

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЛУНЬОВА МАРІЯ ВАЛЕНТИНІВНА

УДК 532.59

ДИСЕРТАЦІЯ
МОДЕЛЮВАННЯ ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ
У ШАРУВАТИХ РІДИНАХ

Спеціальність – 113 Прикладна математика
Галузь знань – 11 Математика та Статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело


_____ Луньова М.В.

Науковий керівник Авраменко Ольга Валентинівна,
доктор фізико-математичних наук, професор

Кропивницький – 2020

АНОТАЦІЯ

Луньова М.В. Моделювання внутрішніх хвильових процесів у шаруватих рідинах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка, Кропивницький, 2020.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню умов поширення та взаємодії внутрішніх слабконелінійних хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» із застосуванням методу багатомасштабних розвинень.

Швидкий розвиток сучасних пакетів комп'ютерної алгебри та удосконалення асимптотичних методів, які, зазвичай, призводять до громіздкості аналітичних перетворень, посприяв можливості впритул підійти до класу нелінійних задач, які б враховували розв'язки нелінійних проблем у наближеннях вищих порядків. Тому, з урахуванням накопченого досвіду, виникла необхідність дослідити нелінійні гравітаційно-капілярні хвилі у тришаровій рідкій системі і проаналізувати їхнє поширення, модуляційну стійкість обвідних та інші характеристики системи в залежності від фізичних та геометричних параметрів.

У роботі розглянуто постановку слабконелінійної задачі поширення та взаємодії хвильових пакетів у системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». З використанням методу багатомасштабних розвинень виведено перші три лінійні наближення задачі про поширення та взаємодію хвиль вздовж поверхонь контакту в даній системі. Розв'язано задачу першого наближення та отримано дисперсійне співвідношення, яке має дві пари лінійно незалежних розв'язків. Знайдено розв'язки задачі другого наближення. Виведено умови розв'язності другого та третього наближень. На основі цих умов з урахуванням дисперсійного рівняння отримано

еволюційні рівняння обвідної внутрішнього верхнього та нижнього хвильового пакету у формі нелінійного рівняння Шредінгера.

У ході аналізу коренів дисперсійного рівняння розглянуто два граничні випадки, які підтверджують достовірність отриманих результатів. Аналіз залежності частот центру хвильового пакету від фізичних та геометричних параметрів системи з урахуванням впливу поверхневого натягу показав, що при переході системи від одного виродженого випадку до другого спостерігається якісна симетрія графіків частот центру хвильового пакету відносно значення густини середнього шару. При цьому вплив поверхневого натягу на одній із поверхонь контакту або на двох поверхнях одночасно призводить до збільшення абсолютного значення частоти центра хвильового пакета.

Досліджено залежність амплітуд хвиль-відгуків від параметрів системи. Виявлено, що при збільшенні товщини верхнього шару амплітуди хвиль-відгуків прямують до граничного значення, а при рівних стрибках густини на поверхнях контакту абсолютні значення амплітуд хвиль-відгуків співпадають. Якщо стрибок густини на нижній поверхні контакту є меншим за стрибок густини на верхній поверхні контакту, то амплітуда хвиль-відгуків, яка виникає на нижній поверхні, є більшою, ніж амплітуда хвиль-відгуків на верхній поверхні. Зміна значення хвильового числа приводить до того, що значення амплітуд хвиль-відгуків досить швидко збігаються до спільного граничного значення.

Дослідження форми відхилення поверхонь контакту у рамках задачі першого наближення показало залежність амплітуди відхилення, як верхньої так і нижньої поверхонь контакту, від зміни густини середнього шару. Проте, з наближенням значення густини середнього шару до значення густини нижнього шару цей вплив є більш вираженим на нижній поверхні контакту. Амплітуда верхньої поверхні контакту зазнає істотних змін тільки при зміні товщини верхнього шару. Відмітимо, що проведений аналіз відношення амплітуд є важливим при подальшому дослідженні енергетичних процесів в

системі, що досліджується, адже при поширенні хвиль в багат шарових гідродинамічних системах виникає явище перекачування енергії хвиль.

Аналіз форми відхилення поверхонь контакту з урахування наближення другого порядку виявив параметри системи, за яких виникають хвилі з загостреними гребінцями та затупленими підшвами, або хвилі з затупленим гребінцем і гострою підшвою. Також виявлені області гасіння другої гармоніки та області істотного впливу другої гармоніки на форму поверхні контакту.

Аналіз розв'язків другого наближення показав наявність областей резонансу другої гармоніки. На нижній поверхні контакту такі області були виявлені в околі кривих, де коефіцієнт другої гармоніки набуває як завгодно великих значень, а також кривих, де спостерігається виродження тришарової системи у двошарову. Це дало змогу виконати оцінку застосовності методу багатомасштабних розвинень до даної проблеми та зробити висновки про точність методу та достовірність отриманих результатів.

Побудовано діаграми модуляційної стійкості для різних значень товщини верхнього шару на площині «густина шару – хвильове число», при цьому виявлено криві, які відділяють область модуляційної стійкості від нестійкості для капілярних та гравітаційних хвиль. Виявлено, що області модуляційної нестійкості істотно розширюються при збільшенні товщини верхнього шару.

Виведено вирази для оцінки потоку енергії трьох шарів рідини та сумарної енергії гідродинамічної системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» у вигляді інтегралів за часовою та вертикальною просторовою змінними від добутку похідних потенціалів швидкостей за часовою та горизонтальною просторовою змінними. Було виявлено, що енергія середнього та верхнього шару тришарової гідродинамічної системи зі збільшенням значення хвильового числа має спадний характер і прямує до певного граничного значення, яке для коротких хвиль не залежить від товщини верхнього шару. У той же час значення енергії нижнього шару зростає, а після досягнення максимуму спадає до свого граничного значення. При цьому потік енергії системи, що є сумою

потоків енергії трьох шарів, також має спадний характер і достатньо швидко збігається до свого граничного значення.

Аналіз впливу геометричних параметрів системи на енергетичні характеристики виявив такі ефекти та закономірності: наявність прогресивної гравітаційної хвилі на верхній поверхні контакту призводить до зростання сумарної енергії системи до граничного значення, в той час як для капілярних хвиль сумарна енергія системи має спадний характер; для випадку гравітаційно-капілярних хвиль, за умови, що прогресивна хвиля на верхній поверхні контакту відсутня, а є лише прогресивна хвиля на нижній поверхні контакту, енергія системи зі збільшенням товщини верхнього шару має спадний характер і для гравітаційних хвиль має більше значення порівняно з капілярними хвилями.

Результати дисертаційної роботи в цілому носять теоретичний характер, у них, в значній мірі, враховані сучасні проблеми моделювання хвильових процесів, які виникають в практичній діяльності. Наявність великої кількості фізичних та геометричних параметрів системи, пов'язаних між собою, призводить до необхідності детального аналізу та інтерпретації отриманих результатів, які створюють цілісну картину хвильового процесу і у повній мірі можуть бути застосовані для вивчення хвильових процесів в океані з льодовим покриттям та з шаруватою структурою рідини, яка виникає поблизу гирла річок, а також у відкритому океані у період танення льоду. Вивчення впливу поверхневого натягу має практичне застосування у розробках нових технологій з використанням шаруватих середовищ, які не перемішуються, що має перспективу застосування у створенні інноваційних рішень для різних галузей прикладної науки.

Дисертаційну роботу було виконано в межах індивідуального плану роботи аспіранта та в рамках дослідження, здійсненого у Центральноукраїнському державному педагогічному університеті імені Володимира Винниченка за темою «Прикладна математика у дослідженні

складних систем з детермінованими та стохастичними процесами» (номер державної реєстрації 0116 U 005271).

Ключові слова: тришарова гідродинамічна система, слабконелінійна модель, хвильовий пакет, внутрішні хвилі, взаємодія хвиль, амплітуди хвиль, відношення амплітуд, енергія хвильового руху, обвідна хвильового пакету, модуляційна стійкість.

SUMMARY

Maria V. Luniova Modeling of internal wave processes in layered fluids. – Qualification scientific paper, manuscript.

The thesis for the degree of a Doctor of Philosophy in the specialty 113 Applied Mathematics.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,
Kropyvnytskyi, 2020

The thesis is devoted to the investigation of the conditions of propagation and interaction of internal weakly nonlinear wave packets in a three-layer hydrodynamic system "half-space – layer – layer with a rigid lid" using the asymptotic method of multiscale expansion.

The rapid development of modern packages of computer algebra and the improvement of asymptotic methods, which usually lead to cumbersome analytical transformations, have contributed to the possibility of coming close to the class of nonlinear problems that would take into account solutions of nonlinear problems in higher-order approximations. Therefore, taking into account the accumulated experience it is necessary to study nonlinear gravitational-capillary waves in a three-layer fluid system and analyze their propagation, modulation stability of the envelope and other characteristics of the system depending on physical and geometric parameters.

The thesis deals with the formulation of a weakly nonlinear problem of propagation and interaction of wave packets in the system "half-space – layer – layer with a rigid lid". Using the method of multiscale expansion to the third order, the first three linear approximations of the problem of propagation and interaction of waves along the contact surfaces in the system are obtained. The problem of the first approximation is solved and a dispersion relation is obtained, which has two pairs of linearly independent solutions. The solutions of the second approximation problem are found. The conditions for the solvability of the second and third approximations are derived. Taking into account these conditions and the dispersion equation, two evolution equations of the envelopes of internal upper and lower wave-packets are obtained in the form of a nonlinear Schrödinger equation.

As a result of the analysis of the roots of the dispersion equation, two limit cases are founded, which confirm the reliability of the obtained results. Taking into account the effect of surface tension, the analysis of the dependence of the frequencies of the center of the wave-packet up to the physical and geometric parameters of the system is completed. The transition of the system from the first degenerate case to the second one leads to a qualitative symmetry of graphs of the frequencies of the center of the wave-packet via to the value of the density of the middle layer. The effect of the surface tension on one of the contact surfaces or on two surfaces simultaneously leads to an increase of the absolute value of the frequency of the center of the wave-packet.

The response waves' amplitudes dependence on the system parameters is investigated. It is found that with increasing thickness of the upper layer, the amplitudes of the response waves limit to the fixed value. In the case of the equal jumps in density on the contact surfaces, the absolute values of the amplitudes of the response waves coincide. If the density jump on the lower contact surface is less than the density jump on the upper contact surface, then the response wave amplitude on the lower surface are larger than the response wave amplitude on the upper surface. Changing the wave number value leads to the fact that the values of the amplitudes of the response waves quickly approach to a common limit value.

The study of the form of the elevation of the contact surfaces in the framework of the solution of the first approximation problem had showed the dependence of the amplitude of the elevation of both, the upper and lower, contact surfaces on the density of the middle layer. However, as the middle layer density approaches the lower layer density, this effect is more pronounced on the lower contact surface. The amplitude of the upper contact surface changes only when the thickness of the upper layer changes. Note that the analysis of the ratio of amplitudes is important in the further study of energy processes in the system, because the phenomenon of pumping energy waves occurs in case of the propagation of waves in multilayered hydrodynamic systems.

Taking into account the second-order approximation, the analysis of the form of the elevation of the contact surfaces have revealed the parameters of system where waves with sharpened combs and blunted soles are formed or waves with blunted combs and sharpened soles are formed. Also, the areas of second harmonic damping and areas of significant influence of the second harmonic on the form of the contact surface are investigated.

Analysis of the solutions of the second approximation have revealed the presence of regions of resonance of the second harmonic. On the lower contact surface, such the areas were found around the curves, where the coefficient of the second harmonic acquires any arbitrarily large values, as well as curves, where the degeneration of the three-layer system into the two-layer one is observed. This made it possible to evaluate the applicability of the multiscale expansion method to this problem and to draw a conclusion about accuracy of the method and the reliability of the results.

Diagrams of modulation stability for different values of the thickness of the upper layer on the plane "layer density – wave number" were constructed, and curves that separate the region of modulation stability from instability for capillary and gravitational waves were found. It is revealed that the areas of modulation instability substantially expand with increasing of the upper layer thickness.

The expressions for quantitative and qualitative estimation of energy of three layers of fluid and total energy of the hydrodynamic system "half-space – layer – layer with a rigid lid" in the form of integrals on time and vertical space variables from the product of velocity potentials derivations on time and horizontal space variables are derived. It was found that the energy of the middle and upper layer of the three-layer hydrodynamic system with increasing value of the wave number has a descending nature and tends to a fixed limit value, which for short waves does not depend on the thickness of the top layer. At the same time, the energy value of the lower layer increases to a fixed value, and after reaching the maximum it falls to its limit value. In this case, the energy of the system, which is equal to the sum of the energies of the three layers, also has a decreasing nature and quickly tends to its limit value.

The analysis of the influence of the geometrical parameters of the system on the energy characteristics revealed the following effects and regularities: the presence of the progressive gravitational wave on the upper contact surface leads to an increase of the total energy of the system to the limit value, while the total energy of the system for capillary waves has a decreasing nature; in the case of gravitational-capillary waves, if the progressive wave on the upper contact surface is not taken into account and the progressive wave on the lower contact surface is taken into account, then the energy of the system has a decreasing nature with increasing thickness of the upper layer and, also, gravitational waves energy is larger than capillary waves energy.

In general, the results of the investigation have a theoretical nature. To a large extent, it takes into account the modern problems of wave processes modeling that arise in practical activity. The presence of a large number of interconnected physical and geometric parameters of the system leads to the need for detailed analysis and interpretation of the results. It creates a holistic picture of the wave process and, to the fullest extent, can be applied to study wave processes in an ice-covered ocean and with a layered fluid structure that occurs near the mouth of rivers and in the open ocean during ice melt. The study of the influence of surface tension has practical application in the development of new technologies using layered media that do not

mixed, which has the potential to be used in creating innovative solutions for various fields of applied science.

The thesis was performed within the framework of the individual postgraduate work plan and within the framework of the research "Applied mathematics in the study of complex systems with deterministic and stochastic processes" (state registration number 0116 U 005271) conducted at Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Key words: three-layer hydrodynamic system, weakly nonlinear model, wave-packet, internal waves, interaction of waves, wave amplitudes, amplitude ratio, wave motion energy, envelope of wave-packet, modulation stability.

Список публікацій здобувача

Основні наукові результати дисертації

1. Avramenko O., Lunyova M., Naradovyi V. Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. Vol. 5, Issue 5 (89). P. 58–66. doi: 10.15587/1729-4061.2017.111941
2. Avramenko O., Lunyova M. Analysis of energy of internal waves in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 2, Issue 5 (92). P. 26–33. doi: 10.15587/1729-4061.2018.128641.
3. Авраменко О.В., Луньова М.В. Наратовий В.В., Селезов І.Т. Умови поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідро-динамічній системі з твердою кришкою. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2017. – 60, № 4. – С. 137–151.
Теж саме: Avramenko O.V., Naradovyi V.V., Lunyova M.V., Selezov I.T. Conditions of Wave Propagation in a Semiinfinite Three-Layer Hydrodynamic System with Rigid Lid. // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – 247 (1). – P. 173-190. doi: 10.1007/s10958-020-04795

4. Авраменко О.В., Луньова М.В. Аналіз форми хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». // . Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2019. – 62, № 3. – С. 127-142.
5. Авраменко О., Луньова М. Модуляційна стійкість хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2019. – Вип. 1. – С. 30-35.

Тези наукових доповідей

6. Авраменко О.В., Луньова М.В. Візуалізація поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою. // XII Всеукраїнська студентська наукова конференція “Сучасні проблеми фізико-математичних наук та методики їх викладання”: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2017. – С. 3-4.
7. Луньова М.В. Моделювання поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою. // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях / Под редакцией профессора Жолткевича Г.Н. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2017. – С. 22-23.
8. Луньова М.В., Богданов В.І. Аналіз енергії хвильового руху тришарової гідродинамічної системи. Вироджені випадки. // XIII Всеукраїнська студентська наукова конференція “Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання”: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2018. – С. 188-190.
9. Авраменко О.В., Луньова М.В. Еволюційні рівняння для обвідних хвильових пакетів у напівнескінченній тришаровій рідині. // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: Збірка матеріалів XIV міжнародної наукової конференції для молодих вчених / Під ред. проф. Жолткевича Г.М. – Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2019. – С. 42-43.

10. Авраменко О.В., Луньова М.В. Аналіз умов хвилеутворення в тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». // XV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання»: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2019. – С. 3.

**Статті у наукових виданнях України, що додатково
відображають результати дисертації**

11. Гринько А.Р., Луньова М.В. Використання математичного пакету Maple для аналізу енергії хвиль у тришаровій гідродинамічній системі. // Наукові записки молодих учених. 2018. – № 1. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1421>

ЗМІСТ

ВСТУП	15
РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ З ШАРУВАТОЮ СТРУКТУРОЮ .23	
1.1. Основні результати досліджень поширення хвиль у шаруватих гідродинамічних системах та результати експериментів і натурних спостережень	23
1.2. Внесок вітчизняних науковців у дослідження поширення внутрішніх та поверхневих хвиль у неоднорідних рідких системах.....	29
1.3. Методи розв’язування нелінійних задач та фізико-математичні моделі систем з неоднорідною структурою.....	34
1.4. Модуляційна стійкість обвідної хвильового пакета.....	40
Висновки до першого розділу.....	44
РОЗДІЛ 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АНАЛІЗ УМОВ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ТРИШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ	45
2.1. Постановка слабконелінійної задачі поширення хвиль у системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою».....	45
2.2. Аналіз розв’язків задачі першого наближення та умови поширення хвиль.....	50
2.2.1. Розв’язки задачі та дисперсійне співвідношення	50
2.2.2. Випадки виродження тришарової системи у двошарову.....	52
2.2.3. Аналіз коренів дисперсійного рівняння в залежності від геометричних та фізичних параметрів системи.....	54
2.2.4. Аналіз умов проходження хвиль в залежності від параметрів системи.....	59
2.3. Розв’язки та умова розв’язності другого наближення проблеми.....	64
2.4. Особливості поширення хвиль вздовж поверхонь контакту	72
2.4.1. Форма поверхонь контакту у рамках задачі першого наближення	72

2.4.2. Аналіз форми хвильового пакета на поверхнях контакту з урахуванням розв'язків другого наближення	75
2.5. Точність методу та резонанс другої гармоніки.....	83
Висновки до другого розділу	85
РОЗДІЛ 3. ЕВОЛЮЦІЯ ОБВІДНИХ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ ТА ОЦІНКА ПОТОКУ ЕНЕРГІЇ	88
3.1. Умова розв'язності третього наближення проблеми	88
3.2. Еволюційні рівняння обвідних внутрішнього верхнього та нижнього хвильових пакетів.....	91
3.3 Умова модуляційної стійкості	92
3.3.1. Аналітичні вирази для дослідження модуляційної стійкості.....	92
3.3.2. Аналіз умов модуляційної стійкості на поверхнях контакту	93
3.4. Дослідження потоку енергії хвильового руху.....	98
Висновки до третього розділу.....	107
ВИСНОВКИ	110
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	112
ДОДАТКИ	126
Додаток А. Програма символного виводу умови розв'язності задачі другого наближення та знаходження її розв'язків	126
Додаток Б. Програма символного виводу умови розв'язності задачі третього наближення	135
Додаток В. Список публікацій здобувача	152
Додаток Г. Акти про впровадження результатів дисертації.....	154

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Основи теорії нелінійних хвиль були закладені ще у XIX ст. і були предметом дослідження багатьох видатних вчених, таких як Пуассон, Стокс, Релей, Буссінеск, Ріман. Проте бурхливий розвиток теорії нелінійних хвильових процесів припав на другу половину XX століття і пов'язаний зі створенням потужного математичного апарату, який дозволив здійснити точні аналітичні виведення ряду нелінійних рівнянь в частинних похідних, та розвитком обчислювальної техніки, що дозволило безпосередньо підійти до пошуку розв'язків цих рівнянь. Вивченню теорії внутрішніх хвиль, їхньому експериментальному дослідженню та натурним спостереженням присвячені роботи А. Найфе, А. Ньюелла, В. Чої, Х. Оно, Х. Хасімото, Г. Юена, В.Є. Захарова, І.Т. Селезова, О.Г. Стеценка та ін.

