2*(diff(phi22, t1)), z):
dodanok88 := unapply(rho2*eta12*(diff(phi21, [t0, z])), z):
dodanok89 := unapply(rho2*eta11*(diff(phi21, [t1, z])), z):
dodanok810 := unapply((1/2)*rho2*eta11^2*(diff(phi21, [t0, `(z, 2)])), z):
dodanok811 := unapply(-eta11*(diff(phi12, [t0, z])), z):
dodanok812 := unapply(-(diff(phi11, x0))*(diff(phi11, x1)), z):
dodanok813 := unapply(-(diff(phi11, x0))*(diff(phi12, x0)), z):
dodanok814 := unapply(-eta11*(diff(phi11, x0))*(diff(phi11, [x0, z])), z):
dodanok815 := unapply(-(diff(phi11, z))*(diff(phi12, z)), z):
dodanok816 := unapply(-eta11*(diff(phi11, z))*(diff(phi11, `(z, 2))), z):
dodanok817 := unapply(rho2*eta11*(diff(phi22, [t0, z])), z):
dodanok818 := unapply(rho2*(diff(phi21, x0))*(diff(phi21, x1)), z):
dodanok819 := unapply(rho2*(diff(phi21, x0))*(diff(phi22, x0)), z):
dodanok820 := unapply(rho2*eta11*(diff(phi21, x0))*(diff(phi21, [x0, z])), z):
dodanok821 := unapply(rho2*(diff(phi21, z))*(diff(phi22, z)), z):
dodanok822 := unapply(rho2*eta11*(diff(phi21, z))*(diff(phi21, `(z, 2))), z):
dodanok823 := unapply(2*T1*(diff(eta12, [x0, x1])), z):
dodanok824 := unapply(2*T1*(diff(eta11, [x0, x2])), z):

dodanok825 := unapply(T1*(diff(eta11, `\$(x1, 2))), z):
dodanok826 := unapply(-(3/2)*T1*(diff(eta11, x0))^2*(diff(eta11, `\$(x0, 2))), z):

dod81 := simplify(expand(dodanok81(0))):
dod82 := simplify(expand(dodanok82(0))):
dod83 := simplify(expand(dodanok83(0))):
dod84 := simplify(expand(dodanok84(0))):
dod85 := simplify(expand(dodanok85(0))):
dod86 := simplify(expand(dodanok86(0))):
dod87 := simplify(expand(dodanok87(0))):
dod88 := simplify(expand(dodanok88(0))):
dod89 := simplify(expand(dodanok89(0))):
dod810 := simplify(expand(dodanok810(0))):
dod811 := simplify(expand(dodanok811(0))):
dod812 := simplify(expand(dodanok812(0))):
dod813 := simplify(expand(dodanok813(0))):
dod814 := simplify(expand(dodanok814(0))):
dod815 := simplify(expand(dodanok815(0))):
dod816 := simplify(expand(dodanok816(0))):
dod817 := simplify(expand(dodanok817(0))):
dod818 := simplify(expand(dodanok818(0))):
dod819 := simplify(expand(dodanok819(0))):
dod820 := simplify(expand(dodanok820(0))):
dod821 := simplify(expand(dodanok821(0))):
dod822 := simplify(expand(dodanok822(0))):
dod823 := simplify(expand(dodanok823(0))):
dod824 := simplify(expand(dodanok824(0))):
dod825 := simplify(expand(dodanok825(0))):
dod826 := simplify(expand(dodanok826(0))):

dod81exp1 := coeff(dod81, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod82exp1 := coeff(dod82, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod83exp1 := coeff(dod83, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod84exp1 := coeff(dod84, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod85exp1 := coeff(dod85, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod86exp1 := coeff(dod86, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod87exp1 := coeff(dod87, exp(I*k*x0-I*omega*t0-k*h2))*exp(-k*h2)+coeff(dod87,
exp(I*k*x0-I*omega*t0+k*h2))*exp(k*h2);
dod88exp1 := coeff(dod88, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod89exp1 := coeff(dod89, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod810exp1 := coeff(dod810, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod811exp1 := coeff(dod811, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod812exp1 := coeff(dod812, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod813exp1 := coeff(dod813, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod814exp1 := coeff(dod814, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod815exp1 := coeff(dod815, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod816exp1 := coeff(dod816, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod817exp1 := coeff(dod817, exp(-I*omega*t0+2*k*h2+I*k*x0))*exp(2*k*h2)+coeff(dod817,
exp(-I*omega*t0-2*k*h2+I*k*x0))*exp(-2*k*h2);
dod818exp1 := coeff(dod818, exp(I*(k*x0-omega*t0))):
dod819exp1 := coeff(dod819, exp(-I*omega*t0+2*k*h2+I*k*x0))*exp(2*k*h2)+coeff(dod819,
exp(-I*omega*t0-2*k*h2+I*k*x0))*exp(-2*k*h2);

dod820exp1 := coeff(dod820, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod821exp1 := coeff(dod821, exp(-I*omega*t0+2*k*h2+I*k*x0))*exp(2*k*h2)+coeff(dod821,
exp(-I*omega*t0-2*k*h2+I*k*x0))*exp(-2*k*h2);
dod822exp1 := coeff(dod822, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod823exp1 := coeff(dod823, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod824exp1 := coeff(dod824, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod825exp1 := coeff(dod825, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod826exp1 := coeff(dod826, exp(I*(k*x0-omega*t0)));

d8 := unapply(-(1/2*I)*(I*K1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))-2*K1*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2))*k+(2*I)*(diff(F10(x1, x2, t1, t2), x1))*k-I*(diff(F11(x1, x2, t1, t2),
x1)))*h1*sinh(k*h1)*omega/k+(1/2)*(diff(F11(x1, x2, t1, t2), x1))*h1^2*cosh(k*h1)*omega,
z);

l8exp1 :=
dod814exp1+dod818exp1+dod815exp1+dod826exp1+dod820exp1+dod810exp1+dod88exp1+d
od86exp1+dod822exp1+dod825exp1+dod813exp1+dod823exp1+dod812exp1+dod819exp1+do
d811exp1+dod817exp1+dod85exp1+dod816exp1+dod824exp1+dod83exp1+dod84exp1+dod89
exp1+dod87exp1+dod81exp1+dod82exp1+dod821exp1+d8(0);

dodanok91 := unapply(-rho2*(diff(phi22, t1)), z):
dodanok92 := unapply(-rho2*(diff(phi21, t2)), z):
dodanok93 := unapply(-rho2*eta22*(diff(phi21, [t0, z])), z):
dodanok94 := unapply(-rho2*eta21*(diff(phi21, [t1, z])), z):
dodanok95 := unapply(-(1/2)*rho2*eta21^2*(diff(phi21, [t0, `\$` (z, 2)])), z):
dodanok96 := unapply(rho3*(diff(phi31, t2)), z):
dodanok97 := unapply(rho3*(diff(phi32, t1)), z):
dodanok98 := unapply(rho3*eta22*(diff(phi31, [t0, z])), z):
dodanok99 := unapply(rho3*eta21*(diff(phi31, [t1, z])), z):
dodanok910 := unapply((1/2)*rho3*eta21^2*(diff(phi31, [t0, `\$` (z, 2)])), z):
dodanok911 := unapply(-rho2*eta21*(diff(phi22, [t0, z])), z):
dodanok912 := unapply(-rho2*(diff(phi21, x0))*(diff(phi21, x1)), z):
dodanok913 := unapply(-rho2*(diff(phi21, x0))*(diff(phi22, x0)), z):
dodanok914 := unapply(-rho2*eta21*(diff(phi21, x0))*(diff(phi21, [x0, z])), z):
dodanok915 := unapply(-rho2*(diff(phi21, z))*(diff(phi22, z)), z):
dodanok916 := unapply(-rho2*eta21*(diff(phi21, z))*(diff(phi21, `\$` (z, 2))), z):
dodanok917 := unapply(rho3*eta21*(diff(phi32, [t0, z])), z):
dodanok918 := unapply(rho3*(diff(phi31, x0))*(diff(phi31, x1)), z):
dodanok919 := unapply(rho3*(diff(phi31, x0))*(diff(phi32, x0)), z):
dodanok920 := unapply(rho3*eta21*(diff(phi31, x0))*(diff(phi31, [x0, z])), z):
dodanok921 := unapply(rho3*(diff(phi31, z))*(diff(phi32, z)), z):
dodanok922 := unapply(rho3*eta21*(diff(phi31, z))*(diff(phi31, `\$` (z, 2))), z):
dodanok923 := unapply(2*T2*(diff(eta22, [x0, x1])), z):
dodanok924 := unapply(2*T2*(diff(eta21, [x0, x2])), z):
dodanok925 := unapply(T2*(diff(eta21, `\$` (x1, 2))), z):
dodanok926 := unapply(-(3/2)*T2*(diff(eta21, x0))^2*(diff(eta21, `\$` (x0, 2))), z):