Як відомо основними механізмами поширення хвиль у рідинах є дисперсія та нелінійність. Дисперсія призводить до згладжування форми хвильового пакета, тоді як нелінійність приводить до загострення форми хвилі, і, як наслідок, її перекидання або колапсу. Найбільш цікаве явище спостерігається в момент рівноваги цих ефектів, коли виникає локалізована хвиля (солітон), або солітон обвідної (для випадку слабконелінійного дисперсійного середовища).

У випадку тришарової рідини, коли верхній шар обмежений твердою кришкою, середній шар має скінчену глибину, а товщина нижнього шару прямує до нескінченості, важливою характеристикою системи є співвідношення глибин цих шарів, а також стрибки значень їхньої густини. Ці параметри можуть істотно впливати на фізичні механізми, відповідальні за дисперсію та нелінійні ефекти, а отже, і на стійкість та еволюцію хвильових пакетів при їхньому поширенні вздовж поверхонь контакту.

В математичній теорії поверхневих та внутрішніх хвиль напрацьована значна кількість методів кількісного і якісного аналізу явищ, які виникають в стратифікованих рідинах. Серед них інтенсивного розвитку набули асимптотичні підходи до дослідження явищ нелінійного поширення хвильових пакетів. Зокрема, широкого розповсюдження одержали різні варіанти

асимптотичних підходів Буссінеска, Д.Кортевега і Г. де Вріза, К.Фрідрікса, В.Е.Захарова та ін. Математичні методи та моделі, які добре себе зарекомендували на практиці, відображені в роботах Дж. Стокера, Дж. Лайтхілла, Дж. Уізема, О. Філіпса, Л.В. Овсяннікова, О.С. Лимарченко та ін.

Хвильові процеси у шаруватих гідродинамічних системах, зокрема двошарових, у рамках слабконелінійної моделі, вивчались І. Т. Селезовим, О. В. Авраменко, Ю. В. Гуртовим та В. В. Наратовим. Методом багатомасштабних розвинень були отримані еволюційні рівняння обвідних на поверхнях контакту рідких шарів у формі нелінійного рівняння Шредінгера, досліджено особливості модуляційної стійкості, а також проаналізовано вплив геометричних та фізичних параметрів на енергетичні та інші характеристики системи.

Актуальність даної роботи зумовлена необхідністю вивчення фізичних процесів у тришаровій рідкій системі з дисперсією, еволюції та стійкості обвідної в залежності від фізичних та геометричних параметрів системи. Розглянута в дисертації математична модель тришарової гідродинамічної системи, заснована на балансі дисперсії та нелінійності, має досить загальний характер і може бути використана в різних областях природознавства від фізики й прикладної математики до біології. Зокрема, розв'язання задач про поширення хвиль у системах з шаруватою структурою має застосування в океанології, біомеханіці, гідравліці та ін. Ці дослідження дозволять не тільки моделювати реальні фізичні хвильові процеси, а також застосувати їх для розробки чисельних досліджень та створення теоретичної бази для експериментів.

Мета дисертаційної роботи полягає в отриманні нових аналітичних співвідношень між основними характеристиками хвильового руху у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» та виявленні фізичних ефектів і закономірностей поширення та взаємодії

хвильових пакетів у рамках слабконелінійної моделі з використанням методу багатомасштабних розвинень засобами пакетів символічних обчислень.

Для досягнення поставленої мети, потрібно вирішити наступні **завдання**:

- Провести аналіз та класифікацію наявних підходів до моделювання хвильових процесів у шаруватих рідких системах; побудувати слабконелінійну модель системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» та три її лінійних наближення.
- Отримати нові аналітичні результати, зокрема, вивести еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту гідродинамічних середовищ з різними властивостями у вищих наближеннях, використавши для цього методологічно обґрунтований метод багатомасштабних наближень та засоби пакетів символічних обчислень.
- Виявити умови модуляційної стійкості хвильового руху в залежності від геометричних та фізичних параметрів гідродинамічної системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» з урахуванням сил поверхневого натягу на поверхнях контакту.
- Виявити нові фізичні закономірності та ефекти, характерні для внутрішніх хвиль тришарової напівнескінченної рідкої системи, оцінити перспективи практичного застосування теоретичних результатів, зокрема, оцінити енергію, яку переносять внутрішні хвилі, виявити особливості форми хвильових пакетів та умови проходження внутрішніх хвиль.

Об'єкт дослідження – хвильові процеси у рідких стратифікованих середовищах.

Предмет дослідження – моделювання хвильових пакетів у тришаровій напівнескінченній гідродинамічній системі з твердою кришкою.

Методи дослідження. При дослідженні умов поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі було використано такі методи: метод багатомасштабних розвинень, метод порівняння, метод аналізу та синтезу, комп'ютерне моделювання.

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Побудовано перші три наближення математичної моделі нової слабконелінійної задачі про поширення хвиль у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» з урахуванням поверхневого натягу на поверхнях контакту.
2. Отримано дисперсійне співвідношення першого наближення слабконелінійної задачі, виявлено дві пари коренів, проведено аналіз умови проходження внутрішніх хвиль у даній тришаровій системі. Виявлені якісні та кількісні характеристики взаємодії внутрішніх хвиль у першому наближенні.
3. В пакеті символьних обчислень Maple створено програмний код, для виведення основних аналітичних виразів у другому і третьому наближенні та знаходження невідомих коефіцієнтів у розв'язках.
4. Отримано умову розв'язності другого наближення та його розв'язки. Проведено аналіз форм хвильових пакетів на основі отриманих значень амплітуд другої гармоніки. Виявлено умови змін їхньої форми, які виникають у момент встановлення балансу між нелінійністю та дисперсією, зокрема, області гасіння другої гармоніки та області істотного впливу другої гармоніки на форму поверхні контакту.
5. Виявлені характерні особливості резонансу другої гармоніки, що дало змогу визначити область застосування методу багатомасштабних розвинень до задачі про поширення хвильових пакетів в тришаровій системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою».
6. Виведено еволюційні рівняння для обвідних хвильового пакета на поверхнях контакту у рамках слабконелінійної моделі рідкої системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» у вигляді нелінійних рівнянь Шредінгера на основі дисперсійного співвідношення та умов розв'язності задачі другого і третього наближення.
7. Вперше виявлено та чисельно досліджено умову стійкості гравітаційно-капілярних хвиль у задачі про поширення хвильових пакетів, що розглядається. Виявлено суттєвий вплив поверхневого натягу на поверхнях контакту на

області модуляційної стійкості. Зокрема, у випадку відсутності поверхневого натягу на обох поверхнях контакту, спостерігається збільшення площі області модуляційної нестійкості зі збільшенням значення товщини верхнього шару, чого не спостерігалось для випадку наявності поверхневого натягу хоча б на одній із поверхонь контакту або обох одночасно.

8. Проведено аналіз потоку енергії хвильового руху в залежності від параметрів системи. Виявлено, що енергія гравітаційних хвиль зростає зі збільшенням товщини верхнього шару лише до певного значення, подальше збільшення товщини вже не має істотного впливу на енергію.

Практичне значення отриманих результатів. Хоча результати дисертаційної роботи і носять теоретичний характер, проте в них, в значній мірі, враховані сучасні проблеми моделювання хвильових процесів, які виникають в практичній діяльності, зокрема таких, які виникають в океані з шаруватою структурою за наявності льодового покриття. Як відомо, такі явища можна спостерігати поблизу гирла річок, а також у відкритому океані в областях, суміжних з термокліном. Вивчення впливу поверхневого натягу має практичне застосування у розробках нових технологій з використанням незмішуваних шаруватих середовищ, що має перспективу застосування у створенні інноваційних рішень для різних галузей прикладної науки.

Дисертаційну роботу було виконано в рамках наукового дослідження «Прикладна математика у дослідженні складних систем з детермінованими та стохастичними процесами» (номер державної реєстрації 0116 U 005271), здійсненого у ЦДПУ ім. В. Винниченка, та у межах індивідуального плану роботи аспіранта. Окремі результати дисертаційного дослідження впроваджено в освітньому процесі ЦДПУ ім. В. Винниченка та НДУ ім. М. Гоголя (Додаток Г).

Особистий внесок здобувача. В дисертаційній роботі, всі теоретичні та аналітичні результати, а також розробка комп'ютерних програм належать особисто автору. Із спільних публікацій [4]-[9], [14], [33], [64], [65] у дисертаційну роботу включені результати теоретичного характеру, отримані

автором: постановки задач, їхні аналітичні та чисельні методи розв'язання, результати їхньої реалізації на комп'ютері, аналіз закономірностей і нових механічних ефектів. У публікаціях [9] та [65], присвячених дослідженню першого наближення слабконелінійної задачі, автору належать аналітичні та чисельні розрахунки, постановку задачі та аналіз закономірностей і нових механічних ефектів виконано у співавторстві з Наратовим В. В. Науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, професору Авраменко О. В. належать загальний задум проведення досліджень та загальна постановка проблеми.

Апробація результатів дисертації. Викладені в роботі результати були обговорені в різний час на таких наукових конференціях і семінарах: «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 25-26 квітня 2017 р.), XII Всеукраїнська студентська наукова конференція «Сучасні проблеми фізико-математичних наук та методики їх викладання» (Ніжин, 27-29 квітня 2017 р.), XIII Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання» (Ніжин, 26-27 квітня 2018 р.), «Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (Харків, 15-16 березня 2019 р.), XV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання» (Ніжин, 4-5 грудня 2019 р.); результати дослідження неодноразово обговорювались на семінарі «Математика, її застосування та викладання» (Центральноукраїнський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи викладено у 11 наукових працях: 5 статей у виданнях, включених МОН України до переліку наукових фахових для спеціальності 113 Прикладна математика, одна з яких перевидана у зарубіжному науковому періодичному виданні (США); 6 наукових праць у збірниках наукових доповідей, оприлюднених на міжнародних та всеукраїнських науково-практичних конференціях та інших

виданнях. Серед названих вище статей 3 опубліковані у виданнях, внесених до міжнародної наукометричної бази Scopus.

Структура роботи. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, трьох розділів, висновків і списку використаних джерел із 125 найменувань та додатків. Загальний обсяг дисертації – 125 сторінок, 44 рисунки.

Основний зміст роботи

У вступі обґрунтовано вибір теми дисертації, сформульовано мету та завдання роботи, відзначено новизну, теоретичне та практичне значення роботи. Сформульовано положення, що виносяться на захист. Надано короткий зміст роботи за розділами.

В першому розділі розглянуто основні етапи розвитку та сучасний стан проблеми поширення хвиль у гідродинамічних системах з неоднорідною структурою, як у теоретичному плані, так і у плані застосування результатів до практичних цілей, подано обґрунтування напрямку дослідження, яке базується на наведених фізико-математичних моделях та математичних методах розв'язування задач поширення хвиль у гідродинамічних та гідропружних системах з неоднорідностями.

В другому розділі досліджується нелінійне поширення хвильових пакетів вздовж поверхонь контакту тришарової гідродинамічної системи з врахуванням сили поверхневого натягу. Застосовано метод багатомасштабних розвинень до третього порядку, отримано наближення першого та другого порядку, дисперсійне співвідношення та умову розв'язності лінійної задачі у другому наближенні. Здійснений граничний перехід тришарової гідродинамічної системи у двошарову, в результаті чого всі вирази вироджуються в отримані раніше для системи «півпростір – шар з твердою кришкою». Досліджено питання форми пакету, напряму поширення та умови резонансу другої гармоніки.

У третьому розділі отримано наближення третього порядку та умову розв'язності лінійної задачі у третьому наближенні. Виведені еволюційні рівняння у третьому наближенні для обвідних хвильових пакетів. Проведено

повний аналіз стійкості хвильових рухів для фіксованих значень товщини верхнього шару в залежності від поверхневого натягу. Побудовано діаграму модуляційної стійкості обвідних хвильових пакетів. Еволюційні рівняння записано у формі нелінійного рівняння Шредінгера. Виконано дослідження потоку енергії внутрішніх хвиль.

У висновках сформульовані основні теоретичні результати та окреслено практичне застосування моделювання хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою».

Автор висловлює щире подяку своєму науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, професору Авраменко Ользі Валентинівні за постійну увагу до роботи, цінні поради та пропозиції, що сприяли успішному проведенню досліджень.

РОЗДІЛ 1.

ЗАГАЛЬНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ З ШАРУВАТОЮ СТРУКТУРОЮ

У першому розділі представлено основні результати досліджень поширення внутрішніх та поверхневих хвиль у гідродинамічних системах, результати експериментів та натурних спостережень, а також внесок вітчизняних науковців у дослідження поширення хвиль у неоднорідних рідких системах. Наведено математичні постановки основних моделей хвильових рухів у гідродинамічних системах з неоднорідною структурою та методи їх дослідження.

1.1. Основні результати досліджень поширення хвиль у шаруватих гідродинамічних системах та результати експериментів і натурних спостережень

Основи теорії хвиль, зокрема теорії нелінійних хвиль, були закладені ще у ХІХ столітті і головним чином пов'язані з задачами газо- та гідродинаміки. Так, наприклад, роботи Дж. Скотта Раселла [106], який першим спостерігав солітони на поверхні рідини, відносяться до 1830-1840-х рр., а рівняння Кортевега-де-Вріза, яке становить основу математичного опису солітонів, було отримано в 1895 р. [93]. Нелінійні хвильові явища були предметом дослідження багатьох видатних вчених, таких як Стокс [112], Релей [103], Буссінеск [72], Ріман [104].

Проте бурхливий розвиток теорії нелінійних хвильових процесів припав на другу половину ХХ століття і пов'язаний з розвитком обчислювальної техніки, яка дозволила безпосередньо підійти до пошуку розв'язків рівнянь в частинних похідних, які описують поширення хвиль у різних середовищах. Ще одним важливим поштовхом стало створення потужного математичного апарата, що дозволило здійснювати точні аналітичні виведення ряду нелінійних рівнянь в частинних похідних.

Нижче наведемо окремі роботи, опубліковані останнім часом.

Дослідження у рамках моделі мілкої води проведено в роботах [73], [90], де виведено рівняння еволюції для нелінійних хвиль в двошаровій та тришаровій системах рідин з різною густиною. Показано, що механізм нестійкості виявляється як нестійкість типу Кельвіна-Гельмгольца, подібна до моделі МСС (Miyata, Choi, and Camassa) з двома шарами. Сильнонелінійна тришарова модель розглядається у рамках теорії мілкої води, що у даному випадку є виправданим, але при зміні співвідношення геометричних параметрів виникає потреба у заміні моделі на більш складну.

Поодинокі хвилі Россбі досліджувались у багатьох роботах. Наведемо деякі з них: у [85] у рамках побудованої моделі отримані локальні закони збереження і аналітичні розв'язки та з використанням чисельного моделювання проведено дослідження проблеми генерації та еволюції поодиноких хвиль під дією зовнішнього джерела; у [86] встановлено, що еволюційне рівняння для амплітуди хвилі задовольняє дисипативні рівняння Бусінеска; у [88] методом багатьох масштабів досліджено вперше отримане рівняння Бенджаміна-Оно-Бургерса-МКДВ, яке описує алгебраїчні поодинокі хвилі Россбі в стратифікованій рідині та встановлено, що маса, імпульс та енергія алгебраїчних хвиль Россбі зберігаються при відсутності розсіювання.

Дослідження гравітаційних та гравітаційно-капілярних хвиль проводилось, зокрема, у роботах [76], [77] та [78], де представлені дослідження поверхневих гравітаційних або гравітаційно-капілярних хвиль у рідинах, як скінченної глибини, так і глибокої води.

Наведемо деякі роботи, присвячені дослідженню внутрішніх хвиль. Зокрема, в роботі [71] представлені асимптотичні моделі поширення внутрішніх хвиль на поверхні контакту між двома шарами рідини різної густини з твердою кришкою і плоским дном. Отримано різні асимптотичні моделі шляхом розширення нелокальних операторів відносно відповідних малих параметрів, які різним чином залежать від співвідношення амплітуди, довжини хвилі та співвідношення глибини двох шарів. У роботі [125] досліджуються внутрішні хвилі, що поширюються над хребтом в двошаровій

рідині, розглянуто три типи взаємодії. Виявлено, що різні типи взаємодії хвиль та хребта пов'язані з модифікованим ступенем блокування. Встановлено, що максимальна швидкість хвилі, втрати енергії та амплітуди хвиль мають самоподібну характеристику зі ступенем блокування. Нову негідростатичну модель океану з ізопікальною по вертикалі координатною системою представлено в [116]. Мотивація введення такої системи полягає у належному врахуванні негідростатичної дисперсії та дослідженні формування нелінійних внутрішніх поодиноких хвиль. Розгляд такої моделі з точки зору обчислень є кращим, оскільки дає змогу використовувати меншу кількість вузлів сітки і усуває втрати обчислення амплітуди поодиноких хвиль. Продемонстровано, що дана модель здатна описувати нелінійні внутрішні поодинокі хвилі для спрощених фізично-реалістичних задач океану.

Дослідженням систем з вільною поверхнею присвячені наступні публікації. У роботі [89] проводиться теоретичне вивчення хвиль у двошаровій системі з вільною поверхнею. Використано лагранжевий підхід для опису хвильових рухів в системі. З використанням пакетів символьних обчислень отримано розв'язок до п'ятого порядку. В рамках отриманих розв'язків досліджено дрейф та частоти хвиль. Виконано порівняння чисельних розв'язків рівнянь Лагранжа та Ейлера у баротропному випадку, на основі якого продемонстровано кращу збіжність розв'язків рівняння Лагранжа.

У статті [113] отримано нову систему рівнянь типу Буссінеска для дослідження взаємодії між довгими нелінійними хвилями в двошаровій рідині скінченної глибини. На основі отриманих рівнянь розроблена аналітична модель для вивчення еволюції резонансної тріади, яка складається з поверхневої хвилі та двох субгармонійних внутрішніх хвиль. Розглянуто хвильове затухання, що пов'язане зі слабкою в'язкістю рідин. Встановлено, що у в'язких рідинах амплітуди поверхневих хвиль повинні бути більшими за деяке критичне значення, щоб подолати згасання та викликати внутрішні хвилі-відгуки. Досліджено залежність критичної амплітуди, а також швидкості

зростання і затухання внутрішніх хвиль від глибини, щільності та відношення в'язкості рідких шарів, амплітуди та частоти поверхневої хвилі.

Дисперсійний аналіз поверхневих хвиль, які виникають на поверхні контакту рідини та однорідного пружного тіла, проведено в роботі [105]. Аналіз здійснюється шляхом знаходження коренів секулярного рівняння та дослідження фізичного змісту. Проведено повний аналіз дисперсії, з особливим фокусуванням на діапазоні частот, в якому фазова швидкість зсувних хвиль вища, ніж швидкість хвиль рідини.

В роботі [117] досліджується задача про коливання поверхні контакту двох незмішуваних в'язких нестисливих рідин над жорстким дном в гравітаційному полі. Доводиться коректність задачі, як з урахуванням поверхневого натягу, так і без нього. Розглянуто випадок, коли рідина з більшою густиною знаходиться зверху. Встановлено, що в такому випадку нестійкість Релея-Тейлора стабілізується за рахунок значного поверхневого натягу.

Робота [87] присвячена дослідженню розсіювання лінійних хвиль у періодичних багат шарових середовищах. Чисельно розв'язано рівняння Гельмгольца з використанням методу збурення високого порядку. Отримані результати чисельного моделювання показують спектральну збіжність запропонованого методу.

Стаття [62] присвячена дослідженню періодичних хвиль, що біжать на границі контакту між двома рідкими шарами постійної густини, включаючи хвилі з перевернутими гребінцями. Дослідження таких хвиль проводиться у припущенні неперервності за фізичними параметрами: числами Бонда та Етвуда, а також середнім зсувом. Розглядаються різні випадки з використанням граничного методу продовження, які ілюструють критерії застосування глобальної теореми біфуркації Амброуза. Окреслюється зв'язок між другою гармонікою Стокса поширення хвиль та формою біфуркаційних поверхонь.

У роботі [97] досліджується новий альтернативний тип еволюційного рівняння, який описує поширення хвиль в двошаровій системі у вигляді рівняння Бенджаміна-Оно вищого порядку.

Дослідження [110] присвячено вивченню поширення хвиль в тришаровій системі «шар армованого волокна – пористий поперечно-пружний шар – в'язкопружний півпростір». На основі рівняння швидкості руху рідини, отриманого в аналітичній замкнутій формі, виявлено суттєвий вплив параметрів на фазову швидкість поширення хвиль. Отримана модель тестувалась для системі, що складається з верхнього армованого волокном шару епоксидної смоли, поперечно-пружного шару пісковика та в'язкопружного півпростору.

Значний внесок у розвиток фізики плазми, теорії поширення хвиль в нелінійних середовищах, хвиль на воді зробив радянський фізик-теоретик Захаров В. Є, який відкрив явище колапсу ленгмюрових хвиль в плазмі, створив теорію слабкохвильової турбулентності та знайшов точні розв'язки кінетичних хвильових рівнянь (спектр Колмогорова-Захарова) [121] та на основі цього побудував аналітичну теорію вітрового коливання в океані.

В монографії [38], написаній групою науковців під керівництвом Овсяннікова В. Л., представлені результати дослідження нелінійної теорії поверхневих та внутрішніх хвиль у стратифікованій рідині, апробовано метод Лагранжа на конкретних прикладах. Доведено теорему існування єдиного розв'язку задачі Коші-Пуассона, наведено обґрунтування наближених теорій – лінійної і мілкої води, виведені асимптотичні формули для параметрів лінійних хвиль, які виникають від довільного рухомого джерела у стійкому стратифікованому середовищі. Використані оригінальні експериментальні дані про рух двошарової рідини для апробації теоретичних положень.

Бреховских Л. М. [11] виконав значні теоретичні дослідження про поширення звуку та радіохвиль в шаруватих неоднорідних середовищах і, зокрема, в океані. Ним вперше була створена теорія поширення звуку у підводному звуковому каналі, вирішено питання про фокусування хвиль неоднорідними середовищами, розроблено ефективний метод розрахунку акустичного поля у хвилеводах, якості яких змінюються вздовж траси тощо.

Тарапов І. Є. розробив математичну модель гомогенного ізотропного середовища, яка взаємодіє з електромагнітним полем, для загальних законів

поляризації та намагнічування. Ним був сформульований варіаційний принцип для ізотропних середовищ, визначені інтеграли руху, проведено теоретичне дослідження хвильових процесів, вивчені рівноважні конфігурації магнітної рідини та їхня стійкість, досліджено електроконвективну стійкість слабкопровідних рідин. Ці та інші дослідження лягли в основу монографії [36].

Основу теорії хвиль складають методи математичного моделювання і результати якісного аналізу моделей, методи вивчення асимптотичних форм руху, урахування балансу сили і енергії. В описі хвиль задіяні їхні відносні висота і довжина, дисперсійне співвідношення, імпульс і енергія, що переносяться хвилями, та інші параметри, які виявляють ті чи інші властивості. Ряд критеріїв подібності дозволяє вивчати хвильові рухи стратифікованої рідини експериментально у природних або штучних каналах і водоймах.

Далі наведемо стислий огляд експериментальних досліджень та натурних спостережень.

Експериментальне спостереження внутрішніх припливів та близьких до них внутрішніх хвиль у Південно-Китайському морі описано в роботах [63, 94, 68, 123, 124], де зібрано та статистично оброблено дані спостережень та показано сезонні зміни кінетичної енергії досліджуваних хвильових рухів та інших фізичних параметрів.

У дослідженні [80] описується новий метод визначення параметрів внутрішніх хвиль за SAR-зображенням. Тестування нового методу проводилися в Південно-Китайському морі, де досліджувалися амплітуди та фазові швидкості внутрішніх хвиль. Реальні дані було співставлено з даними, отриманими з використанням нового методу аналізу SAR-зображень. Середньоквадратична та відносна похибки становлять 1% та 7% відповідно, що свідчить про застосовність нового методу.

У статті [83] досліджуються внутрішні хвильові рухи, які спостерігалися в Середземному морі на значній глибині. Такі хвильові рухи є незвичними для цього моря. Встановлено, що причини виникнення таких хвиль пов'язані з кліматичними змінами.

Концепцію збереження потоку енергії для внутрішніх хвиль, що поширюються в неоднорідній воді на мілководді, було детально розглянуто у роботі [96]. Автором зроблено акцент на застосуванні рівняння Кортевега-де Вріза (KdV) у заданій формі коноїдальних та одиноких хвиль. Продемонстровано збільшення висоти хвилі та зменшення фазової швидкості за умови невеликого значення глибини води. Встановлено особливості динаміки внутрішніх хвиль у натурних умовах, детально вивчені кінематичні критерії розриву і визначені критичні висоти внутрішніх хвиль. Чисельне моделювання було застосовано для мілководдя південного Балтійського моря, що є важливим підґрунтям для подальшого дослідження енергетичних характеристик хвильового процесу у гідродинамічних шаруватих системах скінченої або нескінченої глибини.

Робота [111] присвячена експериментальному дослідженню утворення гармонійних хвиль внаслідок взаємодії внутрішніх хвиль. Встановлено, що при зіткненні двох нерезонансних внутрішніх хвиль утворюються гармоніки за сумою та різницею кратних частот зіткнення хвиль. Експериментально виявлено явище передачі відносної кінетичної енергії від нерезонансних хвиль до утворених гармонік після зіткнення.

Отже, стрімкий розвиток технологій та удосконалення математичного апарата дозволив науковцям усього світу проводити не лише теоретичні дослідження нелінійних хвильових процесів у шаруватих рідинах, а також здійснювати складні експерименти та натурні спостереження. З наведеного вище огляду випливає, що на даний час виникла необхідність більш повного висвітлення особливостей хвильових явищ, зокрема, втрати та передачі енергії у тришарових гідродинамічних системах.

1.2. Внесок вітчизняних науковців у дослідження поширення внутрішніх та поверхневих хвиль у неоднорідних рідких системах

Активне дослідження хвильових процесів у різноманітних гідродинамічних системах проводилося в СРСР та отримало продовження в

роботах багатьох дослідників в Україні. Зокрема, у роботах Черкесова Л. В. досліджується поширення внутрішніх та поверхневих хвиль в однорідній та неоднорідній системах, що, в залежності від низки параметрів, приводить до теорії мілкої води [12, 45]. Ним було досліджено вплив в'язкості на рух гравітаційних хвиль у двошаровій гідродинамічній системі з вільною поверхнею та з кришкою. Також помітним є те, що значна кількість публікацій Черкесова Л. В. присвячена дослідженням впливу параметрів атмосферних збурень на хвилі та течії в Азовському морі. Зокрема, в роботах [21, 22, 23, 24] з використанням нелінійної тривимірної σ -координатної моделі досліджуються динамічні процеси в Азовському морі, що виникають під дією постійних і прогностичних циклонних збурень з урахуванням і без урахування водообміну через Керченську протоку. Знайдено залежності величин згонів, нагонів і характеристик еволюції областей забруднення від інтенсивності атмосферних збурень. Показано, що спільна дія постійного вітру та вітру прогностичної моделі SKIRON призводять до істотного збільшення площі поширення пасивних домішок та часу їх розсіювання в порівнянні з дією лише стаціонарних течій.

Дослідженням хвиль типу цунамі та хвиль-убивць присвячені роботи Доценка С. Ф. Так у роботі [17] проведено аналіз аномальних вітрових хвиль з використанням даних спостережень в північно-західній частині Чорного моря, а в роботі [18] за допомогою методу скінченних різниць виконано аналіз розповсюдження хвиль цунамі при переході з басейну в прямолінійний канал сталого прямокутного поперечного перерізу. Дослідження проводилось в рамках нелінійної теорії.

Редчиц Д. О. та Гуржій О. А. в роботі [46] проводили дослідження нестационарного обтікання кругового циліндра, що обертається, із застосуванням нестационарного рівняння Нав'є-Стокса нестисливої рідини та чисельного алгоритму, який базується на методі штучної стисливості, неявній тришаровій схемі другого порядку з підітераціями при інтегруванні за часом, різницевої схемі третього порядку з розщепленням векторів потоків для

конвективних членів і центрально-різницевої схемі при інтегруванні в'язких членів. Проаналізовано профілі швидкості, поля завихренності, розподіл коефіцієнтів тиску й тертя по поверхні циліндра, коефіцієнти лобового опору й підйимальної сили при ламінарному режимі обтікання.

У роботі Ольховського Р. В. та Стеценка О. Г. [39] запропоновано підхід до розрахунку просторового поля внутрішніх хвиль за тілом, що рухається в слабконестаціонарному режимі на фіксованому горизонті. Даний підхід ґрунтується на локально-двовимірному характері такого поля внутрішніх хвиль для випадку рівномірного і прямолінійного руху на фіксованому горизонті в режимі великих значень числа Фруда. Отриманий результат дозволяє суттєво спростити розрахунок поля внутрішніх хвиль за нестационарним рухомим тілом та може бути використаний для розв'язування задачі у випадку, коли тіло рухається просторовою траєкторією, дотичні до якої мають малий кут нахилу до горизонту.

У роботах Стеценка О. Г. [54, 55] розв'язана лінійна задача про нестационарний рух зі стану спокою плоского точкового вихору в стратифікованому середовищі скінченної товщини. Розв'язок одержано у вигляді квадратур. Розглянуто два режими руху, коли вихор рухається горизонтально зі сталою швидкістю у початковий момент та такого ж руху з накладеним на нього стаціонарним періодичним поперечним рухом. Проаналізовано особливості формування амплітудної картини збурень та характер зміни потужності, яка затрачується вихором на випромінювання енергії внутрішніх хвиль.

Поверхневі хвилі досліджувались Стеценком О. Г. та Ільченком В. М. в роботах [56, 26], де розглянута лінійна задача генерації та еволюції хвиль та затухаючих збурень на вільній поверхні каналу для різних форм поперечного перерізу при стаціонарному русі області поверхневого тиску прямокутної форми. Для знаходження розв'язку, для потенціалу швидкостей, використано змінену систему координат, інтегральне перетворення за поздовжною координатою та розвинення у ряд Фур'є за поперечною координатою. У

результаті виконаних розрахунків проаналізовано особливості формування та структуру корабельних (баричних) хвиль у залежності від режиму руху та характеристик рухомої області.

Дослідження Константинова О. В. та Лимарченка О. С. присвячені вивченню різних хвильових рухів рідини в резервуарах та оболонках. Так, у роботах [30, 31] досліджуються нелінійні коливання механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» під дією горизонтальної гармонійної сили. На основі проведених досліджень показано, що вихід системи в класичному сенсі на усталений режим коливань не відбувається. Що було підтверджено експериментальними результатами. Також указано ступінь впливу поверхневого натягу і дисипації на білярезонансний режим коливань системи, а моделювання на основі більш повної моделі показав наявність багаточастотного динамічного процесу, вплив високочастотних форм коливань, зміщення частот антисиметричних форм коливань.

Поздеев В. А. та Ковальов В.Г. [29] запропонували при розв'язуванні початково-крайової задачі з рухомими межами для лінійного хвильового рівняння в загальному випадку використати інтеграл Коші-Лагранжа, враховуючи дві квадратичні складові. Авторами показано, що при малій швидкості розширення циліндричної порожнини з нульовим початковим радіусом основною складовою є квадрат швидкості, а при збільшенні швидкості розширення зростає внесок другої складової. Для плоских хвиль на початку розширення порожнини з ненульовим початковим радіусом і в дальній зоні можна користуватись лінійним інтегралом, оскільки сума квадратичних складових дорівнює нулю.

Пацегон М. Ф. в [40, 41, 42, 43, 101, 102] досліджував хвильові процеси в намагніченому середовищі. Зокрема, задачу про локальну термодинамічну стійкість багатокомпонентних середовищ, що ізотропно намагнічуються. Ним був запропонований метод дослідження одновимірних рухів магнітних середовищ шляхом зведення проблеми до аналогічної задачі ефективних середовищ зі спеціальними рівняннями стану за умови відсутності поля.

Значна кількість досліджень в біомеханіці належить Кизилівій Н. М. Коло її наукових інтересів охоплює такі галузі, як аерогідромеханіка [107, 108], хвилі тиску в трубках, заповнених рідиною [81, 92, 27, 59, 60], течії рідин в навколишньому середовищі [18, 30], стійкість течії рідини в піддатливих трубках [74, 82, 61].

Сучасні проблеми теорії дифракції хвиль були висвітлені в монографії [35] Селезова І. Т. та Кривоноса Ю. Г. Розглянуто, зокрема, задачі теорії розсіювання гідродинамічних, електромагнітних, магніто-акустичних та пружних хвиль локальними неоднорідностями в необмежених та напівобмежених областях. Наведено аналітичні та чисельні методи розв'язування задач.

Задача про поширення хвильових пакетів на поверхні контакту рідкого півпростору і рідкого шару над ним вивчалась Селезовим І. Т. і Авраменко О. В. у [47, 48, 49, 50]. Цими авторами досліджувалась проблема стійкості хвильових пакетів в системі «півпростір – шар з твердою кришкою» методом багатомасштабних розвинень до третього порядку. Зокрема, виведене еволюційне рівняння для хвильових чисел близьких до критичного та досліджено стійкість розв'язків указаних рівнянь, а також розглянуті різні аспекти четвертого наближення проблеми еволюції нелінійних хвильових пакетів, досліджені області резонансу другої гармоніки, напрямок поширення хвиль, форма хвильового пакету в даній системі.

Дослідження хвильових процесів у шаруватих гідродинамічних системах отримало продовження в роботах Авраменко О. В. та Гуртового Ю. В. [10, 52, 53] і Нарядового В. В. [66, 67, 109, 2, 3,], де методом багатомасштабних розвинень були отримані еволюційні рівняння обвідних на поверхнях контакту рідких шарів у формі нелінійного рівняння Шредінгера, досліджено особливості модуляційної стійкості, а також проаналізовано вплив геометричних та фізичних параметрів на енергетичні та інші характеристики системи.

Наведений огляд показує лише невелику частину наукового доробку українських науковців у дослідження хвильових процесів у різноманітних нелінійних системах. На сьогоднішній день напрацьована велика кількість, як теоретичного матеріалу так і практичних результатів в галузі нелінійних хвильових процесів, тому є необхідність систематизованого опрацювання накопиченого досвіду та застосування його з метою поглиблення дослідження на нові системи.

1.3. Методи розв'язування нелінійних задач та фізико-математичні моделі систем з неоднорідною структурою

Для дослідження математичних моделей хвильового руху у стратифікованих гідродинамічних системах, які описуються сукупністю нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, використовуються різноманітні наближені методи. Розглянемо деякі з них.

Метод Ланранжевих наближень був використаний та обґрунтований Овсянніковим В. Л. у монографії [38] і застосовувався до задач про поширення хвиль у однорідній та неоднорідній рідині.

Метод скінченних різниць і один із його різновидів метод Годунова, який був запропонований у [13] для дослідження та розрахунку ударних хвиль.

Лимарченко О. С. запропонував використати варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського при розв'язуванні задачі про коливання двошарової рідини в рухомому резервуарі. Цей метод дозволив виключити кінематичні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні, спростивши математичну постановку задач [32].

Серед великої кількості чисельних методів, що використовуються при дослідженні хвильових рухів, особливе місце займають асимптотичні методи, до яких, зокрема, відноситься і метод багатьох масштабів. Даний метод використовується для отримання нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ) (та інших рівнянь для обвідної).