dod91 := simplify(expand(dodanok91(h2))):
dod92 := simplify(expand(dodanok92(h2))):
dod93 := simplify(expand(dodanok93(h2))):
dod94 := simplify(expand(dodanok94(h2))):
dod95 := simplify(expand(dodanok95(h2))):

dod96 := simplify(expand(dodanok96(h2)));
dod97 := simplify(expand(dodanok97(h2)));
dod98 := simplify(expand(dodanok98(h2)));
dod99 := simplify(expand(dodanok99(h2)));
dod910 := simplify(expand(dodanok910(h2)));
dod911 := simplify(expand(dodanok911(h2)));
dod912 := simplify(expand(dodanok912(h2)));
dod913 := simplify(expand(dodanok913(h2)));
dod914 := simplify(expand(dodanok914(h2)));
dod915 := simplify(expand(dodanok915(h2)));
dod916 := simplify(expand(dodanok916(h2)));
dod917 := simplify(expand(dodanok917(h2)));
dod918 := simplify(expand(dodanok918(h2)));
dod919 := simplify(expand(dodanok919(h2)));
dod920 := simplify(expand(dodanok920(h2)));
dod921 := simplify(expand(dodanok921(h2)));
dod922 := simplify(expand(dodanok922(h2)));
dod923 := simplify(expand(dodanok923(h2)));
dod924 := simplify(expand(dodanok924(h2)));
dod925 := simplify(expand(dodanok925(h2)));
dod926 := simplify(expand(dodanok926(h2)));

dod91exp1 := coeff(dod91, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod92exp1 := coeff(dod92, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod93exp1 := coeff(dod93, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod94exp1 := coeff(dod94, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod95exp1 := coeff(dod95, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod96exp1 := coeff(dod96, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod97exp1 := coeff(dod97, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod98exp1 := coeff(dod98, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod99exp1 := coeff(dod99, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod910exp1 := coeff(dod910, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod911exp1 := coeff(dod911, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod912exp1 := coeff(dod912, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod913exp1 := coeff(dod913, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod914exp1 := coeff(dod914, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod915exp1 := coeff(dod915, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod916exp1 := coeff(dod916, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod917exp1 := coeff(dod917, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod918exp1 := coeff(dod918, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod919exp1 := coeff(dod919, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod920exp1 := coeff(dod920, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod921exp1 := coeff(dod921, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod922exp1 := coeff(dod922, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod923exp1 := coeff(dod923, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod924exp1 := coeff(dod924, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod925exp1 := coeff(dod925, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
dod926exp1 := coeff(dod926, exp(I*(k*x0-omega*t0)));

d9 := unapply(-rho2*(-I*((1/2*I)*(diff(N11(x1, x2, t1, t2), x1))*h2^2+(1/4)*(-2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k*K2-2*exp(-k*h2)*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))*k*K3+I*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K2+I*exp(-k*h2)*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))*K3+(4*I)*(diff(N10(x1, x2, t1, t2),

$x1)) * k + (2 * I) * (\text{diff}(N11(x1, x2, t1, t2), x1))) * h2 / k * \omega - I * (-1/2 * I) * (\text{diff}(M11(x1, x2, t1, t2), x1)) * h2^2 - (1/4) * (-2 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x2)) * k * K2 * \exp(-k * h2) - 2 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x2)) * k * K3 + I * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1)) * K2 * \exp(-k * h2) + (4 * I) * (\text{diff}(M10(x1, x2, t1, t2), x1)) * k * \exp(-k * h2) + I * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1)) * K3 - (2 * I) * (\text{diff}(M11(x1, x2, t1, t2), x1)) * \exp(-k * h2)) * h2 / (k * \exp(-k * h2))) * \omega) + \rho_3 * ((1/2 * I) * (I * K4 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1)) - 2 * K4 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x2)) * k + (2 * I) * (\text{diff}(L10(x1, x2, t1, t2), x1)) * k - I * (\text{diff}(L11(x1, x2, t1, t2), x1))) * h3 * \sinh(k * h3) * \omega) / k - (1/2) * (\text{diff}(L11(x1, x2, t1, t2), x1)) * h3^2 * \cosh(k * h3) * \omega), z);$

I9exp1 :=

dod923exp1+dod926exp1+dod918exp1+dod914exp1+dod913exp1+dod94exp1+dod925exp1+dod919exp1+d9(h2)+dod91exp1+dod920exp1+dod924exp1+dod93exp1+dod92exp1+dod910exp1+dod911exp1+dod912exp1+dod99exp1+dod98exp1+dod97exp1+dod915exp1+dod916exp1+dod917exp1+dod96exp1+dod95exp1+dod921exp1+dod922exp1;

// Задаємо коефіцієнти дисперсійного рівняння

a := $\rho_2^2 / \sinh(k * h2)^2 - (\rho_2 * \coth(k * h2) + \rho_3 * \coth(k * h3)) * (\coth(k * h1) + \rho_2 * \coth(k * h2));$
 b := $(\rho_2 * \coth(k * h2) + \rho_3 * \coth(k * h3)) * (k * (1 - \rho_2) + T1 * k^3) + (k * (\rho_2 - \rho_3) + T2 * k^3) * (\coth(k * h1) + \rho_2 * \coth(k * h2));$
 c := $-(k * (\rho_2 - \rho_3) + T2 * k^3) * (k * (1 - \rho_2) + T1 * k^3);$

// Задаємо перший корінь дисперсійного рівняння

omega := $\sqrt{(-b + \sqrt{-4 * a * c + b^2}) / (2 * a)};$

// Шукаємо першу та другу похідну кореня по змінній k

pw := $\text{diff}(\omega, k);$ pww := $\text{diff}(\text{diff}(\omega, k), k);$

// Коефіцієнти розв'язків першого наближення

B1 := 0; sB1 := 0;

K1 := $-\omega / (k * \sinh(k * h1));$

K2 := $\omega / (k * \sinh(k * h2));$

K3 := $(k * (1 - \rho_2) + T1 * k^3 - \omega^2 * \coth(k * h1) - \rho_2 * \omega^2 * \coth(k * h2)) / (\rho_2 * \omega * k);$

K4 := $-\sinh(k * h2) * (k * (1 - \rho_2) + T1 * k^3 - \omega^2 * \coth(k * h1) - \rho_2 * \omega^2 * \coth(k * h2)) / (\rho_2 * \omega * k * \sinh(k * h3));$

K5 := $-\sinh(k * h2) * (k * (1 - \rho_2) + T1 * k^3 - \omega^2 * \coth(k * h1) - \rho_2 * \omega^2 * \coth(k * h2)) / (\omega^2 * \rho_2);$

// Коефіцієнти розв'язків другого наближення

F11 := $\text{unapply}(K1 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x1)), x1, x2, t1, t2);$

L11 := $\text{unapply}(K4 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x1)), x1, x2, t1, t2);$

N11 := $\text{unapply}(-1/2 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x1)) * K2 - 1/2 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x1)) * K3 / \exp(k * h2), x1, x2, t1, t2);$

M11 := $\text{unapply}(1/2 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x1)) * K2 + 1/2 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x1)) * \exp(k * h2) * K3, x1, x2, t1, t2);$

F10 := $\text{unapply}(-(F11(x1, x2, t1, t2) * h1 * \cosh(k * h1) * k + F11(x1, x2, t1, t2) * \sinh(k * h1) - (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), t1))) / (\sinh(k * h1) * k), x1, x2, t1, t2);$

M10 := $\text{unapply}(1/2 * (F11(x1, x2, t1, t2) * \sinh(k * h1) * h1 * k * \omega + K2 * \cosh(k * h2) * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), t1)) * k * \rho_2 + F10(x1, x2, t1, t2) * \cosh(k * h1) * k * \omega - K1 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), t1)) * \cosh(k * h1) * k + K3 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), t1)) * k * \rho_2 - M11(x1, x2, t1, t2) * \exp(-k * h2) * \omega * \rho_2 - N11(x1, x2, t1, t2) * \exp(k * h2) * \omega), x1, x2, t1, t2);$