Суть методу полягає в тому, що для визначення наближеного розв'язку задачі поширення хвильових пакетів для малих, але скінченних амплітуд, невідомі функції руху рідини та відхилення поверхні контакту представлено у вигляді [99]

$$\varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^k \varepsilon^n \varphi_{jn}(x_0, \dots, x_{k-1}, z, t_0, \dots, t_{k-1}) + O(\varepsilon^{k+1}), \quad (j=1,2) \quad (1.1)$$

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^k \varepsilon^n \eta_n(x_0, \dots, x_{k-1}, t_0, \dots, t_{k-1}) + O(\varepsilon^{k+1}), \quad (1.2)$$

де ε – малий безрозмірний параметр, $x_i = \varepsilon^i x$, $t_i = \varepsilon^i t$.

Дослідження внутрішніх та поверхневих хвиль у стратифікованих рідинах, які виникають під дією сил тяжіння та поверхневого натягу, проводиться з огляду на дві основні наближені теорії хвиль: теорію хвиль нескінченно малої амплітуди, яка припускає, що амплітуда хвиль є малою у порівнянні з довжиною, та теорію мілкої води, яка припускає малість глибини рідини у порівнянні з довжиною хвилі.

Розглянемо деякі моделі, для дослідження яких був використаний метод багатомасштабних розвинень.

Найфе [99] розглядав задачу про поширення хвильових пакетів вздовж поверхні контакту двох напівобмежених рідких середовищ $\Omega_1 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, z < 0\}$ та $\Omega_2 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, z \geq 0\}$. Постановка задачі має вигляд (рис. 1.1):

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \text{ у } \Omega_j, \quad j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ на } z = \eta(x, t), \quad j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1 - \rho)\eta + 0.5(\nabla \varphi_1)^2 - 0.5\rho(\nabla \varphi_2)^2 - \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right)^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{на } z = \eta(x, t),$$

$$|\nabla \varphi_j| \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty.$$

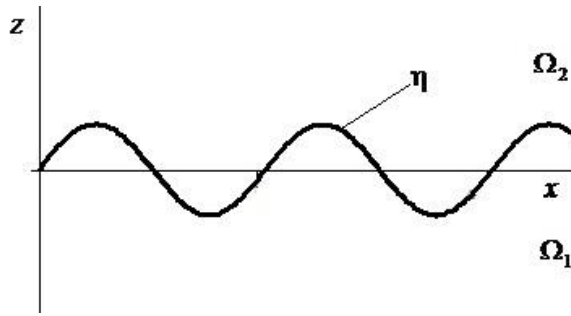


Рис. 1.1. Схематичне зображення системи «півпростір - півпростір»

Селезов І. Т. та Авраменко О. В. досліджували задачу про поширення хвильових пакетів в гідродинамічній системі «півпростір – шар з кришкою» [51]. Математична постановка задачі про поширення хвильових пакетів вздовж поверхні контакту $z = \eta(x, t)$ двох рідких середовищ $\Omega_1 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, z < 0\}$ та $\Omega_2 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, 0 \leq z < h\}$ має вигляд (рис. 1.2):

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \text{ у } \Omega_j, j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ на } z = \eta(x, t), j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1 - \rho)\eta + 0.5(\nabla \varphi_1)^2 - 0.5\rho(\nabla \varphi_2)^2 -$$

$$-T \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \text{ на } z = \eta(x, t),$$

$$|\nabla \varphi_1| \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h.$$

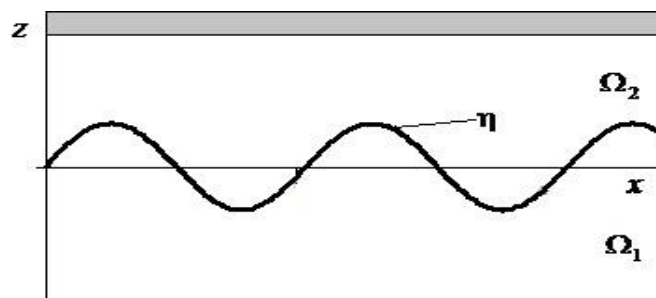


Рис. 1.2. Схематичне зображення системи «півпростір – шар з кришкою»

Авраменко О. В. та Гуртовий Ю. В. досліджували проблему поширення хвильових пакетів вздовж поверхні контакту двох рідких шарів $\Omega_1 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$ та $\Omega_2 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ [16]. Математична постановка проблеми поширення хвильових пакетів в гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з кришкою» була виконана в наступному вигляді (рис. 1.3):

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \text{ у } \Omega_j, j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ на } z = \eta(x, t), j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1 - \rho)\eta + 0.5(\nabla \varphi_1)^2 - 0.5\rho(\nabla \varphi_2)^2 -$$

$$-T \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \text{ на } z = \eta(x, t),$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_1,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_2.$$

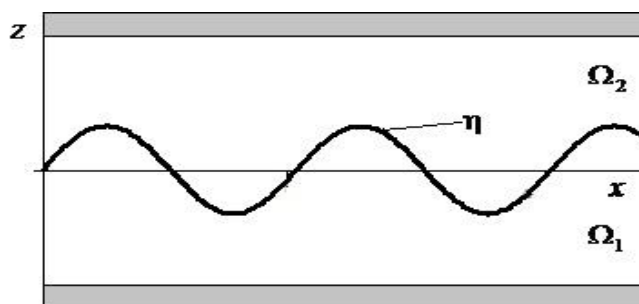


Рис. 1.3. Схематичне зображення системи «шар з твердим дном – шар з кришкою»

Авраменко О. В. та Наратовий В. В. досліджували задачу про поширення двовимірних хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні рідкого шару $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$ з густиною ρ_1 та верхнього рідкого шару $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ з густиною ρ_2 [66], які розділені поверхнею

контакту $z = \eta(x, t)$, при цьому верхній шар згори обмежений вільною поверхнею $z = \eta_0(x, t)$. Математична постановка задачі має наступний вигляд (рис. 1.4):

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \text{ у } \Omega_j, j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \text{ при } z = \eta(x, t), j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = - \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \text{ при } z = \eta_0(x, t),$$

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g(\rho_1 - \rho_2)\eta + \frac{1}{2}\rho_1(\nabla \varphi_1)^2 - \frac{1}{2}\rho_2(\nabla \varphi_2)^2 -$$

$$-T \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \text{ при } z = \eta(x, t),$$

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g\rho_1\eta_0 + \frac{1}{2}\rho_1(\nabla \varphi_2)^2 - T_0 \left(1 + \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} = 0 \text{ при } z = \eta_0(x, t),$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_1.$$

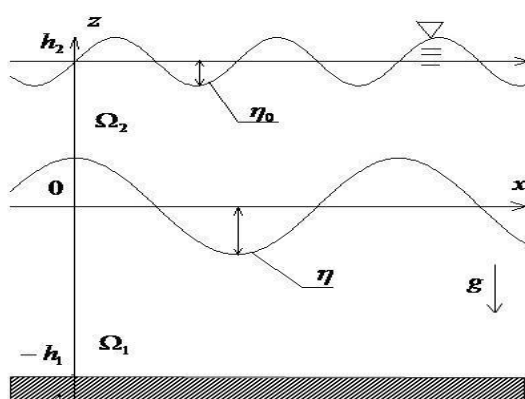


Рис. 1.4. Схематичне зображення системи «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею»

Останнім часом почали з'являтися дослідження тришарових гідродинамічних систем. Так, наприклад, в статті [98] розглядається тришарова

система «шар з твердим дном – шар – шар з твердою кришкою». Її математична постановка має вигляд (рис.1.5):

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \text{ у } \Omega_j, j=1,2,3;$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \text{ при } z = \eta_1(x,t), j=1,2,$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \text{ при } z = h_2 + \eta_2(x,t), j=2,3;$$

$$\rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g(\rho_1 - \rho_2)\eta_1 + \frac{1}{2}\rho_1(\nabla \varphi_1)^2 - \frac{1}{2}\rho_2(\nabla \varphi_2)^2 -$$

$$-T_1 \left[1 + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = 0 \text{ при } z = \eta_1(x,t),$$

$$\rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + g(\rho_2 - \rho_3)\eta_2 + \frac{1}{2}\rho_2(\nabla \varphi_2)^2 - \frac{1}{2}\rho_3(\nabla \varphi_3)^2 -$$

$$-T_2 \left[1 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} = 0 \text{ при } z = h_2 + \eta_2(x,t);$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_1;$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_2 + h_3;$$

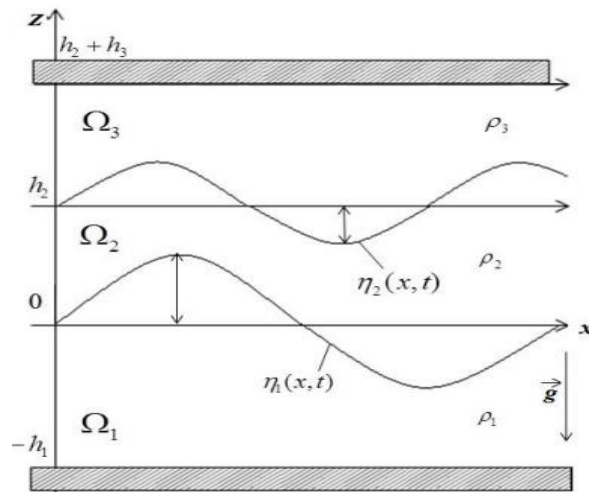


Рис. 1.5. Схематичне зображення системи «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою»

У наведених вище моделях ϕ_j ($j=1,2,3$) – потенціали швидкостей рідких середовищ, $\rho = \rho_2/\rho_1$ – відношення густин шарів, T – коефіцієнт поверхневого натягу на поверхні контакту.

Переваги методу багатьох масштабів полягають у можливості отримати в явному вигляді складові розв'язку у першому та другому наближеннях, а також умови розв'язності задач вищих наближень, що дозволяє вивести еволюційні рівняння. Застосування даного методу до класу задач про дослідження хвильових процесів у багат шарових гідродинамічних системах дає можливість дослідити форму та структуру хвильового пакету, умови проходження хвиль, стійкість хвильових пакетів та інші характеристики хвильового руху. До недоліків можна віднести громіздкість аналітичних перетворень. Проте останнім часом, із використанням пакетів символьних обчислень, використання методу багатомасштабних розвинень вищих порядків стало більш доступним і застосовним до дослідження задач про поширення хвильових пакетів в гідродинамічних системах таких, які були описані вище.

1.4. Модуляційна стійкість обвідної хвильового пакета

Більшість дослідників в області нелінійних хвиль визнають, що модуляційна стійкість є одним з найбільш розповсюджених видів стійкості в природі. Групи фізиків у різних країнах майже одночасно та незалежно розпочали дослідження в цій галузі, що є показником того, наскільки дана проблема назріла. Більша частина робіт західних науковців пов'язана з класичною гідродинамікою, тоді як роботи вітчизняних вчених щодо модуляційної стійкості стосувалися електромагнетизму та фізики плазми, хоча, наприклад, стаття Захарова В. Є. [122], яка стосується хвиль на воді. У сучасній нелінійній фізиці модуляційна стійкість (або автомодуляція) розглядається як базовий процес, який класифікує якісну поведінку модульованих хвиль («обвідних хвиль») та може ініціювати утворення стійких об'єктів, таких як солітони обвідної. Це явище можна спостерігати в різних фізичних процесах, таких як хвилі на воді, плазмові хвилі, лазерні промені.

Ще в 1965 р. Уїзем [118] запропонував усереднений варіаційний принцип для квазіперіодичних хвиль, який ґрунтується на представленні рівнянь у лагранжевій формі $L(\omega, k, A)$ [58] та залежить від фази хвилі θ (фактично від її похідних, локальної частоти $\omega = -\partial\theta/\partial t$ та хвильового числа $k = \partial\theta/\partial x$), амплітуди a і, можливо, інших параметрів, які змінюються повільно. Використовуючи θ і a в якості канонічних змінних, можна отримати рівняння, які описують хвильові характеристики, що повільно змінюються, у випадку одновимірного простору

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial L_\omega}{\partial t} - \frac{\partial L_k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (1.3)$$

Система рівнянь Уїзема складається із законів збереження хвильового числа та енергії, а також нелінійного дисперсійного рівняння

$$\omega = \omega(k, |a|^2), \quad (1.4)$$

яке прив'язане до конкретної задачі. Наприклад, для хвиль на поверхні глибокої води співвідношення такого типу $\omega^2 = gk(1 + k^2|a|^2)$ було отримано Стоксом у вигляді періодичної стаціонарної хвилі, період якої залежить від амплітуди (хвиля Стокса). Очевидно, що в лінійному наближенні ($|a|^2 \rightarrow 0$) рівняння (1.4) повинно переходити в лінійне дисперсійне співвідношення $\omega = \omega_0(k)$. Таким чином, у випадку слабкої нелінійності співвідношення (1.4) можна представити у вигляді

$$\omega \approx \omega_0(k) + \omega_2(k)|a|^2 + \dots$$

Важливий внесок був зроблений Лайтхіллом [95], який показав, що у випадку

$$\omega_0''\omega_2 > 0,$$

де $\omega_0'' = d^2\omega_0/dk^2$, система рівнянь (1.3) та (1.4) – гіперболічна, а у випадку

$$\omega_0''\omega_2 < 0 \quad (1.5)$$

– еліптична. Умова (1.5) отримала назву критерій Лайтхілла.

Еліптичність системи свідчить про наявність нестійкості, оскільки задача Коші для еліптичних рівнянь є некоректною. Така нестійкість була виявлена Бенджаміном і Фейром в результаті невдалих спроб експериментально реалізувати хвилю Стокса на поверхні глибокої води. В роботі [69] показано, що нестійкість викликана взаємодією основної хвилі з частотою ω_0 і збуреннями з близькими частотами, які розташовані симетрично від частоти основної хвилі ($\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Delta\omega$, причому $\Delta\omega \ll \omega_0$). Збурення з частотами близькими до ω_0 , для яких виконується умова резонансу, можна розглядати як модуляцію основної хвилі. Тому нестійкість Бенджаміна-Фейра отримала назву *модуляційної*.

Інший підхід до дослідження динаміки обвідної хвильового пакета пов'язаний з отриманням нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ)

$$A_t = -a_1 A_x - ia_2 A_{xx} + ia_3 A^2 \bar{A}, \quad (1.6)$$

яке використовується у різних розділах фізики при описі нелінійних хвиль, зокрема нелінійна оптика [115], фізика плазми [25] та гідродинаміка [119].

В контексті слабконелінійних хвиль з дисперсією НРШ вперше було отримане Бенні та Ньюеллом [70]. Пізніше воно було застосоване для дослідження та описання хвильових полів у диспергуючих середовищах. Зокрема, Карпманов використав рівняння Шредінгера для опису модульованих хвиль [28, 37], в свою чергу Захаров В. Є. за допомогою НРШ дослідив стійкість поверхневих хвиль [19]. Точний розв'язок НРШ був знайдений Захаровим В. Є. і Шабатом А. Б. [20] з використанням вдосконаленого методу оберненої задачі розсіювання.

Використавши метод багатьох масштабів, Хасімото та Оно [84] отримали нелінійне рівняння Шредінгера для гравітаційних хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні рідкого шару. Важливий внесок у розвиток теорії модуляційної стійкості та НРШ зробили Юен і Лейк [119, 120], експериментально встановивши існування солітонів та стійкість їхньої обвідної при взаємодії з іншими хвильовими пакетами.

Найбільш повне дослідження з використанням методу багатьох масштабів провів Найфе [99]. Ним виведено диференціальні рівняння у частинних похідних, які описують еволюцію хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні контакту двох напівнескінчених рідких середовищ з різними густинами, отримано НРШ та досліджено стійкість хвильових пакетів скінченної амплітуди.

Аналогічна задача про поширення хвильових пакетів у системі «півпростір – шар з твердою кришкою» вивчалась Селезовим І. Т. і Авраменко О. В. в [47], проблема стійкості хвильових пакетів досліджувалась методом багатомасштабних розвинень до третього порядку [50, 51], а також були розглянуті різні аспекти четвертого наближення проблеми еволюції нелінійних хвильових пакетів [48] та виведене еволюційне рівняння для хвильових чисел близьких до критичного [49].

Задача про поширення хвильових пакетів у гідродинамічній системі «шар з кришкою – шар з твердим дном» з урахуванням поверхневого натягу досліджувалась в [15, 53]. Із застосуванням методу багатомасштабних розвинень отримано еволюційне рівняння обвідної на поверхні контакту двох рідких шарів у формі нелінійного рівняння Шредінгера і на основі отриманого рівняння досліджені особливості модуляційної стійкості хвильових пакетів.

У роботах [109, 2] досліджувалась задача про поширення та взаємодію внутрішніх та поверхневих хвильових пакетів у гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею». Зокрема, були розглянуті питання модуляційної стійкості хвильових пакетів.

Останні публікації показують, що дослідження внутрішніх та поверхневих хвиль, а також їхньої взаємодії в стратифікованих гідродинамічних системах залишається однією з важливих наукових проблем. Зокрема, актуальними є задачі про поширення хвильових пакетів у рідких середовищах з урахуванням поверхневого натягу. Тому у дисертаційній роботі розглядається нова слабконелінійна задача про поширення та взаємодію хвильових пакетів в

гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» з урахуванням поверхневого натягу на поверхнях контакту.

Висновки до першого розділу

Дослідження нелінійних хвильових процесів у стратифікованих системах і досі є актуальними. Та, незважаючи на інтенсивність теоретичних та експериментальних досліджень, проблема поширення внутрішніх і поверхневих хвиль залишається не вичерпаною. Більшість досліджень, проведених до цього часу, пов'язані з теорією мілкої води і лише деякі охоплюють нелінійні проблеми хвильового руху. З розвитком обчислювальної техніки та удосконаленням асимптотичних методів з'явилась можливість впритул підійти до класу нелінійних задач, які б враховували розв'язки наближень вищих порядків.

З урахуванням накопченого досвіду, назріла необхідність дослідити нелінійні гравітаційно-капілярні хвилі у тришаровій рідкій системі: отримати нові аналітичні результати і порівняти їх з результатами досліджень описаних вище моделей гідродинамічних систем; вивести еволюційні рівняння для обвідних хвильових пакетів на внутрішніх поверхнях контакту; провести аналіз нелінійної модуляційної стійкості в залежності від геометричних та фізичних параметрів тришарової гідродинамічної системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» з врахуванням сил поверхневого натягу на поверхнях контакту; дослідити умови проходження внутрішніх хвиль та аналіз енергії, яку переносять ці хвилі; проаналізувати форми хвильових пакетів та інші властивості та закономірності характерні для внутрішніх хвиль.

РОЗДІЛ 2.