$t2) * \exp(k * h2) * \omega * \rho2 + 2 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x1)) * T1 * k^2 + (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), t1)) * \omega * \rho2) / (\exp(-k * h2) * \omega * \rho2 * k), x1, x2, t1, t2);$
 $N10 := \text{unapply}((1/2) * (F11(x1, x2, t1, t2) * \sinh(k * h1) * h1 * k * \omega + K2 * \cosh(k * h2) * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), t1)) * k * \rho2 + F10(x1, x2, t1, t2) * \cosh(k * h1) * k * \omega - K1 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), t1)) * \cosh(k * h1) * k + K3 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), t1)) * k * \rho2 + M11(x1, x2, t1, t2) * \exp(-k * h2) * \omega * \rho2 + N11(x1, x2, t1, t2) * \exp(k * h2) * \omega * \rho2 + 2 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), x1)) * T1 * k^2 - (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), t1)) * \omega * \rho2) / (\exp(k * h2) * \omega * \rho2 * k), x1, x2, t1, t2);$
 $C1 := \text{unapply}(-I * (-M11(x1, x2, t1, t2) * h2 * k + N11(x1, x2, t1, t2) * h2 * k - M10(x1, x2, t1, t2) * k + N10(x1, x2, t1, t2) * k - M11(x1, x2, t1, t2) - N11(x1, x2, t1, t2) + K5 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), t1))) / \omega, x1, x2, t1, t2);$
 $L10 := \text{unapply}((-L11(x1, x2, t1, t2) * h3 * \cosh(k * h3) * k + I * C1(x1, x2, t1, t2) * \omega - K5 * (\text{diff}(A(x1, x2, t1, t2), t1)) - L11(x1, x2, t1, t2) * \sinh(k * h3)) / (\sinh(k * h3) * k), x1, x2, t1, t2);$

$N20 := \text{unapply}(-(((-(4 * I) * K1 * k * \rho2 * \omega^4 + I * k * (8 * K1 * T2 * k^3 + 2 * K1 * k * \rho2 - 2 * K1 * k * \rho3) * \omega^2) * \sinh(2 * k * h3) - (4 * I) * k * K1 * \cosh(2 * k * h3) * \rho3 * \omega^4) * \sinh(2 * k * h1) * \sinh(k * h1) + (((-(4 * I) * K3 * K5 * \exp(-2 * k * h2) * k * \rho2^2 - (4 * I) * K2 * k * \rho2^2) * \omega^4 + (I * k * (-8 * K3 * K5 * T1 * k^3 * \rho2 + 2 * K3 * K5 * k * \rho2^2 - 2 * K3 * K5 * k * \rho2) * \exp(-2 * k * h2) + I * k * (8 * K2 * T2 * k^3 * \rho2 + 2 * K2 * k * \rho2^2 - 2 * K2 * k * \rho2 * \rho3)) * \omega^2) * \sinh(2 * k * h3) - (4 * I) * k * K2 * \cosh(2 * k * h3) * \rho2 * \rho3 * \omega^4) * \sinh(2 * k * h1) + I * k * (8 * K3 * K5 * \cosh(k * h1)^2 * \rho2 - 4 * K3 * K5 * \rho2) * \exp(-2 * k * h2) * \omega^4 * \sinh(2 * k * h3)) * \sinh(k * h2) + (((-(4 * I) * K2 * K3 * \exp(-2 * k * h2) * k^2 * \rho2^2 + (4 * I) * K2 * K3 * k^2 * \rho2^2) * \omega^3 + ((4 * I) * k^2 * K3 * K5 * \rho2 * (4 * T2 * k^2 + \rho2 - \rho3) * \exp(-2 * k * h2) + I * k * (16 * K2 * T1 * k^3 * \rho2 - 4 * K2 * k * \rho2^2 + 4 * K2 * k * \rho2)) * \omega^2 + (I * k * (-8 * K2 * K3 * T1 * k^4 * \rho2 + 2 * K2 * K3 * k^2 * \rho2^2 - 2 * K2 * K3 * k^2 * \rho2) * \exp(-2 * k * h2) + I * k * (-8 * K2 * K3 * T2 * k^4 * \rho2 - 2 * K2 * K3 * k^2 * \rho2^2 + 2 * K2 * K3 * k^2 * \rho2 * \rho3)) * \omega + (2 * I) * k^3 * K3 * K5 * (4 * T2 * k^2 + \rho2 - \rho3) * (4 * T1 * k^2 - \rho2 + 1) * \exp(-2 * k * h2) - (2 * I) * k^3 * K2 * (4 * T2 * k^2 + \rho2 - \rho3) * (4 * T1 * k^2 - \rho2 + 1)) * \cosh(k * h2) - (4 * I) * k * K4 * K5 * \sinh(k * h3) * \rho2 * \rho3 * \exp(-2 * k * h2) * \omega^4 + (I * k * (-2 * K2^2 * k * \rho2^2 - 2 * K3^2 * k * \rho2^2 + 2 * K4^2 * k * \rho2 * \rho3) * \exp(-2 * k * h2) + I * k * (2 * K2^2 * k * \rho2^2 + 2 * K3^2 * k * \rho2^2 - 2 * K1^2 * k * \rho2)) * \omega^3 + ((2 * I) * k^2 * K5 * (-4 * K4 * \sinh(k * h3) * T1 * k^2 * \rho3 + 8 * K2 * T2 * k^2 * \rho2 + K4 * \sinh(k * h3) * \rho2 * \rho3 + 2 * K2 * \rho2^2 - 2 * K2 * \rho2 * \rho3 - K4 * \sinh(k * h3) * \rho3) * \exp(-2 * k * h2) + I * k * (16 * K3 * T1 * k^3 * \rho2 - 4 * K3 * k * \rho2^2 + 4 * K3 * k * \rho2)) * \omega^2 + (-I * k^3 * (K2^2 * \rho2 + K3^2 * \rho2 - K4^2 * \rho3) * (4 * T1 * k^2 - \rho2 + 1) * \exp(-2 * k * h2) + I * k^3 * (-K2^2 * \rho2 - K3^2 * \rho2 + K1^2) * (4 * T2 * k^2 + \rho2 - \rho3)) * \omega + (2 * I) * k^3 * K2 * K5 * (4 * T2 * k^2 + \rho2 - \rho3) * (4 * T1 * k^2 - \rho2 + 1) * \exp(-2 * k * h2) - (2 * I) * k^3 * K3 * (4 * T2 * k^2 + \rho2 - \rho3) * (4 * T1 * k^2 - \rho2 + 1)) * \sinh(2 * k * h3) + (- (8 * I) * k * K3 * K5 * \cosh(2 * k * h3) * \rho2 * \rho3 * \exp(-2 * k * h2) * \omega^4 + (4 * I) * k^2 * K2 * K3 * \cosh(2 * k * h3) * \rho2 * \rho3 * \omega^3 + (- (4 * I) * k^2 * K3 * K5 * \cosh(2 * k * h3) * \rho3 * (4 * T1 * k^2 - \rho2 + 1) * \exp(-2 * k * h2) + (4 * I) * k^2 * K2 * \cosh(2 * k * h3) * \rho3 * (4 * T1 * k^2 - \rho2 + 1)) * \omega^2) * \cosh(k * h2) - (8 * I) * k * K5 * \cosh(2 * k * h3) * \rho2 * \rho3 * (-K4 * \cosh(k * h3) + K2) * \exp(-2 * k * h2) * \omega^4 + I * k * (2 * K2^2 * \cosh(2 * k * h3) * k * \rho2 * \rho3 + 2 * K3^2 * \cosh(2 * k * h3) * k * \rho2 * \rho3 - 2 * K1^2 * \cosh(2 * k * h3) * k * \rho3) * \omega^3 + (- (4 * I) * k^2 * K5 * \cosh(2 * k * h3) * \rho3 * (4 * T1 * k^2 - \rho2 + 1) * (-K4 * \cosh(k * h3) + K2) * \exp(-2 * k * h2) + I * k * (16 * K3 * \cosh(2 * k * h3) * T1 * k^3 * \rho3 - 4 * K3 * \cosh(2 * k * h3) * k * \rho2 * \rho3 + 4 * K3 * \cosh(2 * k * h3) * k * \rho3)) * \omega^2) * \sinh(2 * k * h1) + (I * k * (-$

$$\begin{aligned}
& 16*K2*cosh(k*h1)^2*rho2+8*K2*rho2)*omega^4+I*k*(8*K2*K3*cosh(k*h1)^2*k*rho2- \\
& 4*K2*K3*k*rho2)*exp(-2*k*h2)*omega^3+(-(4*I)*k^2*K3*K5*(2*cosh(k*h1)^2- \\
& 1)*(4*T2*k^2+rho2-rho3)*exp(-2*k*h2)+(4*I)*k^2*K2*(2*cosh(k*h1)^2-1)*(4*T2*k^2+rho2- \\
& rho3))*omega^2)*cosh(k*h2)+(I*k*(8*K4*K5*cosh(k*h1)^2*sinh(k*h3)*rho3- \\
& 4*K4*K5*sinh(k*h3)*rho3)*exp(-2*k*h2)+(8*I)*k*rho2*(2*cosh(k*h1)^2- \\
& 1)*(K1*cosh(k*h1)-K3))*omega^4+(2*I)*k^2*(2*cosh(k*h1)^2-1)*(K2^2*rho2+K3^2*rho2- \\
& K4^2*rho3)*exp(-2*k*h2)*omega^3+(-(4*I)*k^2*K2*K5*(2*cosh(k*h1)^2- \\
& 1)*(4*T2*k^2+rho2-rho3)*exp(-2*k*h2)-(4*I)*k^2*(2*cosh(k*h1)^2-1)*(4*T2*k^2+rho2- \\
& rho3)*(K1*cosh(k*h1)- \\
& K3))*omega^2)*sinh(2*k*h3)+(I*k*(16*K3*K5*cosh(2*k*h3)*cosh(k*h1)^2*rho3- \\
& 8*K3*K5*cosh(2*k*h3)*rho3)*exp(-2*k*h2)+I*k*(- \\
& 16*K2*cosh(2*k*h3)*cosh(k*h1)^2*rho3+8*K2*cosh(2*k*h3)*rho3))*omega^4*cosh(k*h2)+(\\
& (8*I)*k*K5*cosh(2*k*h3)*rho3*(2*cosh(k*h1)^2-1)*(-K4*cosh(k*h3)+K2)*exp(- \\
& 2*k*h2)+(8*I)*k*cosh(2*k*h3)*rho3*(2*cosh(k*h1)^2-1)*(K1*cosh(k*h1)- \\
& K3))*omega^4)*A(x1, x2, t1, t2)^2/(((-(2*(4*T2*k^3+2*omega^2*rho2+k*rho2- \\
& k*rho3))*(4*T1*k^3+2*omega^2*rho2- \\
& k*rho2+k)*sinh(2*k*h1)+32*cosh(k*h1)^2*T2*k^3*omega^2+16*cosh(k*h1)^2*omega^4*rho \\
& 2+8*cosh(k*h1)^2*k*omega^2*rho2-8*cosh(k*h1)^2*k*omega^2*rho3-16*T2*k^3*omega^2- \\
& 8*omega^4*rho2- \\
& 4*k*omega^2*rho2+4*k*omega^2*rho3)*sinh(2*k*h3)+((16*T1*k^3*omega^2*rho3+8*omeg \\
& a^4*rho2*rho3-4*k*omega^2*rho2*rho3+4*k*omega^2*rho3)*sinh(2*k*h1)- \\
& 16*omega^4*rho3*cosh(k*h1)^2+8*omega^4*rho3)*cosh(2*k*h3))*exp(- \\
& 2*k*h2)+(((32*T1*T2*k^6-16*T1*k^3*omega^2*rho2- \\
& 16*T2*k^3*omega^2*rho2+8*T1*k^4*rho2-8*T1*k^4*rho3- \\
& 8*T2*k^4*rho2+8*omega^4*rho2^2+8*T2*k^4+4*k*omega^2*rho2*rho3- \\
& 2*k^2*rho2^2+2*k^2*rho2*rho3-4*k*omega^2*rho2+2*k^2*rho2-2*k^2*rho3)*sinh(2*k*h1)- \\
& 32*cosh(k*h1)^2*T2*k^3*omega^2+16*cosh(k*h1)^2*omega^4*rho2- \\
& 8*cosh(k*h1)^2*k*omega^2*rho2+8*cosh(k*h1)^2*k*omega^2*rho3+16*T2*k^3*omega^2- \\
& 8*omega^4*rho2+4*k*omega^2*rho2-4*k*omega^2*rho3)*sinh(2*k*h3)+((- \\
& 16*T1*k^3*omega^2*rho3+8*omega^4*rho2*rho3+4*k*omega^2*rho2*rho3- \\
& 4*k*omega^2*rho3)*sinh(2*k*h1)+16*omega^4*rho3*cosh(k*h1)^2- \\
& 8*omega^4*rho3)*cosh(2*k*h3))*exp(2*k*h2)), x1, x2, t1, t2):
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M20 := & unapply(-((1/2*I)*(-2*K2*K3*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, \\
& t2)^2*cosh(k*h2)*k^2*omega*rho2+(4*I)*N20(x1, x2, t1, \\
& t2)*exp(2*k*h2)*omega^2*rho2*sinh(2*k*h1)-8*K2*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, \\
& t2)^2*cosh(k*h2)*T1*k^4+8*K2*cosh(k*h1)^2*A(x1, x2, t1, \\
& t2)^2*cosh(k*h2)*k*omega^2+2*K2*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, t2)^2*cosh(k*h2)*k^2*rho2- \\
& K2^2*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, t2)^2*k^2*omega*rho2-K3^2*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, \\
& t2)^2*k^2*omega*rho2+2*K1*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, t2)^2*sinh(k*h1)*k*omega^2- \\
& (8*I)*N20(x1, x2, t1, t2)*exp(2*k*h2)*sinh(2*k*h1)*T1*k^3-(4*I)*N20(x1, x2, t1, \\
& t2)*exp(2*k*h2)*omega^2-2*K3*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, t2)^2*k^2-4*K3*A(x1, x2, t1, \\
& t2)^2*k*omega^2+(8*I)*N20(x1, x2, t1, t2)*exp(2*k*h2)*cosh(k*h1)^2*omega^2- \\
& 8*K1*cosh(k*h1)^3*A(x1, x2, t1, t2)^2*k*omega^2-8*K3*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, \\
& t2)^2*T1*k^4+8*K3*cosh(k*h1)^2*A(x1, x2, t1, t2)^2*k*omega^2+4*K1*cosh(k*h1)*A(x1, \\
& x2, t1, t2)^2*k*omega^2-2*K2*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, t2)^2*cosh(k*h2)*k^2-4*K2*A(x1, \\
& x2, t1, t2)^2*cosh(k*h2)*k*omega^2+2*K3*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, \\
& t2)^2*k^2*rho2+K1^2*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, t2)^2*k^2*omega-(2*I)*N20(x1, x2, t1, \\
& t2)*exp(2*k*h2)*sinh(2*k*h1)*k+(2*I)*N20(x1, x2, t1, \\
& t2)*exp(2*k*h2)*sinh(2*k*h1)*k*rho2+2*K2*sinh(2*k*h1)*A(x1, x2, t1, \\
& t2)^2*sinh(k*h2)*k*omega^2*rho2)/(exp(-2*k*h2)*(- \\
& 4*T1*k^3*sinh(2*k*h1)+4*omega^2*cosh(k*h1)^2-
\end{aligned}$$

$2*\omega^2*\rho^2*\sinh(2*k*h1)+k*\rho^2*\sinh(2*k*h1)-k*\sinh(2*k*h1)-2*\omega^2))$, $x1, x2, t1, t2$);

$F20 := unapply(- (I*K1*A(x1, x2, t1, t2)^2*cosh(k*h1)*k-I*K2*A(x1, x2, t1, t2)^2*cosh(k*h2)*k-I*K3*A(x1, x2, t1, t2)^2*k-M20(x1, x2, t1, t2)*exp(-2*k*h2)+N20(x1, x2, t1, t2)*exp(2*k*h2))/sinh(2*k*h1), x1, x2, t1, t2)$:

$L20 := unapply(- (I*K3*K5*A(x1, x2, t1, t2)^2*cosh(k*h2)*k-I*K4*K5*cosh(k*h3)*A(x1, x2, t1, t2)^2*k+I*K2*K5*A(x1, x2, t1, t2)^2*k+M20(x1, x2, t1, t2)-N20(x1, x2, t1, t2))/sinh(2*k*h3), x1, x2, t1, t2)$:

$C2 := unapply(I*k*(I*K4*K5*cosh(k*h3)*A(x1, x2, t1, t2)^2*k-L20(x1, x2, t1, t2)*sinh(2*k*h3))/\omega, x1, x2, t1, t2)$:

$B2 := unapply(I*k*(I*K1*A(x1, x2, t1, t2)^2*cosh(k*h1)*k+F20(x1, x2, t1, t2)*sinh(2*k*h1))/\omega, x1, x2, t1, t2)$:

$B0 := unapply((\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K2^2*cosh(k*h2)^2*sA(x1, x2, t1, t2)+\rho^2*K2^2*sinh(k*h2)^2*k^2*A(x1, x2, t1, t2)*sA(x1, x2, t1, t2)-2*\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*K2*sinh(k*h2)*k*sA(x1, x2, t1, t2)*\omega-K1^2*cosh(k*h1)^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*sA(x1, x2, t1, t2)+2*\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K2*cosh(k*h2)*sA(x1, x2, t1, t2)*K3+\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K3^2*sA(x1, x2, t1, t2)-K1^2*sinh(k*h1)^2*k^2*A(x1, x2, t1, t2)*sA(x1, x2, t1, t2)-2*A(x1, x2, t1, t2)*K1*sinh(k*h1)*k*sA(x1, x2, t1, t2)*\omega)/(2*(1-\rho^2)), x1, x2, t1, t2)$:

$C0 := unapply((- \rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K2^2*sA(x1, x2, t1, t2)+\rho^3*K4^2*cosh(k*h3)^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*sA(x1, x2, t1, t2)+\rho^3*K4^2*sinh(k*h3)^2*k^2*A(x1, x2, t1, t2)*sA(x1, x2, t1, t2)-\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K3^2*cosh(k*h2)^2*sA(x1, x2, t1, t2)-\rho^2*K3^2*sinh(k*h2)^2*k^2*A(x1, x2, t1, t2)*sA(x1, x2, t1, t2)-2*\rho^2*K5*A(x1, x2, t1, t2)*K3*sinh(k*h2)*k*sA(x1, x2, t1, t2)*\omega-2*\rho^3*K5*A(x1, x2, t1, t2)*K4*sinh(k*h3)*k*sA(x1, x2, t1, t2)*\omega-2*\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K2*cosh(k*h2)*sA(x1, x2, t1, t2)*K3)/(2*\rho^2-2*\rho^3), x1, x2, t1, t2)$:

$sB0 := unapply((\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K2^2*cosh(k*h2)^2*sA(x1, x2, t1, t2)+\rho^2*K2^2*sinh(k*h2)^2*k^2*A(x1, x2, t1, t2)*sA(x1, x2, t1, t2)-2*\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*K2*sinh(k*h2)*k*sA(x1, x2, t1, t2)*\omega-K1^2*cosh(k*h1)^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*sA(x1, x2, t1, t2)+2*\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K2*cosh(k*h2)*sA(x1, x2, t1, t2)*K3+\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K3^2*sA(x1, x2, t1, t2)-K1^2*sinh(k*h1)^2*k^2*A(x1, x2, t1, t2)*sA(x1, x2, t1, t2)-2*A(x1, x2, t1, t2)*K1*sinh(k*h1)*k*sA(x1, x2, t1, t2)*\omega)/(2*(1-\rho^2)), x1, x2, t1, t2)$:

$sC0 := unapply((- \rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K2^2*sA(x1, x2, t1, t2)+\rho^3*K4^2*cosh(k*h3)^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*sA(x1, x2, t1, t2)+\rho^3*K4^2*sinh(k*h3)^2*k^2*A(x1, x2, t1, t2)*sA(x1, x2, t1, t2)-\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K3^2*cosh(k*h2)^2*sA(x1, x2, t1, t2)-\rho^2*K3^2*sinh(k*h2)^2*k^2*A(x1, x2, t1, t2)*sA(x1, x2, t1, t2)-2*\rho^2*K5*A(x1, x2, t1, t2)*K3*sinh(k*h2)*k*sA(x1, x2, t1, t2)*\omega-2*\rho^3*K5*A(x1, x2, t1, t2)*K4*sinh(k*h3)*k*sA(x1, x2, t1, t2)*\omega-2*\rho^2*A(x1, x2, t1, t2)*k^2*K2*cosh(k*h2)*sA(x1, x2, t1, t2)*K3)/(2*\rho^2-2*\rho^3), x1, x2, t1, t2)$:

$\rho^2 := 0.9; \rho^3 := 0.8; T1 := 0; T2 := 0; h1 := 1; h2 := 1; h3 := 1; k := 0.1;$

4. Умова розв'язуваності задачі третього наближення


```

M := matrix(6, 6, [[l4exp1, 0, -sinh(k*h1)*k, 0, 0, 0], [l5exp1, 0, 0, k*exp(k*h2), -k*exp(-k*h2),
0], [l6exp1, -I*omega, 0, k, -k, 0], [l7exp1, -I*omega, 0, 0, 0, sinh(k*h3)*k], [l8exp1, 0, -
I*cosh(k*h1)*omega, I*rho2*omega*exp(k*h2), I*rho2*omega*exp(-k*h2), 0], [l9exp1,
T2*k^2+rho2-rho3, 0, -I*rho2*omega, -I*rho2*omega, I*rho3*cosh(k*h3)*omega]]):
Dm :=evalf(det(M));

```

```

expand(evalf(Dm/coeff(Dm, diff(A(x1, x2, t1, t2), t2))));

```

```

evalf(coeff(Dm, diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))/coeff(Dm, diff(A(x1, x2, t1, t2), t2)));

```

```

evalf(pw); evalf((-I*pww)*(1/2));

```

```

evalf((coeff(Dm, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))+pw^2*coeff(Dm, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1))-
pw*coeff(Dm, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1)))/coeff(Dm, diff(A(x1, x2, t1, t2), t2)));

```

Програма для дослідження умови модуляційної стійкості у тришаровій гідродинамічній системі у третьому наближенні

restart:

// підключаємо необхідні бібліотеки лінійної алгебри
with(linalg):

// задаємо коефіцієнти дисперсійного рівняння, отриманого в першому наближенні
a := rho2^2/sinh(k*h2)^2-(rho2*coth(k*h2)+rho3*coth(k*h3))*(coth(k*h1)+rho2*coth(k*h2));
b := (rho2*coth(k*h2)+rho3*coth(k*h3))*(k*(1-rho2)+T1*k^3)+(k*(rho2-
rho3)+T2*k^3)*(coth(k*h1)+rho2*coth(k*h2));
c := -(k*(rho2-rho3)+T2*k^3)*(k*(1-rho2)+T1*k^3):

// задаємо формулу для обчислення одного з коренів дисперсійного рівняння та
обчислюємо першу та другу похідні по k

omega := sqrt((-b+sqrt(-4*a*c+b^2))/(2*a));
pw := diff(omega, k);
pww := diff(diff(omega, k), k):

// Задаємо параметри системи (які можна змінювати для наступних графіків)
At2 := 1:

T1 := 0: T2 := 0: h1 := 1: h2 := 1: h3 := 1: rho2 := 0.9: A := 1: sA := 1:

// задаємо спрощені вирази, які є складовими коефіцієнта L, за яким досліджується умова
модуляційної стійкості

l4exp1 := (2*k^2*(2*cosh(k*h1)^2-
1)*F20+(1/2*I)*K1*k^2*(3*sinh(k*h1)*k*A^2+2*cosh(k*h1)*B2))*sA+I*K1*cosh(k*h1)*k^2
*(B0+sB0)*A:
l4exp1At2 := -At2:

l5exp1 := (2*k^2*N20*exp(2*k*h2)+2*k^2*M20*exp(-
2*k*h2)+I*k^2*B2*(K2*cosh(k*h2)+K3)-
(3/2*I)*K2*sinh(k*h2)*k^3*A^2)*sA+I*(K2*cosh(k*h2)+K3)*(B0+sB0)*A*k^2:
l5exp1At2 := -At2:

l6exp1 :=
(1/2)*k^2*((3*I)*K5^2*K3*sinh(k*h2)*k*A^2+(2*I)*(K3*cosh(k*h2)+K2)*C2+4*K5*(N20+
M20))*sA+I*(K3*cosh(k*h2)+K2)*A*(sC0+C0)*k^2:
l6exp1At2 := -K5*At2:

l7exp1 := -(1/2*I)*(K4*(3*K5^2*sinh(k*h3)*A^2*k-
2*cosh(k*h3)*C2)+(4*I)*K5*L20*(2*cosh(k*h3)^2-
1))*k^2*sA+I*K4*cosh(k*h3)*k^2*A*(sC0+C0):
l7exp1At2 := -K5*At2:

l8exp1 := ((-3/2)*K1*cosh(k*h1)*k^2*omega-
4*K1^2*sinh(k*h1)*cosh(k*h1)*k^3+(3/2)*T1*k^4+(1/2)*rho2*omega*k^2*(3*K2*cosh(k*h2

$$\begin{aligned}
&)+3*K3)+K2*\sinh(k*h2)*k^3*rho2*(-K2*cosh(k*h2)-K3)- \\
&K2*\sinh(k*h2)*k^3*rho2*(3*K2*cosh(k*h2)+3*K3))*A^2+(2*I)*cosh(k*h1)*(4*K1*cosh(k*h \\
&1)^2*k-3*K1*k+4*\omega*\sinh(k*h1))*k*F20- \\
&(2*I)*rho2*k*exp(2*k*h2)*(K2*\sinh(k*h2)*k+K2*cosh(k*h2)*k+K3*k- \\
&2*\omega)*N20+(2*I)*rho2*k*exp(-2*k*h2)*(K2*\sinh(k*h2)*k-K2*cosh(k*h2)*k-K3*k- \\
&2*\omega)*M20-k*\omega*(K2*\sinh(k*h2)*rho2+K1*\sinh(k*h1))*B2)*sA- \\
&A*k*\omega*(B0+sB0)*(K2*\sinh(k*h2)*rho2+K1*\sinh(k*h1)): \\
l8exp1At2 := -I*K1*cosh(k*h1)*At2+I*rho2*(K2*cosh(k*h2)+K3)*At2:
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l9exp1 := (&(- \\
&(1/2)*K5*k^2*(8*K3*\sinh(k*h2)*k*rho2*(K3*cosh(k*h2)+K2)+K4*cosh(k*h3)*rho3*(8*k*si \\
&nh(k*h3)*K4-3*\omega*K5)+3*K5*(K3*cosh(k*h2)*\omega*rho2- \\
&K5*T2*k^2+K2*\omega*rho2)))*(A^2)- \\
&k*\omega*(K3*\sinh(k*h2)*rho2+K4*\sinh(k*h3)*rho3)*C2- \\
&(2*I)*cosh(k*h3)*(4*K4*cosh(k*h3)^2*k-4*\omega*K5*\sinh(k*h3)- \\
&3*K4*k)*k*rho3*L20+(2*I)*rho2*k*(K3*\sinh(k*h2)*k+K3*cosh(k*h2)*k+K2*k+2*\omega*K \\
&5)*M20+(2*I)*rho2*k*(-K3*\sinh(k*h2)*k+K3*cosh(k*h2)*k+K2*k-2*\omega*K5)*N20)*sA- \\
&k*\omega*(C0+sC0)*(K3*\sinh(k*h2)*rho2+K4*\sinh(k*h3)*rho3)*A: \\
l9exp1At2 := -I*rho2*(K3*cosh(k*h2)+K2)*At2+I*K4*cosh(k*h3)*rho3*At2:
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d8 := &-\omega^2*\sinh(k*h1)*k^3*exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*rho2- \\
&exp(k*h2)*cosh(k*h3)*\sinh(k*h1)*k^3*\omega^2*rho3-\sinh(k*h3)*exp(- \\
&k*h2)*\sinh(k*h1)*k^3*\omega^2*rho2+exp(- \\
&k*h2)*cosh(k*h3)*\sinh(k*h1)*k^3*\omega^2*rho3+exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*\sinh(k*h1)*T2*k^6- \\
&\sinh(k*h3)*exp(-k*h2)*\sinh(k*h1)*T2*k^6+exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*\sinh(k*h1)*k^4*rho2- \\
&exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*\sinh(k*h1)*k^4*rho3-\sinh(k*h3)*exp(- \\
&k*h2)*\sinh(k*h1)*k^4*rho2+\sinh(k*h3)*exp(-k*h2)*\sinh(k*h1)*k^4*rho3:
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d6 := &(2*I)*exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*exp(-k*h2)*\sinh(k*h1)*T2*k^5*\omega*rho2- \\
&(2*I)*\omega^3*\sinh(k*h1)*k^2*exp(k*h2)*rho2*exp(- \\
&k*h2)*rho3*cosh(k*h3)+(2*I)*exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*exp(- \\
&k*h2)*\sinh(k*h1)*k^3*\omega*rho2^2-(2*I)*exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*exp(- \\
&k*h2)*\sinh(k*h1)*k^3*\omega*rho2*rho3:
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d5 := &-I*exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*\sinh(k*h1)*T2*k^5*\omega*rho2-I*\sinh(k*h3)*exp(- \\
&k*h2)*\sinh(k*h1)*T2*k^5*\omega*rho2+I*exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*\sinh(k*h1)*k^2*\omega^3*rh \\
&o2^2+I*exp(k*h2)*cosh(k*h3)*\sinh(k*h1)*k^2*\omega^3*rho2*rho3-I*\sinh(k*h3)*exp(- \\
&k*h2)*\sinh(k*h1)*k^2*\omega^3*rho2^2+I*exp(- \\
&k*h2)*cosh(k*h3)*\sinh(k*h1)*k^2*\omega^3*rho2*rho3- \\
&I*exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*\sinh(k*h1)*k^3*\omega*rho2^2+I*exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*\sinh(k*h1)* \\
&k^3*\omega*rho2*rho3-I*\sinh(k*h3)*exp(- \\
&k*h2)*\sinh(k*h1)*k^3*\omega*rho2^2+I*\sinh(k*h3)*exp(- \\
&k*h2)*\sinh(k*h1)*k^3*\omega*rho2*rho3:
\end{aligned}$$

$$d9 := -2*\omega^2*\sinh(k*h1)*k^3*exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*rho2*exp(-k*h2):$$

$$d7 := (2*I)*\omega^3*\sinh(k*h1)*k^2*exp(k*h2)*rho2*exp(-k*h2)*rho3*cosh(k*h3):$$

$$\begin{aligned}
d4 := &-I*exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*cosh(k*h1)*T2*k^5*\omega+I*\sinh(k*h3)*exp(- \\
&k*h2)*cosh(k*h1)*T2*k^5*\omega+I*exp(k*h2)*\sinh(k*h3)*cosh(k*h1)*k^2*\omega^3*rho2+I \\
&*exp(k*h2)*cosh(k*h3)*cosh(k*h1)*k^2*\omega^3*rho3+I*\sinh(k*h3)*exp(- \\
&k*h2)*cosh(k*h1)*k^2*\omega^3*rho2-I*exp(-
\end{aligned}$$

$$k^2 \cosh(k^3) \cosh(k^2) k^2 \omega^3 \rho^3 - I \exp(k^2) \sinh(k^3) \cosh(k^2) k^3 \omega \rho^2 + I \exp(k^2) \sinh(k^3) \cosh(k^2) k^3 \omega \rho^3 + I \sinh(k^3) \exp(-k^2) \cosh(k^2) k^3 \omega \rho^2 - I \sinh(k^3) \exp(-k^2) \cosh(k^2) k^3 \omega \rho^3:$$

// *Задаємо коефіцієнти розв'язків першого наближення*

$$B1 := 0; sB1 := 0;$$

$$K1 := -\omega / (k \sinh(k^2));$$

$$K2 := \omega / (k \sinh(k^2));$$

$$K3 := ((1 - \rho^2) k + T1 k^3 - \omega^2 \coth(k^2) - \rho^2 \omega^2 \coth(k^2)) / (\rho^2 \omega k);$$

$$K4 := -\sinh(k^2) * ((1 - \rho^2) k + T1 k^3 - \omega^2 \coth(k^2) - \rho^2 \omega^2 \coth(k^2)) / (\rho^2 \omega k \sinh(k^2));$$

$$K5 := -\sinh(k^2) * ((1 - \rho^2) k + T1 k^3 - \omega^2 \coth(k^2) - \rho^2 \omega^2 \coth(k^2)) / (\omega^2 \rho^2);$$