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АНАЛІЗ УМОВ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ТРИШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ

У цьому розділі виконана слабконелінійна постановка задачі про поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою. За допомогою методу багатомасштабних розвинень отримано два перших наближення вказаної задачі. Знайдено аналітичні розв'язки першого та другого наближень, а також умову розв'язності другого наближення. Проведено аналіз коренів дисперсійного співвідношення та умов проходження хвиль в залежності від фізичних та геометричних параметрів системи. Досліджено форми хвильових пакетів у різні моменти часу з урахуванням другого наближення. Отримані результати опубліковані в роботах [4], [5], [6], [9], [34], [65].

2.1. Постановка слабконелінійної задачі поширення хвиль у системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою»

Досліджується динаміка потенціальних двовимірних хвильових пакетів на поверхнях ідеальної рідини під впливом сили тяжіння, направленої перпендикулярно до поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку. Вважаємо, що хвилі поширюються вздовж горизонтальної осі x . Нижня область гідродинамічної системи $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, z \leq 0\}$ є рідким півпростором з густиною ρ_1 . Середній рідкий шар $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z < h_2\}$ з густиною ρ_2 обмежений знизу і зверху поверхнями контакту $z = \eta_1(x, t)$ та $z = h_2 + \eta_2(x, t)$, відповідно. Верхній рідкий шар $\Omega_3 = \{(x, z) : |x| < \infty, h_2 \leq z < h_2 + h_3\}$ з густиною ρ_3 обмежений зверху твердою кришкою $z = h_2 + h_3$. При розв'язуванні враховуються сили поверхневого натягу на поверхнях контакту (рис. 2.1).

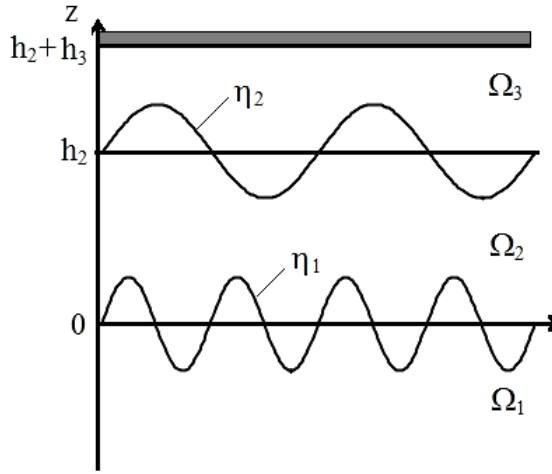


Рис 2.1. Схематичне зображення тришарової гідродинамічної системи

Рух рідини можна описати наступним чином:

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \text{ у } \Omega_j, \quad j=1,2,3, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \text{ при } z = \eta_1(x,t), \quad j=1,2, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \text{ при } z = h_2 + \eta_2(x,t), \quad j=2,3, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g(\rho_1 - \rho_2)\eta_1 + 0.5\rho_1(\nabla \varphi_1)^2 - 0.5\rho_2(\nabla \varphi_2)^2 - \\ -T_1 \left[1 + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = 0 \text{ при } z = \eta_1(x,t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + g(\rho_2 - \rho_3)(h_2 + \eta_2) + 0.5\rho_2(\nabla \varphi_2)^2 - 0.5\rho_3(\nabla \varphi_3)^2 - \\ -T_2 \left[1 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} = 0 \text{ при } z = h_2 + \eta_2(x,t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_2 + h_3, \quad (2.6)$$

$$|\varphi_1| \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty, \quad (2.7)$$

тут φ_j ($j=1,2,3$) – потенціали швидкостей в Ω_j шарі, T_1 та T_2 – коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях контакту, відповідно, g – прискорення вільного падіння.

Для побудови математичної моделі введемо безрозмірні величини за допомогою характерної глибини H , рівної товщині внутрішнього шару h_2 , характерної довжини хвилі L , максимального відхилення a поверхні контакту між шарами Ω_2 та Ω_3 , характерного часу t , густини нижнього шару ρ_1 .

Перейдемо до безрозмірних величин, які позначимо зірочкою,

$$x = Lx^*, \quad z = Hz^*, \quad t = Lt^* / \sqrt{gH},$$

$$\varphi = \frac{gL a}{\sqrt{gH}} \varphi^*, \quad \eta_j = a \eta_j^* \quad (j=1,2), \quad T_{1,2} = L^2 \rho_1 g T_{1,2}^*, \quad \rho_{1,2,3} = \rho_1 \rho_{1,2,3}^*. \quad (2.8)$$

Позначивши величини $\alpha = a/H$ і $\beta = H^2/L^2$ та використавши формули (2.8), перепишемо постановку задачі (2.1)-(2.7) у безрозмірних величинах:

$$\frac{\partial^2 \varphi_j^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \varphi_j^*}{\partial z^{*2}} = 0 \quad \text{у } \Omega_j, \quad j=1,2,3,$$

$$\frac{\partial \eta_1^*}{\partial t^*} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial z^*} = -\alpha \frac{\partial \eta_1^*}{\partial x^*} \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial x^*} \quad \text{при } z^* = \alpha \eta_1^*(x, t), \quad j=1,2,$$

$$\frac{\partial \eta_2^*}{\partial t^*} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial z^*} = -\alpha \frac{\partial \eta_2^*}{\partial x^*} \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial x^*} \quad \text{при } z^* = h_2^* + \alpha \eta_2^*(x, t), \quad j=2,3,$$

$$\begin{aligned} & \rho_1^* \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t^*} - \rho_2^* \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t^*} + (\rho_1^* - \rho_2^*) \eta_1^* + 0.5 \rho_1^* \alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z^*} \right)^2 \right) - \\ & - 0.5 \rho_2^* \alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z^*} \right)^2 \right) - T_1^* \left[1 + \left(\alpha \sqrt{\beta} \frac{\partial \eta_1^*}{\partial x^*} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_1^*}{\partial x^{*2}} = 0 \end{aligned}$$

при $z^* = \alpha \eta_1^*(x, t)$,

$$\rho_2^* \alpha \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t^*} - \rho_3^* \alpha \frac{\partial \varphi_3^*}{\partial t^*} + \alpha \eta_2^* (\rho_2^* - \rho_3^*) + h_2^* (\rho_2^* - \rho_3^*) + 0.5 \rho_2^* \alpha^2 \left(\left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z^*} \right)^2 \right) -$$

$$-0.5\rho_3^*\alpha^2\left(\left(\frac{\partial\varphi_3^*}{\partial x^*}\right)^2 + \frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial\varphi_3^*}{\partial z^*}\right)^2\right) - T_2^*\alpha\left[1 + \left(\alpha\sqrt{\beta}\frac{\partial\eta_2^*}{\partial x^*}\right)^2\right]^{-3/2}\frac{\partial^2\eta_2^*}{\partial x^{*2}} = 0$$

$$\text{при } z^* = h_2^* + \alpha\eta_2^*(x, t),$$

$$\frac{\partial\varphi_3^*}{\partial z} = 0 \text{ при } z^* = h_2^* + h_3^*,$$

$$|\varphi_1^*| \rightarrow 0 \text{ при } z^* \rightarrow -\infty,$$

де α та β коефіцієнти нелінійності.

Якщо припустити, що характерна довжина L та характерна глибина H рівні між собою та дорівнюють товщині внутрішнього шару h_2 , другий коефіцієнт нелінійності β дорівнює одиниці. Вважаємо також, що коефіцієнт нелінійності α значно менший за одиницю, тому дана модель описує слабконелінійну тришарову систему з дисперсією. Для полегшення записів далі зірочку опускаємо. Отже, математична постановка задачі матиме вигляд

– рівняння руху:

$$\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial z^2} = 0 \text{ у } \Omega_j, j = 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

– кінематичні умови на поверхнях контакту

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_j}{\partial z} = -\alpha\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} \text{ при } z = \alpha\eta_1(x, t), j = 1, 2, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_j}{\partial z} = -\alpha\frac{\partial\eta_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} \text{ при } z = h_2 + \alpha\eta_2(x, t), j = 2, 3, \quad (2.11)$$

– динамічні умови на поверхнях контакту

$$\begin{aligned} & \rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \rho_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + (\rho_1 - \rho_2)\eta_1 + 0.5\rho_1\alpha\left(\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right) - \\ & - 0.5\rho_2\alpha\left(\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)^2\right) - T_1\left[1 + \left(\alpha\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\right)^2\right]^{-3/2}\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2} = 0 \\ & \text{при } z = \alpha\eta_1(x, t), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 \alpha \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_3 \alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + (\rho_2 - \rho_3)(\alpha \eta_2 + h_2) + 0.5 \rho_2 \alpha^2 \left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)^2 \right) - \\ & - 0.5 \rho_3 \alpha^2 \left(\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right)^2 \right) - T_2 \alpha \left[1 + \left(\alpha \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} = 0 \\ & \text{при } z = h_2 + \alpha \eta_2(x, t), \quad (2.13) \end{aligned}$$

– гранична умова на твердій кришці

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h_2 + h_3, \quad (2.14)$$

– умова затухання на нескінченності

$$|\overline{\varphi_1}| \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty, \quad (2.15)$$

Застосуємо метод багатомасштабних розвинень (1.1)-(1.2) до третього порядку для знаходження наближеного розв'язку задачі (2.9)-(2.15). Представимо шукані функції відхилення поверхонь контакту та потенціали швидкостей у вигляді ряду за степенями малого параметру α

$$\eta_1(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{1n}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2,) + O(\alpha^3), \quad (2.16)$$

$$\eta_2(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{2n}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2,) + O(\alpha^3), \quad (2.17)$$

$$\varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2,) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.18)$$

де $x_k = \alpha^k x$ та $t_k = \alpha^k t$ ($k = 0, 1, 2$).

Прирівнюванням виразів при однакових степенях α отримано задачі перших трьох наближень, невідомими в яких є функції η_{11} , η_{21} , φ_{11} , φ_{21} , φ_{31} , η_{12} , η_{22} , φ_{12} , φ_{22} , φ_{32} , η_{13} , η_{23} , φ_{13} , φ_{23} , φ_{33} , які визначають доданки багатомасштабних розвинень для потенціалів та відхилення поверхонь контакту рідин.

2.2. Аналіз розв'язків задачі першого наближення та умови поширення хвиль

2.2.1. Розв'язки задачі та дисперсійне співвідношення

Підставивши вирази (2.16)-(2.18) у систему (2.9)-(2.15) та прирівнявши вирази при α^0 , ми отримали постановку задачі у першому лінійному наближенні:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{j1,x_0x_0} + \varphi_{j1,zz} &= 0 \text{ в } \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3, \\
 \eta_{11,t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ при } z = 0, \quad j = 1, 2, \\
 \eta_{21,t_0} - \varphi_{j1,z} &= 0 \text{ при } z = h_2, \quad j = 2, 3, \\
 \rho_1\varphi_{11,t_0} - \rho_2\varphi_{21,t_0} + (\rho_1 - \rho_2)\eta_{11} - T_1\eta_{11,x_0x_0} &= 0 \text{ при } z = 0, \\
 \rho_2\varphi_{21,t_0} - \rho_3\varphi_{31,t_0} + (\rho_2 - \rho_3)\eta_{21} - T_2\eta_{21,x_0x_0} &= 0 \text{ при } z = h_2, \\
 \varphi_{31,z} &= 0 \text{ при } z = h_2 + h_3, \\
 \varphi_{11} &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Розв'язок задачі першого наближення (2.19) одержано у вигляді прогресивних хвиль:

$$\begin{aligned}
 \eta_{11} &= Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}, \\
 \eta_{21} &= \frac{\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2}{\rho_2\omega^2} (Ae^{i\theta} + \bar{A}e^{-i\theta}), \\
 \varphi_{11} &= -\frac{i\omega}{k} (Ae^{i\theta+kz} - \bar{A}e^{-i\theta+kz}), \\
 \varphi_{21} &= -\frac{i\omega}{k} \left[\frac{(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \cosh k(h_2 - z)}{\rho_2\omega^2 \cosh kh_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2) \sinh kz}{\rho_2\omega^2 \cosh kh_2} \right] (Ae^{i\theta} - \bar{A}e^{-i\theta}),
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\varphi_{31} = \frac{i\omega}{k} \left[\frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \cosh k(h_2 + h_3 - z)}{\rho_2 \omega^2 \sinh kh_3} \right] \times \\ \times (A e^{i\theta + kz} - \bar{A} e^{-i\theta + kz}),$$

де $\theta = kx_0 - \omega t_0$, $A(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – обвідна хвильового пакета на поверхні контакту, $\bar{A}(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – комплексно спряжена до обвідної хвильового пакета A , k – хвильове число центра хвильового пакету та ω – частота центра хвильового пакету. З формул (2.20) неважко побачити зв'язок між обвідною нижнього внутрішнього хвильового пакета A та обвідною хвильового пакета на верхній внутрішній поверхні $A^{(1)}$

$$A = \frac{\rho_2 \omega^2}{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2} A^{(1)}. \quad (2.21)$$

Умова поширення хвильових пакетів у першому наближенні проблеми має вигляд дисперсійного рівняння

$$\rho_3 \omega^2 \coth kh_3 + \frac{\rho_2 \omega^2 (\rho_2 \omega^2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 - k\rho_2 - T_1 k^3) \coth kh_2)}{\rho_2 \omega^2 \coth kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k(\rho_1 - \rho_2) - T_1 k^3)} = \\ = k(\rho_2 - \rho_3) + T_2 k^3, \quad (2.22)$$

отриманого шляхом підстановки розв'язків (2.20) у динамічну умову на верхній поверхні контакту задачі першого наближення (2.19).

Із рівняння (2.22) випливає бікватратне рівняння

$$(\rho_2 \rho_3 \cdot \coth kh_2 \cdot \coth kh_3 + \rho_1 \rho_3 \cdot \coth kh_3 + \rho_2^2 + \rho_1 \rho_2 \cdot \coth kh_2) \omega^4 + \\ + ((-k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3)(\rho_3 \cdot \coth kh_3 + \rho_2 \cdot \coth kh_2) - \\ - (\rho_1 + \rho_2 \cdot \coth kh_2)(k\rho_2 - k\rho_3 + T_2 k^3)) \omega^2 + \\ + ((-k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3)(-k\rho_2 + k\rho_3 - T_2 k^3)) = 0 \quad (2.23)$$

за умови $(\rho_2 \omega^2 \coth kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 - k\rho_2 - T_1 k^3)) \neq 0$.

Рівняння (2.23) має дві пари коренів

$$\omega_1^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \omega_2^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.24)$$

де $a = (\rho_2 \rho_3 \cdot \coth kh_2 \cdot \coth kh_3 + \rho_1 \rho_3 \cdot \coth kh_3 + \rho_2^2 + \rho_1 \rho_2 \cdot \coth kh_2)$,

$$b = (-k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3)(\rho_3 \cdot \coth kh_3 + \rho_2 \cdot \coth kh_2) -$$

$$-(\rho_1 + \rho_2 \cdot \coth kh_2)(k\rho_2 - k\rho_3 + T_2 k^3)$$

$$c = (-k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3)(-k\rho_2 + k\rho_3 - T_2 k^3).$$

Серед аналогічних задач, дві пари коренів було виявлено раніше у системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею» [66]. Це обумовлено існуванням двох поверхонь контакту, вздовж яких поширюються хвильові пакети.

Перша пара частот ω_{11} та ω_{21} – додатні, тому подальше дослідження будемо проводити саме з цією парою коренів. Ці корені аналогічні до пари коренів дисперсійного рівняння системи «півпростір - шар з твердою кришкою», і за певних умов вираз (2.22) для ω_1^2 і ω_2^2 вироджується у відповідне дисперсійне рівняння $\omega^2 + \rho\omega^2 \coth kh = k(1 - \rho + Tk^2)$ [114].

2.2.2. Випадки виродження тришарової системи у двошарову

Проведемо аналіз отриманих коренів дисперсійного рівняння (2.22). Для цього порівняємо отримані розв'язки з відомим розв'язком дисперсійного рівняння, отриманого при дослідженні задачі про поширення хвиль у системі «півпростір - шар з твердою кришкою» [50]

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(1 - \rho) + Tk^3}{\rho \coth kh + 1}},$$

де h – глибина шару з кришкою.

Розглянемо два граничних випадки для системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». Перший граничний випадок виникає за умови рівності густин двох шарів $\rho_2 = \rho_3 = 0.9$. У цьому випадку маємо шар рідини

обмежений згори твердою кришкою та рідкий півпростір під ним з поверхнею контакту η_1 . Будемо розглядати залежність коренів дисперсійного рівняння від товщини верхнього шару h_3 (рис.2.2a) для параметрів системи $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = \rho_3 = 0.9$, $T = T_1 = T_2 = 0$, $k = 0.1$, $h_2 = 1$ та за умови відсутності поверхневого натягу.

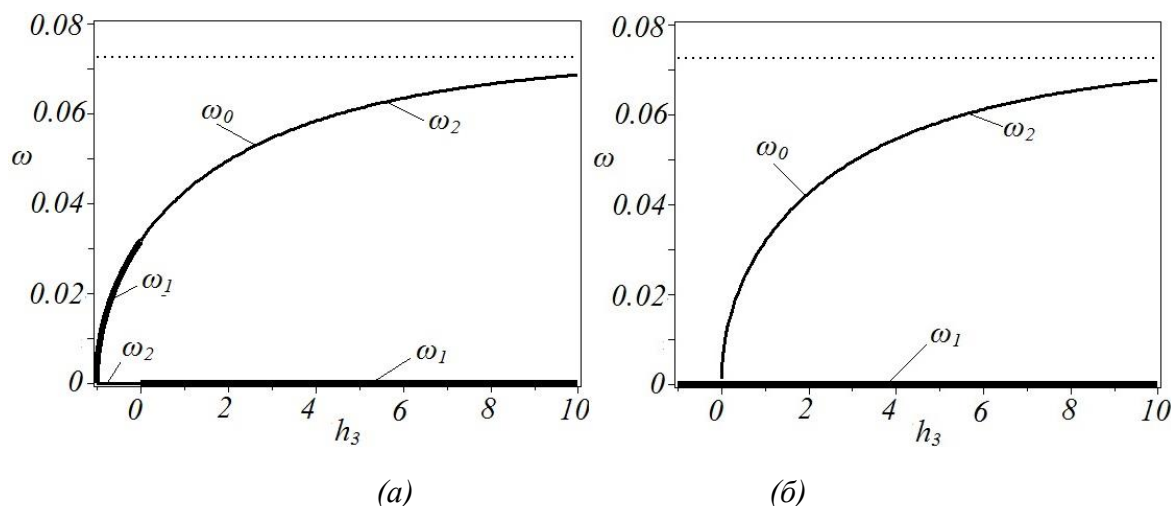


Рис. 2.2. Залежність коренів дисперсійного рівняння ω від товщини верхнього шару h_3

а) перший вироджений випадок, б) другий вироджений випадок

На рис.2.2a побудовані графіки залежності кореня дисперсійного рівняння для двошарової системи ω_0 та коренів дисперсійного рівняння для тришарової системи ω_1 , ω_2 від товщини верхнього шару h_3 . Як видно ω_1 співпадає з ω_0 на проміжку $h_3 = [-1, 0]$, а потім стає рівною нулеві, а ω_2 співпадає з ω_0 для всіх $h_3 > 0$. При цьому при збільшенні товщини верхнього шару ω_2 та ω_0 прямують до граничного значення $\sqrt{(k(1 - \rho_3) + T_2 k^3) / (\rho_3 + 1)}$, яке відповідає розв'язку дисперсійного рівняння для системи «півпростір - шар з твердою кришкою» з густинами ρ_3 та $\rho_1 = 1$. Відмітимо, що ω_1 переходить в ω_2 у точці, яка відповідає значенню $h_3 = 0$. Таким чином, у рідкому однорідному шарі товщиною $h = h_2 + h_3$ при $h_2 = 1$ можуть проходити хвилі з частотою

$$\omega_0 = \begin{cases} \omega_1 & \text{за умови } 0 < h < h_2 \\ \omega_2 & \text{за умови } h > h_2 \end{cases} .$$

Другий граничний випадок виникає за умови рівності густин двох нижніх шарів $\rho_1 = \rho_2 = 1$. У цьому випадку також маємо шар рідини, обмежений згори кришкою та півпростір, але поверхня контакту двошарової системи η_2 . Проведемо аналогічне дослідження за умови відсутності поверхневого натягу для таких параметрів системи: $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\rho_3 = 0.9$, $T = T_1 = T_2 = 0$, $k = 0.1$, $h_2 = 1$. Як видно з рис.2.2б, значення ω_2 і ω_0 співпадають на проміжку $h_3 = [0, \infty]$, а $\omega_1 = 0$, що підтверджує фізичну достовірність отриманих результатів.

Порівняльний аналіз частот від товщини верхнього шару показав співпадіння названих залежностей із зсувом на товщину середнього шару $h_2 = 1$, густина якого рівна 1, що також підтверджує фізичну достовірність, оскільки ці дві двошарові системи відрізняються товщиною верхнього шару на 1.

Далі проведемо аналіз коренів дисперсійного рівняння в залежності від значень товщини верхнього шару та значень хвильового числа центра хвильового пакета.

2.2.3. Аналіз коренів дисперсійного рівняння в залежності від геометричних та фізичних параметрів системи

Для початку дослідимо, яким чином значення товщини верхнього шару впливає на корені дисперсійного рівняння. Для цього розглянемо випадки, коли значення густин сусідніх шарів рідини різняться між собою. На рис.2.3а-д наведено графіки залежності ω_1 та ω_2 від товщини верхнього шару h_3 при значеннях $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9, 0.925, 0.95, 0.975, 1$, $\rho_3 = 0.9$, $h_2 = 1$, $k = 1$ без урахування коефіцієнтів поверхневого натягу $T_1 = T_2 = 0$.

За умови, коли густина ρ_2 відрізняється від густин сусідніх рідких середовищ ρ_1 та ρ_3 , можна побачити, що графік функції ω_1 від h_3 має розриви в точці $h_3 = 0$ та горизонтальну асимптоту. При збільшенні ρ_2 від $\rho_3 = 0.9$ до 0.95 рівень асимптоти спочатку збільшується від нуля до певного значення, а

після знову зменшується до нуля при наближенні ρ_2 до 1, тобто до значення густини нижнього шару $\rho_1 = 1$, що відповідає другому виродженому випадку.

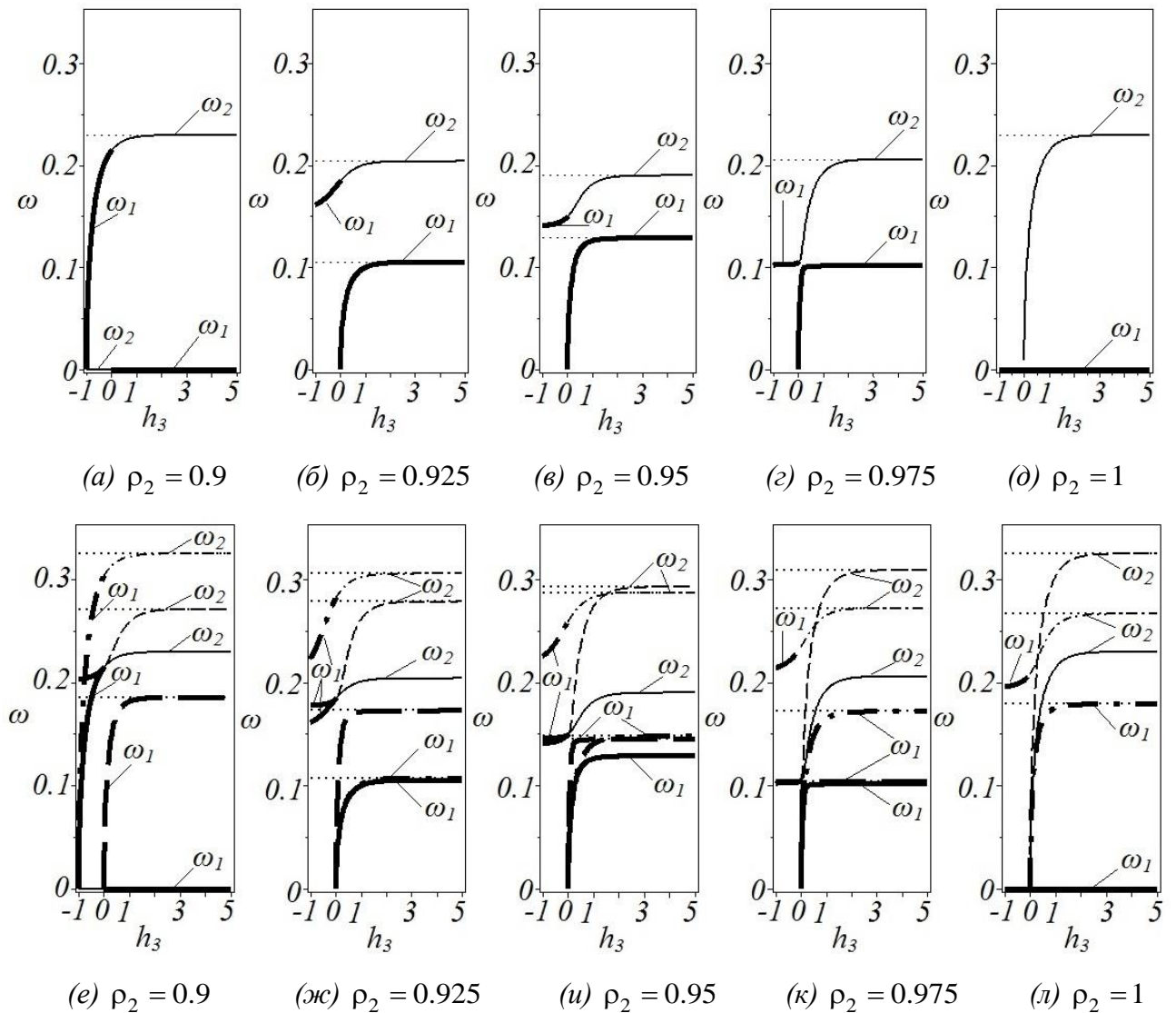


Рис.2.3. Графіки залежності ω_1 та ω_2 від товщини верхнього шару h_3
для різних значень густини ρ_2

Частота ω_2 у першому виродженому випадку ($\rho_2 = 0.9$) має ненульові значення для $h_3 > 0$, графік має горизонтальну асимптоту. При збільшенні густини ρ_2 рівень асимптоти зменшується до того моменту доки ρ_2 не досягне 0.95, а після збільшується до того ж самого рівня, що був при $\rho_2 = 0.9$. При $\rho_2 = 0.9$ та $\rho_2 = 1$ рівні асимптот співпадають. Зазначимо, що графіки на

рис.2.3а та 2.3д відповідають вище розглянутим двошаровим виродженим випадкам.

На рис.2.3е-л наведені графіки залежності ω_1 та ω_2 від товщини верхнього шару h_3 при значеннях $\rho_1 = 1$, $\rho_3 = 0.9$, $\rho_2 = 0.9, 0.925, 0.95, 0.975, 1$, $h_2 = 1$, $k = 1$ без урахування коефіцієнтів поверхневого натягу $T_1 = T_2 = 0$ (суцільні лінії). А також графік залежності ω_1 та ω_2 від товщини верхнього шару h_3 під впливом поверхневого натягу (штрих-пунктирна лінія – $T_1 = 0.1, T_2 = 0$, пунктирна лінія – $T_1 = 0, T_2 = 0.1$). Легко бачити, що в кожному із розглянутих випадків вплив поверхневого натягу на одній або іншій поверхні контакту призводить до збільшення частот. Також спостерігається симетрія рівня асимптот відносно $\rho_2 = 0.95$.

Проведемо аналогічне дослідження коренів дисперсійного рівняння в залежності від фізичних параметрів системи, а саме хвильового числа. На рис.2.4а-д наведені графіки залежності ω_1 та ω_2 від хвильового числа k при значеннях $h_2 = 1, h_3 = 1, \rho_1 = 1, \rho_3 = 0.9, \rho_2 = 0.9, 0.925, 0.95, 0.975, 1$ без урахування коефіцієнтів поверхневого натягу $T_1 = T_2 = 0$ (суцільні лінії).

Проаналізувавши графіки рис.2.4а-д, бачимо, що при збільшенні ρ_2 від $\rho_3 = 0.9$ до 0.95 графік залежності ω_1 від хвильового числа k має зростаючий характер, а після є спадним і переходить у $\omega_1 = 0$ при наближенні ρ_2 до 1, тобто до значення густини нижнього шару $\rho_1 = 1$, що відповідає другому виродженому випадку.

В той же час графік залежності ω_2 від хвильового числа k при збільшенні значення густини ρ_2 має спадний характер до того моменту, доки ρ_2 не досягне 0.95 , а після – зростає, до того ж самого рівня, що був при $\rho_2 = 0.9$. Нагадаємо, що графіки на рис.2.4а та 2.4д відповідають двом виродженим випадкам (див. рис.2.2а, б).

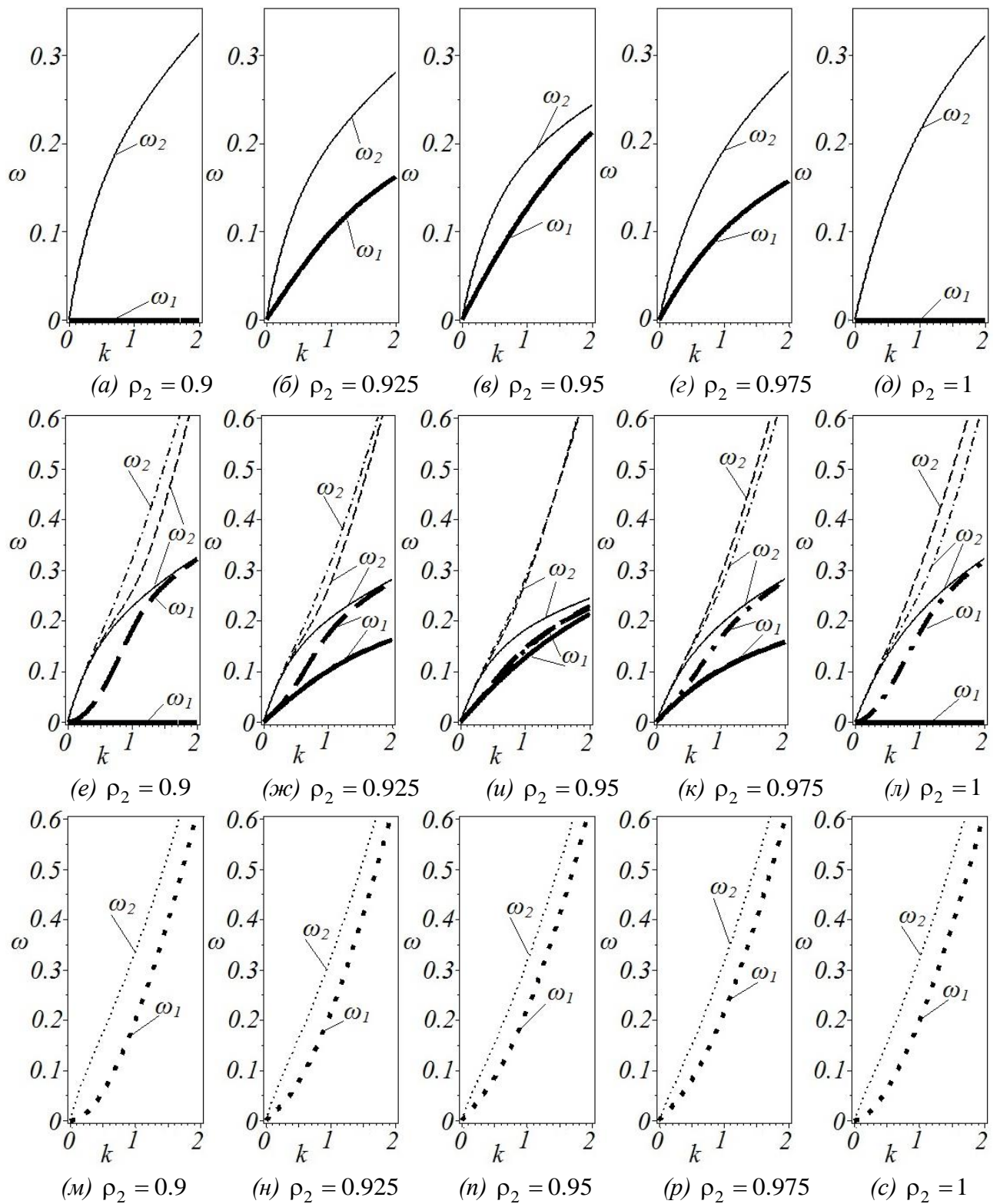


Рис.2.4. Графіки залежності ω_1 та ω_2 від хвильового числа k

На рис.2.4е-л наведені графіки залежності ω_1 та ω_2 від хвильового числа k при значеннях $h_2 = 1$, $h_3 = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_3 = 0.9$, $\rho_2 = 0.9, 0.925, 0.95, 0.975, 1$ з урахуванням коефіцієнтів поверхневого натягу $T_1 = 0.1$, $T_2 = 0$ (штрих-

пунктирні лінії), з $T_1 = 0, T_2 = 0.1$ (пунктирні лінії) та без урахування коефіцієнтів поверхневого натягу $T_1 = T_2 = 0$ (суцільні лінії).

Легко бачити, що коефіцієнти поверхневого натягу T_1 і T_2 впливають на значення обох частот ω_1 та ω_2 . За наявності поверхневого натягу на верхній поверхні контакту ($T_1 = 0, T_2 = 0.1$) залежності обох частот є зростаючими функціями від k , при цьому значення частоти ω_1 для однакових значень хвильового числа k зменшуються до нуля при збільшенні густини середнього шару від 0.9 до 1. За наявності поверхневого натягу на нижній поверхні контакту $T_1 = 0.1, T_2 = 0$ спостерігається протилежна залежність частоти ω_1 . На відміну від ω_1 частота ω_2 різко зростає за наявності поверхневого натягу, як на верхній, так і на нижній поверхнях контакту, що свідчить про істотний вплив поверхневого натягу на величину частоти ω_2 .

На рис.2.4м-с наведені графіки залежності ω_1 та ω_2 від хвильового числа k при тих самих значеннях параметрів системи та з урахуванням коефіцієнтів поверхневого натягу на обох поверхнях контакту $T_1 = T_2 = 0.1$ (точкові лінії).

З графіків видно, що наявність поверхневого натягу на обох поверхнях контакту ($T_1 = T_2 = 0.1$) призводить до значного зростання значень частот, що узгоджується з результатами вище описаних випадків за наявності поверхневого натягу тільки на одній із поверхонь контакту.

Аналогічно до залежностей частот від товщини h_3 (рис.2.3а-л) розглядувані залежності частот від хвильового числа k (рис.2.4а-с) при переході від одного виродженого випадку ($\rho_2 = 0.9$) до другого ($\rho_2 = 1$) мають певну якісну симетрію графіків ω_1 та ω_2 відносно $\rho_2 = 0.95$. Причому, на рис.2.4и графіки практично накладаються, а потім розходяться, міняючись місцями (рис.2.4е-л).

2.2.4. Аналіз умов проходження хвиль в залежності від параметрів системи

Проведемо аналіз відношення амплітуд відхилень нижньої внутрішньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$ і верхньої внутрішньої поверхні контакту $\eta_2(x, t)$, що відповідають ω_1^2 і ω_2^2 . Позначимо ці відношення як a_1 та a_2 відповідно:

$$a_1 = \frac{\rho_2 \omega_1^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega_1^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega_1^2},$$
$$a_2 = \frac{\rho_2 \omega_2^2}{\rho_2 \omega_2^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega_2^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2},$$
(2.25)

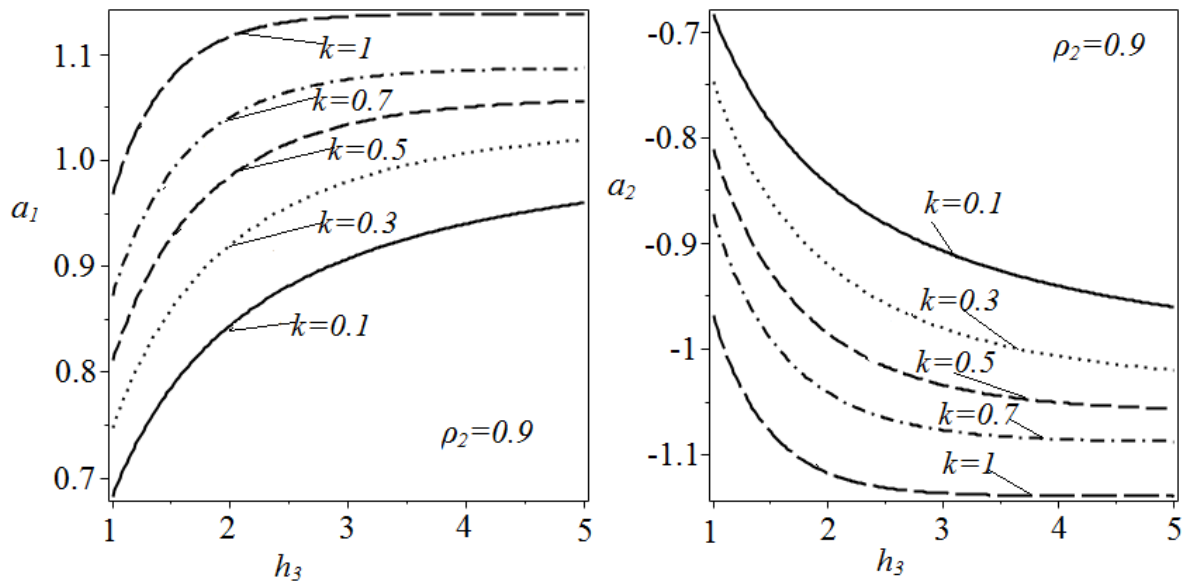
де a_1 – характеризує внесок хвилі з частотою ω_1 у хвильовий рух на поверхні контакту рідких середовищ Ω_2 та Ω_3 , а величина a_2 – внесок хвилі із частотою ω_2 у хвильовий рух на поверхні контакту рідких середовищ Ω_1 та Ω_2 .