// *Задаємо коефіцієнти розв'язків другого наближення*

$$N20 := -(1/2 * I) * A^2 * k * (2 * k^2 * \sinh(2 * k^3) * \sinh(2 * k^2) * (4 * T2 * k^2 + \rho^2 - \rho^3) * (4 * T1 * k^2 - \rho^2 + 1) * ((K3 * \cosh(k^2) + K2) * \exp(-2 * k^2) * K5 - K2 * \cosh(k^2) - K3) + ((-\sinh(2 * k^2) * \rho^2 + 2 * \cosh(k^2))^2 - 1) * (8 * \cosh(2 * k^3) * \rho^3 * K5 * K2 + 4 * K5 * ((2 * \cosh(k^2) * \cosh(2 * k^3) * \rho^3 + \sinh(k^2) * \sinh(2 * k^3) * \rho^2) * K3 + (\sinh(2 * k^3) * \sinh(k^3) - 2 * \cosh(2 * k^3) * \cosh(k^3)) * \rho^3 * K4) * \exp(-2 * k^2) + (\cosh(2 * k^3) * \rho^3 + \sinh(2 * k^3) * \rho^2) * (((4 * \cosh(k^2))^3 - \sinh(k^2) * \sinh(2 * k^2) - 2 * \cosh(k^2))^4) * K1 - (4 * (4 * \cosh(k^2) * \cosh(k^2))^2 + \sinh(2 * k^2) * \sinh(k^2) * \rho^2 - 2 * \cosh(k^2))) * K2 + ((-2 * \cosh(k^2))^2 + 1) * 8 * K3) * \omega^4 + (2 * \sinh(2 * k^3) * \exp(-2 * k^2) * k * (2 * \cosh(k^2))^2 - 1) * ((2 * K2 * K3 * \cosh(k^2) + K2^2 + K3^2) * \rho^2 - K4^2 * \rho^3) - 2 * \sinh(2 * k^2) * k * (\rho^2 * (-\rho^3 * \exp(-2 * k^2) * K4^2 + K1^2) * \sinh(2 * k^3) + K1^2 * \cosh(2 * k^3) * \rho^3) + 2 * (2 * K2 * K3 * \cosh(k^2) + K2^2 + K3^2) * \rho^2 * k * \sinh(2 * k^2) * ((-\exp(-2 * k^2) + 1) * \rho^2 * \sinh(2 * k^3) + \cosh(2 * k^3) * \rho^3)) * \omega^3 + (((4 * (K3 * \cosh(k^2) + K2)) * K5 * k * \rho^2 * \exp(-2 * k^2) + 2 * k * (K2 * \sinh(k^2) * \rho^2 + K1 * \sinh(k^2))) * \sinh(2 * k^3) * \sinh(2 * k^2) + (4 * k * (-K5 * K3 * \exp(-2 * k^2) + K2) * (2 * \cosh(k^2))^2 - 1) * \cosh(k^2) - 4 * k * (2 * \cosh(k^2))^2 - 1) * (K2 * K5 * \exp(-2 * k^2) + K1 * \cosh(k^2) - K3)) * \sinh(2 * k^3)) * (4 * T2 * k^2 + \rho^2 - \rho^3) + ((4 * k * \rho^2 * (K2 * \cosh(k^2) + K3) - 2 * K5 * \exp(-2 * k^2) * k * (K3 * \sinh(k^2) * \rho^2 + K4 * \sinh(k^3) * \rho^3)) * \sinh(2 * k^3) + 4 * k * \rho^3 * (-K5 * K3 * \exp(-2 * k^2) + K2) * \cosh(2 * k^3) * \cosh(k^2) - 4 * \cosh(2 * k^3) * k * \rho^3 * ((-K4 * \cosh(k^3) + K2) * K5 * \exp(-2 * k^2) - K3)) * \sinh(2 * k^2) * (4 * T1 * k^2 - \rho^2 + 1)) * \omega^2 - k^2 * \sinh(2 * k^3) * \sinh(2 * k^2) * (((4 * T1 * k^2 - \rho^2 + 1) * ((2 * K2 * K3 * \cosh(k^2) + K2^2 + K3^2) * \rho^2 - K4^2 * \rho^3) * \exp(-2 * k^2) + (4 * T2 * k^2 + \rho^2 - \rho^3) * ((2 * K2 * K3 * \cosh(k^2) + K2^2 + K3^2) * \rho^2 - K1^2)) * \omega) / (((-4 * T1 * k^3 - 2 * \omega^2 * \rho^2 + k * \rho^2 - k) * (4 * T2 * k^3 + 2 * \omega^2 * \rho^2 + k * \rho^2 - k * \rho^3) * \exp(-2 * k^2) + (4 * T1 * k^3 - 2 * \omega^2 * \rho^2 - k * \rho^2 + k) * (4 * T2 * k^3 - 2 * \omega^2 * \rho^2 + k * \rho^2 - k * \rho^3) * \exp(2 * k^2)) * \sinh(2 * k^2) + 2 * \omega^2 * (2 * \cosh(k^2))^2 - 1) * (k * (4 * T2 * k^2 + \rho^2 - \rho^3) * (\exp(-2 * k^2) - \exp(2 * k^2)) + 2 * \omega^2 * \rho^2 * (\exp(-2 * k^2) + \exp(2 * k^2)))) * \sinh(2 * k^3) + 2 * \cosh(2 * k^3) * \sinh(2 * k^2) * \rho^3 * \omega^2 * (2 * \omega^2 * \rho^2 * (\exp(-2 * k^2) + \exp(2 * k^2)) + k * (4 * T1 * k^2 - \rho^2 + 1) * (\exp(-2 * k^2) - \exp(2 * k^2))) - 4 * \omega^4 * \rho^3 * \cosh(2 * k^3) * (2 * \cosh(k^2))^2 - 1) * (\exp(-2 * k^2) - \exp(2 * k^2))):$$

$$M20 := (-1/2 * I) * (((4 * I) * \rho^2 * \omega^2 - (8 * I) * T1 * k^3 + (2 * I) * k * \rho^2 - (2 * I) * k) * \sinh(2 * k^2) + ((8 * I) * \cosh(k^2))^2 - 4 * I) * \omega^2 * \exp(2 * k^2) * N20 - (1/2 * I) * (((-$$

```

8*T1*k^4+(-2*K3*omega*rho2+2*rho2-2)*k^2)*K2*cosh(k*h2)-8*K3*T1*k^4+((-
K2^2*omega-K3^2*omega+2*K3)*rho2+K1^2*omega-
2*K3)*k^2+((K2*sinh(k*h2)*rho2+K1*sinh(k*h1))^2)*omega^2*k)*sinh(2*k*h1)+((8*K2*co
sh(k*h1)^2-4*K2)*omega^2*cosh(k*h2)+(-
8*K1*cosh(k*h1)^3+8*K3*cosh(k*h1)^2+4*K1*cosh(k*h1)-4*K3)*omega^2*k)*A^2)/(exp(-
2*k*h2)*((-4*T1*k^3-2*rho2*omega^2+k*(rho2-1))*sinh(2*k*h1)+(4*cosh(k*h1)^2-
2)*omega^2)):

```

```

F20 := -(I*(K1*cosh(k*h1)-K2*cosh(k*h2)-K3)*A^2*k-M20*exp(-
2*k*h2)+N20*exp(2*k*h2))/sinh(2*k*h1):

```

```

L20 := -(I*(K3*cosh(k*h2)-K4*cosh(k*h3)+K2)*A^2*k*K5+M20-N20)/sinh(2*k*h3):

```

```

C2 := I*k*(I*K4*K5*cosh(k*h3)*A^2*k-L20*sinh(2*k*h3))/omega:

```

```

B2 := I*k*(I*K1*A^2*cosh(k*h1)*k+F20*sinh(2*k*h1))/omega:

```

```

B0 := A*sA*k*((cosh(k*h1)^2+sinh(k*h1)^2)*k*K1^2+2*K1*sinh(k*h1)*omega+(((
cosh(k*h2)^2-sinh(k*h2)^2)*K2^2-2*K2*K3*cosh(k*h2)-
K3^2)*k+2*K2*sinh(k*h2)*omega)*rho2)/(2*(rho2-1)):