На рис. 2.5а представлені залежності a_1 та a_2 від товщини верхнього шару h_3 при різних хвильових числах $k = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ у випадку, коли $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $\rho_3 = 0.8$. При збільшенні товщини верхнього шару для кожного фіксованого значення k існують граничні значення, до яких прямують величини a_1 та a_2 . При цьому коефіцієнт a_1 набуває додатних значень, а коефіцієнт a_2 – від’ємних.

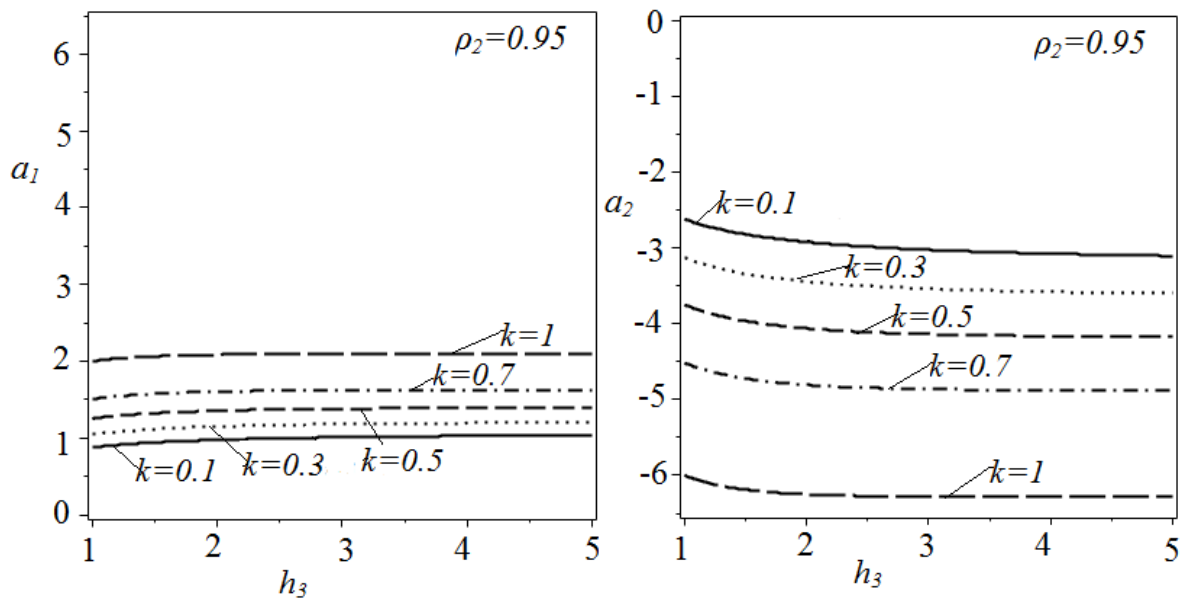
На рис. 2.5б представлені залежності a_1 та a_2 від товщини верхнього шару h_3 для таких параметрів системи: $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.95$, $\rho_3 = 0.8$, $k = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1$. Як і на попередньому графіку для кожного фіксованого значення k існують граничні значення, до яких прямують величини a_1 та a_2 .

Відмітимо, що при рівних стрибках густини на поверхнях контакту $\rho_1 - \rho_2 = \rho_2 - \rho_3 = 0.1$ коефіцієнти a_1 та a_2 рівні за модулем (рис. 2.5а, б). Якщо ж стрибок густини на нижній поверхні контакту $\rho_1 - \rho_2 = 0.05$, а стрибок густини на верхній поверхні контакту $\rho_2 - \rho_3 = 0.15$, то $|a_1| < |a_2|$. Зміна густини ρ_2 істотно впливає як на a_1 для хвиль з частотою ω_1 , так і на a_2 для хвиль з

частотою ω_2 . Збільшення значення густини середнього шару ρ_2 з 0.9 до 0.95 приводить до збільшення величини a_1 та збільшення абсолютного значення a_2 , причому зміна густини ρ_2 має більш суттєвий вплив на a_2 ніж на a_1 .



(a) $\rho_2 = 0.9$



(б) $\rho_2 = 0.95$

Рис. 2.5. Залежність a_1 та a_2 від товщини верхнього шару h_3

Зауважимо, що при побудові графіків область визначення a_1 та a_2 була взята на проміжку від одиниці, оскільки для малих значень товщини верхнього шару лінійна модель не прийнятна.

Аналогічно проведений аналіз відношення амплітуд хвиль, які поширюються вздовж поверхонь контакту, в залежності від зміни відношення густин при різних хвильових числах (рис. 2.6).

На рис. 2.6 зображено графік залежності a_1 та a_2 від густини середнього шару ρ_2 при різних значеннях хвильового числа $k = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ у випадку, коли $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$, $\rho_1 = 1$, $\rho_3 = 0.8$.

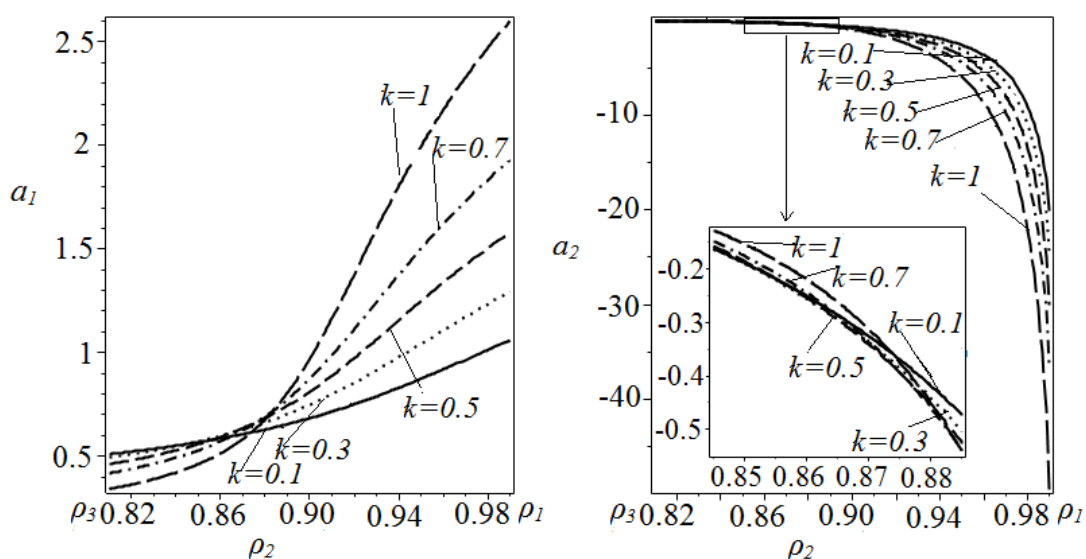


Рис. 2.6. Графік залежності a_1 та a_2 від фізичних параметрів системи

Видно, що при зростанні ρ_2 абсолютні значення коефіцієнтів a_1 та a_2 зростають, причому для менших значень хвильового числа зростання відбувається повільніше, ніж у випадку, коли хвильове число більше. Також виявлено, що за певних умов коефіцієнти a_1 та a_2 співпадають для різних значень хвильових чисел. Із зростанням хвильового числа k при значеннях густини середнього шару ρ_2 , близьких до густини верхнього шару ρ_3 , абсолютні значення коефіцієнтів a_1 та a_2 спадають. В іншому випадку, коли значення густини середнього шару, близькі до значення густини нижнього шару ρ_1 , абсолютні значення коефіцієнтів a_1 та a_2 зростають.

Результати, отримані для ω_1 , свідчать проте, що зменшення стрибка густин на нижній поверхні контакту двох рідких середовищ та одночасне збільшення

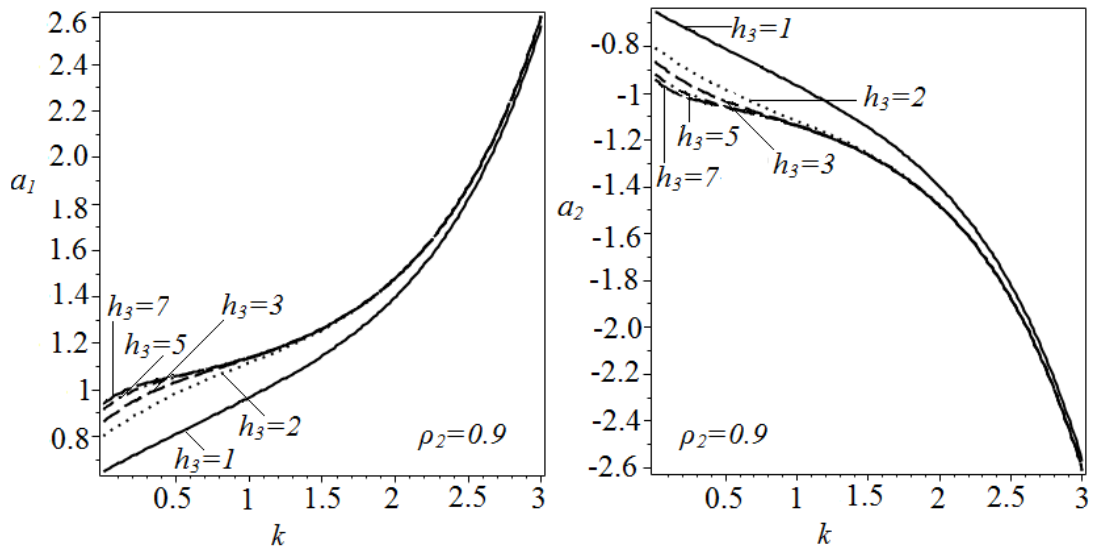
стрибка густин на верхній поверхні контакту призводять до утворення великих відхилень на верхній поверхні контакту. В той же час, за фактичної відсутності стрибка густини на нижній поверхні контакту, інший розв'язок дисперсійного рівняння (частота ω_2) прямує до нуля, що викликає необхідність детального дослідження цього граничного випадку.

На рис. 2.7а зображено графік залежності a_1 та a_2 від хвильового числа k для різних значень товщини верхнього шару h_3 у випадку, коли $h_2=1$, $T_1=T_2=0$, $\rho_1=1$, $\rho_2=0.9$, $\rho_3=0.8$.

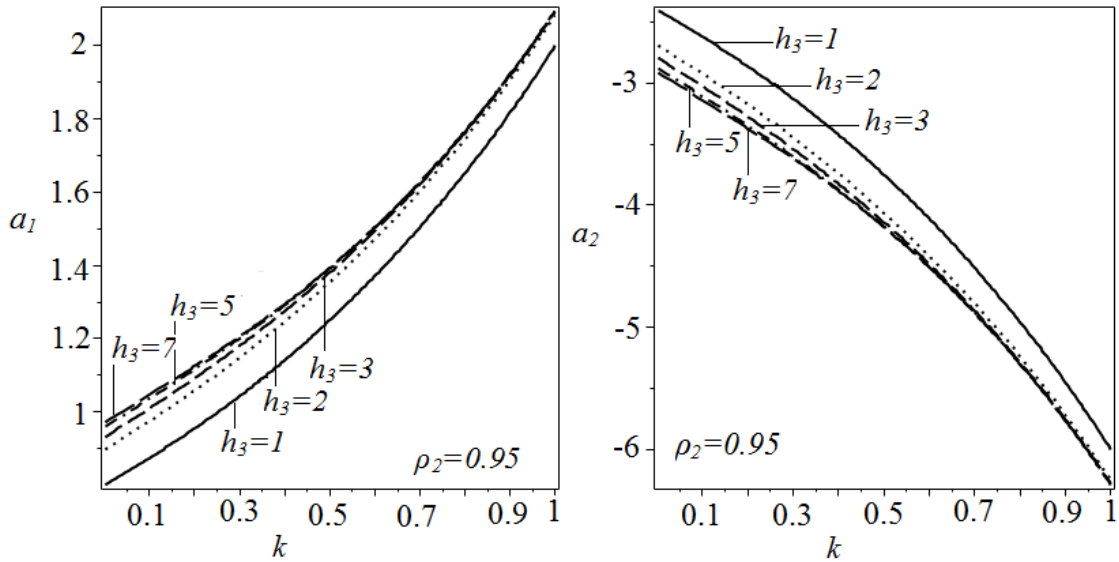
При значеннях товщини верхнього шару $h_3=2,3,5,7$ графіки залежностей a_1 та a_2 від хвильового числа k розміщені недалеко один від одного та досить швидко збігаються до спільного граничного значення. В той же час графіки залежностей a_1 та a_2 від хвильового числа k при значенні товщини верхнього шару $h_3=1$ мають дещо відокремлений характер і не так швидко збігаються до того ж граничного значення. Аналогічно до залежностей a_1 та a_2 від h_3 має місце рівність абсолютних значень $|a_1|=|a_2|$ за умови, коли стрибки густини на поверхнях контакту рівні $\rho_1-\rho_2=\rho_2-\rho_3=0.1$.

На рис. 2.7б зображено графік залежності a_1 та a_2 від хвильового числа k при різних значеннях товщини верхнього шару h_3 у випадку, коли $h_2=1$, $T_1=T_2=0$, $\rho_1=1$, $\rho_2=0.95$, $\rho_3=0.8$.

При значенні густини середнього шару $\rho_2=0.95$ стрибок густини на нижній поверхні контакту $\rho_1-\rho_2=0.05$, а на верхній поверхні контакту $\rho_2-\rho_3=0.15$, при цьому виконується співвідношення $|a_1|<|a_2|$, на відміну від залежностей розглянутих вище для $\rho_2=0.9$ (рис. 2.7а). Співвідношення між абсолютними значеннями $|a_1|$ та $|a_2|$ в залежності від k для $\rho_2=0.9$ та $\rho_2=0.95$ узгоджуються із аналогічними результатами залежностей від h_3 (див. рис.2.5а, б).



(а) $\rho_2 = 0.9$



(б) $\rho_2 = 0.95$

Рис. 2.7. Графік залежності a_1 та a_2 від хвильового числа k

Зазначимо, що для всіх випадків представлених на рис. 2.7 абсолютні значення a_1 та a_2 для гравітаційних хвиль є меншими, ніж для капілярних.

Відмітимо, що всі результати пов'язані між собою, вони створюють цілісну картину хвильового процесу. Також у процесі дослідження виявлено умови, за яких тришарова система вироджується у двошарову, а одна із частот хвиль, які можуть поширюватись у системі, прямує до нуля, що викликає необхідність додаткового дослідження. Раніше отримані результати для схожої

двошарової системи «півпростір – шар з твердою кришкою» використані для тестування та перевірки достовірності нових результатів.

2.3. Розв'язки та умова розв'язності другого наближення проблеми

Постановка задачі другого наближення отримана після підстановки виразів (2.16)-(2.18) у систему (2.9)-(2.15) та прирівнювання виразів при α^1 і має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_{j2,x_0x_0} + \varphi_{j2,zz} &= -2\varphi_{j1,x_0x_1} \text{ в } \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ \eta_{12,t_0} - \varphi_{j2,z} &= -\eta_{11,t_1} - \eta_{11,x_0} \varphi_{j1,x_0} + \eta_{11} \varphi_{j1,zz} \text{ при } z = 0, \quad j = 1, 2, \\ \eta_{22,t_0} - \varphi_{j2,z} &= -\eta_{21,t_1} - \eta_{21,x_0} \varphi_{j1,x_0} + \eta_{21} \varphi_{j1,zz} \text{ при } z = h_2, \quad j = 2, 3, \quad (2.26) \\ \rho_1 \varphi_{12,t_0} - \rho_2 \varphi_{22,t_0} + (\rho_1 - \rho_2) \eta_{12} - T_1 \eta_{12,x_0x_0} &= -\rho_1 (\varphi_{11,t_1} + \eta_{11} \varphi_{11,t_0z}) + \\ + \rho_2 (\varphi_{21,t_1} + \eta_{11} \varphi_{21,t_0z}) - \frac{1}{2} \rho_1 (\varphi_{11,x_0}^2 + \varphi_{11,z}^2) + \frac{1}{2} \rho_2 (\varphi_{21,x_0}^2 + \varphi_{21,z}^2) + 2T_1 \eta_{11,x_0x_1} & \\ &\text{при } z = 0, \\ \rho_2 \varphi_{22,t_0} - \rho_3 \varphi_{32,t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{22} - T_2 \eta_{22,x_0x_0} &= -\rho_2 (\varphi_{21,t_1} + \eta_{21} \varphi_{21,t_0z}) + \\ + \rho_3 (\varphi_{31,t_1} + \eta_{21} \varphi_{31,t_0z}) - \frac{1}{2} \rho_2 (\varphi_{21,x_0}^2 + \varphi_{21,z}^2) + \frac{1}{2} \rho_3 (\varphi_{31,x_0}^2 + \varphi_{31,z}^2) + 2T_2 \eta_{21,x_0x_1} & \\ &\text{при } z = h_2, \\ \varphi_{32,z} &= 0 \text{ при } z = h_2 + h_3, \\ \varphi_{12} &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Врахувавши розв'язки задачі першого наближення (2.20), умову непротікання на твердій кришці та умову згасання на нескінченності, постановку задачі другого наближення перепишемо в такому вигляді:

$$\varphi_{12,x_0x_0} + \varphi_{12,zz} = -2\omega A_{,x_1} e^{i\theta+kz} + cc \text{ в } \Omega_1, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{22,x_0x_0} + \varphi_{22,zz} &= -2\omega \left(\frac{(\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \cosh k(h_2 - z)}{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2} + \right. \\ &\left. + \frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \sinh kz}{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2} \right) A_{,x_1} e^{i\theta} + cc \text{ в } \Omega_2, \quad (2.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{32,x_0x_0} + \Phi_{32,zz} = \\
& = 2\omega \left(\frac{(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2) \cosh k(h_2 + h_3 - z)}{\rho_2\omega^2 \sinh kh_3} \right) A_{,x_1} e^{i\theta} + cc \\
& \text{в } \Omega_3, \quad (2.29)
\end{aligned}$$