```

```

sB0 := A*sA*k*((cosh(k*h1)^2+sinh(k*h1)^2)*k*K1^2+2*K1*sinh(k*h1)*omega+(((
cosh(k*h2)^2-sinh(k*h2)^2)*K2^2-2*K2*K3*cosh(k*h2)-
K3^2)*k+2*K2*sinh(k*h2)*omega)*rho2)/(2*(rho2-1)):

```

```

C0 := -A*sA*k*(((cosh(k*h3)^2-
sinh(k*h3)^2)*K4^2*k+2*K4*K5*sinh(k*h3)*omega)*rho3+(((cosh(k*h2)^2+sinh(k*h2)^2)*K
3^2+2*K2*K3*cosh(k*h2)+K2^2)*k+2*K3*K5*sinh(k*h2)*omega)*rho2)/(2*(rho2-rho3)):

```

```

sC0 := -A*sA*k*(((cosh(k*h3)^2-
sinh(k*h3)^2)*K4^2*k+2*K4*K5*sinh(k*h3)*omega)*rho3+(((cosh(k*h2)^2+sinh(k*h2)^2)*K
3^2+2*K2*K3*cosh(k*h2)+K2^2)*k+2*K3*K5*sinh(k*h2)*omega)*rho2)/(2*(rho2-rho3)):

```

// Обчислюємо коефіцієнт L

```

Dm := d4*I4exp1+d5*I5exp1+d6*I6exp1+d7*I7exp1+d8*I8exp1+d9*I9exp1:

```

```

DmAt2 :=

```

```

d4*I4exp1At2+d5*I5exp1At2+d6*I6exp1At2+d7*I7exp1At2+d8*I8exp1At2+d9*I9exp1At2:

```

```

l := Dm/(I*DmAt2):

```

```

ff := evalf(l);

```

```

L :=unapply(ff, rho3, k);

```

// Виконуємо побудову графіків модуляційної стійкості

```

with(LinearAlgebra): with(plots):

```

```

grOsn := implicitplot(L(rho3, k), rho3 = 0.001 .. .9, k = 0.001 .. 3, gridrefine = 6);

```

```

display(grOsn);

```

Список публікацій здобувача

Основні наукові результати дисертації

4. Naradovyi V. Investigation of the energy of wave motions in a three-layer hydrodynamic system / V. Naradovyi, D. Kharchenko // *Waves in Random and Complex Media*. – 2021. – Vol. 31(6). – P. 1729-1748. <https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1699674> (Scopus)
5. Наратовий В. В. Дослідження хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» / Математичне моделювання // В. В. Наратовий, Д. С. Харченко. – 2022. – № 1 (46). – С. 32-43. Doi: [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(46\)2022.258346](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(46)2022.258346)
6. Харченко Д. С. Форма хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі / Д. С. Харченко // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2021. – Том 94. – С. 77-90. Doi: <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2021-94-05>

Тези наукових доповідей

6. Харченко Д. С. Дослідження енергії хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі / Д. С. Харченко // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: Збірка матеріалів XIV міжнародної наукової конференції для молодих вчених / Під ред. проф. Жолткевича Г. М. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – С. 35-36.
7. Харченко Д. С. Дослідження модуляційної стійкості хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі / Д. С. Харченко // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: тези доповідей XVI Міжнародної наукової конференції для студентів та молодих вчених (12 - 13 березня 2021 р. м. Харків, Україна). – Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2021 – С. 27-29.
8. Харченко Д. С. Дослідження форми пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» / Д. С. Харченко // Пріоритетні шляхи розвитку науки і освіти: матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції м. Львів, 20-21 липня 2022 року. – Львів: Львівський науковий форум, 2022. – С. 23-25.
9. Харченко Д. С. Дослідження явища резонансу у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» /

Д. С. Харченко // Теорія і практика сучасної науки та освіти: матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції м. Львів, 20-21 червня 2022 року. – Львів: Львівський науковий форум, 2022. – С. 45-47.

10. Харченко Д. С. Модуляційна стійкість хвильових рухів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» / Д. С. Харченко, В. В. Нарadowий // Матеріали VI Всеукраїнської онлайн-конференції молодих науковців «Сучасні проблеми природничих і точних наук». – Ніжин: «Наука-сервіс», 2021. – С. 63-64.

**Статті у наукових виданнях України, що додатково
відображають результати дисертації**

2. Нарadowий В. В. Резонанс другої гармоніки в тришаровій рідині / В. В. Нарadowий, Д. С. Харченко // Наукові записки молодих учених. – 2021. – – – № 8.
<https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1891/pdf>

«Затверджую»
Проректор з наукової роботи та міжнародних зв'язків
д.с.н., професор Олександр ЛЕВЧЕНКО



2023р.

ДОВІДКА

**про результати впровадження результатів дисертації здобувача ступеня
доктора філософії зі спеціальності 113 Прикладна математика
Харченко Діани Сергіївни
за темою «Моделювання хвильових процесів в тришаровій гідродинамічній
системі» у Центральноукраїнському національному технічному університеті**

Результати наукового дослідження здобувача ступеня доктора філософії зі спеціальності 113 Прикладна математика Харченко Діани Сергіївни відповідно до затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. №44 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» містять наукову новизну, мають теоретичне і практичне значення і можуть бути використані в різних областях прикладної математики.

Елементи даного дослідження застосовані у побудові математичної моделі задачі поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар із твердим дном – шар – шар із кришкою», урахувавши поверхневий натяг на поверхнях контакту, де з використанням методу багатомасштабних розвинень отримано перші три лінійні задачі

Матеріали використовуються при викладанні дисципліни «Проектування та моделювання складних систем» спеціальності 123 Комп'ютерна інженерія за другим (магістерським) рівнем вищої освіти.

Голова комісії:

завідувач кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення
д.т.н., професор

Олексій СМІРНОВ

Члени комісії:

доцент кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення

к.ф.-м.н, доцент

Володимир ПЕТРЕНЮК

старший викладач кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення

к.т.н.

Костянтин БУРАВЧЕНКО



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

вул. Шевченка, 1, м. Кропивницький, 25006, тел. (0522) 32-08-89, факс (0522) 24-85-44
E-mail: mails@cuspu.edu.ua, код ЄДРПОУ 02125415

11 травня 2023 року № У-ч

На № _____ від _____

ДОВІДКА

**про впровадження результатів дисертаційного дослідження здобувача ступеня
доктора філософії зі спеціальності 113 Прикладна математика**

Харченко Діани Сергіївни

**за темою «Моделювання хвильових процесів в тришаровій гідродинамічній системі»
у Центральноукраїнському державному університеті
імені Володимира Винниченка**

Результати наукового дослідження здобувача ступеня доктора філософії зі спеціальності 113 Прикладна математика Харченко Діани Сергіївни відповідно до затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. №44 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» містять наукову новизну, мають теоретичне і практичне значення і можуть бути використані в різних областях природознавства, від фізики до біології, в прикладній математиці. Ці дослідження дозволяють не тільки моделювати реальні фізичні хвильові процеси, а також застосовувати їх для виконання чисельно-аналітичних досліджень.

Дисертаційна робота виконана в межах індивідуального плану роботи аспіранта та в рамках дослідження, яке здійснене в Центральноукраїнському державному університеті імені Володимира Винниченка за темою «Прикладна математика у дослідженні складних систем з детермінованими та стохастичними процесами» (номер державної реєстрації 0116 U 005271).

Елементи дисертаційного дослідження Харченко Д.С. використовуються кафедрою математики та методики її навчання, а також кафедрою інформатики та інформаційних технологій ЦДУ імені В. Винниченка при розробці кваліфікаційних робіт та проведенні аудиторних занять з курсів «Теорія систем та математичне моделювання», «Практикум з символічних обчислень», «Сучасні проблеми прикладної математики» при підготовці фахівців за спеціальностями 112 Статистика, 113 Прикладна математика та 122 Комп'ютерні науки.

Результати дисертаційного дослідження здобувача ступеня доктора філософії зі спеціальності 113 Прикладна математика Харченко Д.С. на тему «Моделювання хвильових процесів в тришаровій гідродинамічній системі» заслухане та обговорене на засіданні кафедри математики та методики її навчання (протокол №9 від 02.03.2023. Результати впровадження елементів дисертаційного дослідження Харченко Д.С. розглянуто на засіданні кафедри інформатики та інформаційних технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка (протокол №11 від 06.04.2023 року).

Проректор з наукової роботи

Лілія КЛОЧЕК