$$\eta_{12,t_0} + \Phi_{12,z} = -A_{,t_1} e^{i\theta} - 2ik\omega A^2 e^{2i\theta} + cc \text{ при } z = 0 \quad (2.30)$$

$$\eta_{12,t_0} + \Phi_{22,z} = -A_{,t_1} e^{i\theta} - 2ik\omega \left[\frac{(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)}{\rho_2\omega^2} \right] A^2 e^{2i\theta} + cc \text{ при } z = 0 \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
\eta_{22,t_0} + \Phi_{22,z} &= -\frac{\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2}{\rho_2\omega^2} A_{,t_1} e^{i\theta} - \\
&- 2ik\omega \left(\frac{(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2)(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)}{\rho_2^2\omega^4 \cosh kh_2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2)^2 \sinh kh_2}{\rho_2^2\omega^4 \cosh kh_2} \right) A^2 e^{2i\theta} + cc \\
&\text{при } z = h_2 \quad (2.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{22,t_0} + \Phi_{32,z} &= -\frac{\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2}{\rho_2\omega^2} A_{,t_1} e^{i\theta} + \\
&+ 2ik\omega \left[\frac{(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2)^2 \cosh kh_3}{\rho_2^2\omega^4 \sinh kh_3} \right] A^2 e^{2i\theta} + cc \\
&\text{при } z = h_2 \quad (2.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_1\Phi_{12,t_0} - \rho_2\Phi_{22,t_0} + (\rho_1 - \rho_2)\eta_{12} - T_1\eta_{12,x_0x_0} = \\
& = 0.5 \left[\rho_2 \left(\frac{(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)^2}{\rho_2^2\omega^2} \right) - \rho_2\omega^2 \right] A\bar{A} + \\
& + \left[\frac{i\rho_1\omega^2 - i(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)}{\omega k} A_{,t_1} - 2iT_1kA_{,x_1} \right] e^{i\theta}
\end{aligned}$$

$$+ \left[(\rho_1 - \rho_2) \omega^2 + 0.5 \rho_2 \left(\frac{(\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3)^2}{\rho_2^2 \omega^2} - \omega^2 \right) \right] A^2 e^{2i\theta} + cc \text{ при } z = 0 \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 \Phi_{22, t_0} - \rho_3 \Phi_{32, t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{22} - T_2 \eta_{22, x_0 x_0} = \\ & = 0.5 \left[(\rho_2 - \rho_3) \left(\frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)^2}{\rho_2^2 \omega^2} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \rho_3 \left(\frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \cosh kh_3}{\rho_2 \omega \sinh kh_3} \right)^2 - \right. \\ & \quad \left. - \rho_2 \left(\frac{(\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) + (\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega \cosh kh_2} \right)^2 \right] A \bar{A} + \\ & \quad + \left[\frac{i \rho_2 ((\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) + (\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \sinh kh_2)}{\rho_2 \omega k \cosh kh_2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{i \rho_3 (\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \cosh kh_3}{\rho_2 \omega k \sinh kh_3} \right] A_{, t_1} + \\ & \quad + \left(- \frac{(i \rho_2 h_2 + i \rho_3 h_3) (\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)}{\rho_2 k} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2iT_2 k (\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)}{\rho_2 \omega^2} \right) A_{, x_1} \Big] e^{i\theta} + \\ & \quad + \left[(1.5 \rho_2 - 1.5 \rho_3) \frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)^2}{\rho_2^2 \omega^2} - \right. \\ & \quad \left. - 0.5 \rho_2 \left(\frac{(\rho_2 \omega^2 \sinh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \cosh kh_2)}{\rho_2 \omega} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + 0.5 \rho_3 \left(\frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \cosh kh_3}{\rho_2 \omega \sinh kh_3} \right)^2 \right] A^2 e^{2i\theta} + cc \\ & \text{при } z = h_2 \quad (2.35) \end{aligned}$$

тут і далі cc – комплексно спряжена величина до попередніх членів;
 $A_{,x_1} = \partial A / \partial x_1$, $A_{,t_1} = \partial A / \partial t_1$ – частинні похідні обвідної хвильового пакета на
нижній поверхні контакту.

Розв'язок системи (2.27)-(2.35) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}\varphi_{12} &= \left(B_{10}^{(2)} + B_{11}^{(2)} \cdot z \right) e^{i\theta + kz} + B_{20}^{(2)} e^{2i\theta + 2kz} + cc, \\ \varphi_{22} &= \left(C_{10}^{(2)} + C_{11}^{(2)} \cdot z \right) e^{i\theta + k(h_2 - z)} + C_{20}^{(2)} e^{2i\theta + 2k(h_2 - z)} + \left(D_{10}^{(2)} + D_{11}^{(2)} \cdot z \right) e^{i\theta - k(h_2 - z)} + \\ &\quad + D_{20}^{(2)} e^{2i\theta - 2k(h_2 - z)} + cc, \\ \varphi_{32} &= E_{10}^{(2)} \cosh k(h_2 + h_3 - z) e^{i\theta} + E_{11}^{(2)} \cdot (h_2 + h_3 - z) \sinh k(h_2 + h_3 - z) e^{i\theta} + \\ &\quad + E_{20}^{(2)} \cosh 2k(h_2 + h_3 - z) e^{2i\theta} + cc, \\ \eta_{12} &= F_0^{(2)} + F_1^{(2)} e^{i\theta} + F_2^{(2)} e^{2i\theta} + cc, \\ \eta_{22} &= G_0^{(2)} + G_1^{(2)} e^{i\theta} + G_2^{(2)} e^{2i\theta} + cc,\end{aligned}\tag{2.36}$$

де $B_{ij}^{(2)}$, $C_{ij}^{(2)}$, $D_{ij}^{(2)}$, $E_{ij}^{(2)}$, $F_i^{(2)}$, $G_i^{(2)}$ – невідомі коефіцієнти.

Підставивши вирази для невідомих функцій (2.36), а також розв'язки задачі першого наближення (2.20) у рівняння (2.27)-(2.29), нескладно отримати коефіцієнти

$$\begin{aligned}B_{11}^{(2)} &= -\frac{\omega}{k} A_{,x_1}, \\ C_{11}^{(2)} &= \frac{\omega}{2k} \left(\frac{(\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3)}{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)}{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 e^{kh_2}} \right) A_{,x_1}, \\ D_{11}^{(2)} &= -\frac{\omega}{2k} \left(\frac{(\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3)}{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)}{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 e^{-kh_2}} \right) A_{,x_1},\end{aligned}\tag{2.37}$$

$$E_{11}^{(2)} = \frac{\omega}{k} \left(\frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)}{\rho_2 \omega^2 \sinh kh_3} \right) A_{,x_1} .$$

Підставляючи (2.36) та (2.37) в умови (2.30)-(2.35) і прирівнюючи вирази при однакових функціях, приходимо до двох незалежних систем рівнянь відносно інших невідомих коефіцієнтів. Таким чином, прирівнявши вирази при функції $e^{i\theta}$, отримали систему відносно коефіцієнтів $B_{10}^{(2)}$, $C_{10}^{(2)}$, $D_{10}^{(2)}$, $E_{10}^{(2)}$, $F_1^{(2)}$, $G_1^{(2)}$

$$\begin{aligned} -kB_{10}^{(2)} - i\omega F_1^{(2)} &= b_1, \\ k e^{kh_2} C_{10}^{(2)} - k e^{-kh_2} D_{10}^{(2)} - i\omega F_1^{(2)} &= b_2, \\ kC_{10}^{(2)} - kD_{10}^{(2)} - i\omega G_1^{(2)} &= b_3, \\ k \sinh kh_3 E_{10}^{(2)} - i\omega G_1^{(2)} &= b_4, \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} -i\rho_1 \omega B_{10}^{(2)} + i\rho_2 \omega e^{kh_2} C_{10}^{(2)} + i\rho_2 \omega e^{-kh_2} D_{10}^{(2)} + (\rho_1 - \rho_2 + T_1 k^2) F_1^{(2)} &= b_5, \\ -i\rho_2 \omega C_{10}^{(2)} - i\rho_2 \omega D_{10}^{(2)} + i\rho_3 \omega \cosh kh_3 E_{10}^{(2)} + (\rho_2 - \rho_3 + T_2 k^2) G_1^{(2)} &= b_6, \end{aligned}$$

де вільні члени

$$\begin{aligned} b_1 &= -A_{,t_1} - \frac{\omega}{k} A_{,x_1} , \\ b_2 &= -A_{,t_1} - \frac{\omega}{k} A_{,x_1} , \\ b_3 &= - \frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)}{\rho_2 \omega^2} A_{,t_1} - \\ & - \left(\frac{\rho_2 \omega^2 (kh_2 \sinh kh_2 + \cosh kh_2) + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) (kh_2 \cosh kh_2 + \sinh kh_2)}{k\rho_2 \omega} \right) A_{,x_1} , \\ b_4 &= - \frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)}{\rho_2 \omega^2} A_{,t_1} - \\ & - \left(\frac{((\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2))}{k\rho_2 \omega} \cdot \left(1 + \frac{kh_3 \cosh kh_3}{\sinh kh_3} \right) \right) A_{,x_1} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_5 &= -\frac{i(\rho_1\omega^2 - (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3))}{k\omega} A_{,t_1} + 2iT_1kA_{,x_1}, \\
b_6 &= \left(\frac{i\rho_2(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)}{\rho_2\omega^2k \cosh kh_2} + \left(i\rho_2 \frac{\sinh kh_2}{\cosh kh_2} + i\rho_3 \frac{\cosh kh_3}{\sinh kh_3} \right) \times \right. \\
&\quad \times \left. \frac{(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2)}{\rho_2\omega^2k} \right) A_{,t_1} + \\
&\quad + \left(\frac{2iT_2k \left((\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2) \right)}{\rho_2\omega^2} - \right. \\
&\quad \left. -(\rho_2h_2 + \rho_3h_3) \frac{i \left((\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2) \right)}{k\rho_2} \right) A_{,x_1}.
\end{aligned}$$

Система (2.38) несумісна, але при $F_1^{(2)}=0$ умову її розв'язності можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix}
-k & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\
0 & ke^{kh_2} & -ke^{-kh_2} & 0 & b_2 & 0 \\
0 & k & -k & 0 & b_3 & -i\omega \\
0 & 0 & 0 & k \sinh kh_3 & b_4 & -i\omega \\
-i\rho_1\omega & i\rho_2\omega e^{kh_2} & i\rho_2\omega e^{-kh_2} & 0 & b_5 & 0 \\
0 & -i\rho_2\omega & -i\rho_2\omega & i\rho_3\omega \cosh kh_3 & b_6 & \rho_2 - \rho_3 + T_2k^2
\end{vmatrix} = 0.$$

Виділивши доданки з похідними $A_{,x_1}$, $A_{,t_1}$ від обвідної хвильового пакета, умову розв'язності перепишемо так

$$V_1A_{,t_1} + V_2A_{,x_1} = 0, \quad (2.39)$$

де $V_i (i=1,2)$ коефіцієнти, що залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$. У Додатку А представлено програму відповідних символічних обчислень.

Якщо умова (2.39) виконується, то система відносно $B_{10}^{(2)}, C_{10}^{(2)}, D_{10}^{(2)}, E_{10}^{(2)}, G_1^{(2)}$

$$-kB_{10}^{(2)} = b_1,$$

$$ke^{kh_2} C_{10}^{(2)} - ke^{-kh_2} D_{10}^{(2)} = b_2,$$

$$kC_{10}^{(2)} - kD_{10}^{(2)} - i\omega G_1^{(2)} = b_3,$$

$$k \sinh kh_3 E_{10}^{(2)} - i\omega G_1^{(2)} = b_4,$$

$$-i\rho_2\omega C_{10}^{(2)} - i\rho_2\omega D_{10}^{(2)} + i\rho_3\omega \cosh kh_3 E_{10}^{(2)} + (\rho_2 - \rho_2 + T_2 k^2) G_{10}^{(2)} = b_6$$

розв'язна. Її розв'язок отримано матричним способом. Усі розрахунки виконані в пакеті символьних обчислень і наведені у Додатку А.

Система відносно коефіцієнтів $B_{20}^{(2)}, C_{20}^{(2)}, D_{20}^{(2)}, E_{20}^{(2)}, F_2^{(2)}, G_2^{(2)}$, отримана після прирівнювання виразів при функції $e^{2i\theta}$, сумісна і має вигляд

$$-2kB_{20}^{(2)} - 2i\omega F_2^{(2)} = n_1,$$

$$2ke^{2kh_2} C_{20}^{(2)} - 2ke^{-2kh_2} D_{20}^{(2)} - 2i\omega F_2^{(2)} = n_2,$$

$$2kC_{20}^{(2)} - 2kD_{20}^{(2)} - 2i\omega G_2^{(2)} = n_3,$$

$$2k \sinh(2kh_3) E_{20}^{(2)} - 2i\omega G_2^{(2)} = n_4, \quad (2.40)$$

$$-2i\rho_1\omega B_{20}^{(2)} + 2i\rho_2\omega e^{2kh_2} C_{20}^{(2)} + 2i\rho_2\omega e^{-2kh_2} D_{20}^{(2)} + (\rho_1 - \rho_2 + T_1 k^2) F_2^{(2)} = n_5,$$

$$-2i\rho_2\omega C_{20}^{(2)} - 2i\rho_2\omega D_{20}^{(2)} + 2i\rho_3\omega \cosh(2kh_3) E_{20}^{(2)} + (\rho_2 - \rho_2 + T_2 k^2) G_2^{(2)} = n_6,$$

де $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$, – вільні члени системи (2.40) і мають вигляд

$$n_1 = -2ik\omega A^2,$$

$$n_2 = -2ik\omega \frac{(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3)}{\rho_2\omega^2} A^2,$$

$$n_3 = -2ik \left(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2 \right) \times \\ \times \frac{(\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) + (\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \sinh kh_2}{\rho_2^2\omega^3 \cosh kh_2} A^2,$$

$$n_4 = 2ik \frac{\left(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2 \right)^2 \cosh kh_3}{\rho_2^2\omega^3 \sinh kh_3} A^2$$

$$\begin{aligned}
n_5 &= 0.5 \left((\rho_1 - \rho_2) \omega^2 + 0.5 \rho_2 \left(\frac{(\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3)^2}{\rho_2^2 \omega^2} - \omega^2 \right) \right) A^2, \\
n_6 &= \left((1.5 \rho_2 - 1.5 \rho_3) \left(\frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)}{\rho_2 \omega} \right)^2 - \right. \\
&\quad \left. - 0.5 \rho_2 \left(\frac{(\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) + (\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega k \cosh kh_2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 0.5 \rho_3 \left(\frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \cosh kh_3}{\rho_2 \omega \sinh kh_3} \right)^2 \right) A^2.
\end{aligned}$$

Розв'язок системи (2.40) знайдено матричним способом з використанням пакетів символьних обчислень та наведений у Додатку А.

Із останніх двох умов (2.34), (2.35), прирівнявши вирази при e^0 , отримано значення коефіцієнтів $F_0^{(2)}$ і $G_0^{(2)}$

$$F_0^{(2)} = \left(\frac{0.5}{(\rho_1 - \rho_2)} \left(-\rho_2 \left(\frac{(\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3)^2}{\rho_2^2 \omega^2} \right) + \rho_2 \omega^2 \right) \right) A \bar{A}, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
G_0^{(2)} &= \left(\frac{0.5}{(\rho_2 - \rho_3)} \left(-(\rho_2 - \rho_3) \left(\frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2)^2}{\rho_2^2 \omega^2} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \rho_3 \left(\frac{(\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \cosh kh_3}{\rho_2 \omega \sinh kh_3} \right)^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \rho_2 \left(\frac{(\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) + (\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega \cosh kh_2} \right)^2 \right) \right) A \bar{A}.
\end{aligned} \quad (2.42)$$

Отже, розв'язки другого наближення запишуться так

$$\begin{aligned}
\eta_{12} &= F_0 A \bar{A} + \Lambda_1 A^2 e^{2i\theta} + cc, \\
\eta_{22} &= G_0 A \bar{A} + S_1 A_{,t_1} e^{i\theta} + S_2 A_{,x_1} e^{i\theta} + \Lambda_2 A^2 e^{2i\theta} + cc,
\end{aligned}$$

де $S_1, S_2, \Lambda_1, \Lambda_2$ – коефіцієнти, що залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$ (додаток А). Причому, виходячи з умови розв’язності (2.39), $S_1 = S_2 = 0$.

Таким чином, у цьому розділі отримано умову розв’язності задачі другого наближення та її розв’язки. Нижче проведемо аналіз особливостей поширення хвиль вздовж поверхонь контакту з урахуванням першого лінійного та другого слабконелінійного наближень, а також наведемо результати дослідження зміни форми хвильового пакету на поверхнях контакту у залежності від фізичних та геометричних параметрів.

2.4. Особливості поширення хвиль вздовж поверхонь контакту

2.4.1. Форма поверхонь контакту у рамках задачі першого наближення

Нехай A та B – це сталі, які визначають амплітуди гармонік з частотами ω_1 та ω_2 на нижній та верхній поверхнях контакту відповідно, тоді зв’язок між амплітудами A' та B' хвиль-відгуків на хвилі на нижній та верхній поверхнях контакту, можна визначити співвідношеннями

$$A' = \frac{\rho_2 \omega_1^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega_1^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega_1^2} A = a_1 A, \quad (2.44)$$

$$B' = \frac{\rho_2 \omega_2^2}{\rho_2 \omega_2^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega_2^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2} B = a_2 B. \quad (2.45)$$

Відхилення поверхонь контакту у першому наближенні складається з суми двох гармонік:

$$\eta_{11} = A \cos(kx - \omega_1 t) + a_2 B \cos(kx - \omega_2 t), \quad (2.46)$$

$$\eta_{21} = a_1 A \cos(kx - \omega_1 t) + B \cos(kx - \omega_2 t), \quad (2.47)$$

тут A і B є сталими, які визначають амплітуди гармонік з частотами ω_1 та ω_2 .

На рис. 2.8а–в представлено картини хвильового руху на нижній $\eta_1(x, t)$ та верхній $\eta_2(x, t)$ внутрішніх поверхнях контакту для таких значень параметрів

$k=1$, $\rho_1=1$, $\rho_2=0.9$, $\rho_3=0.8$, $h_2=1$, $h_3=1$ при різних значеннях амплітуд хвиль на поверхнях контакту A і B та у різні моменти часу t .

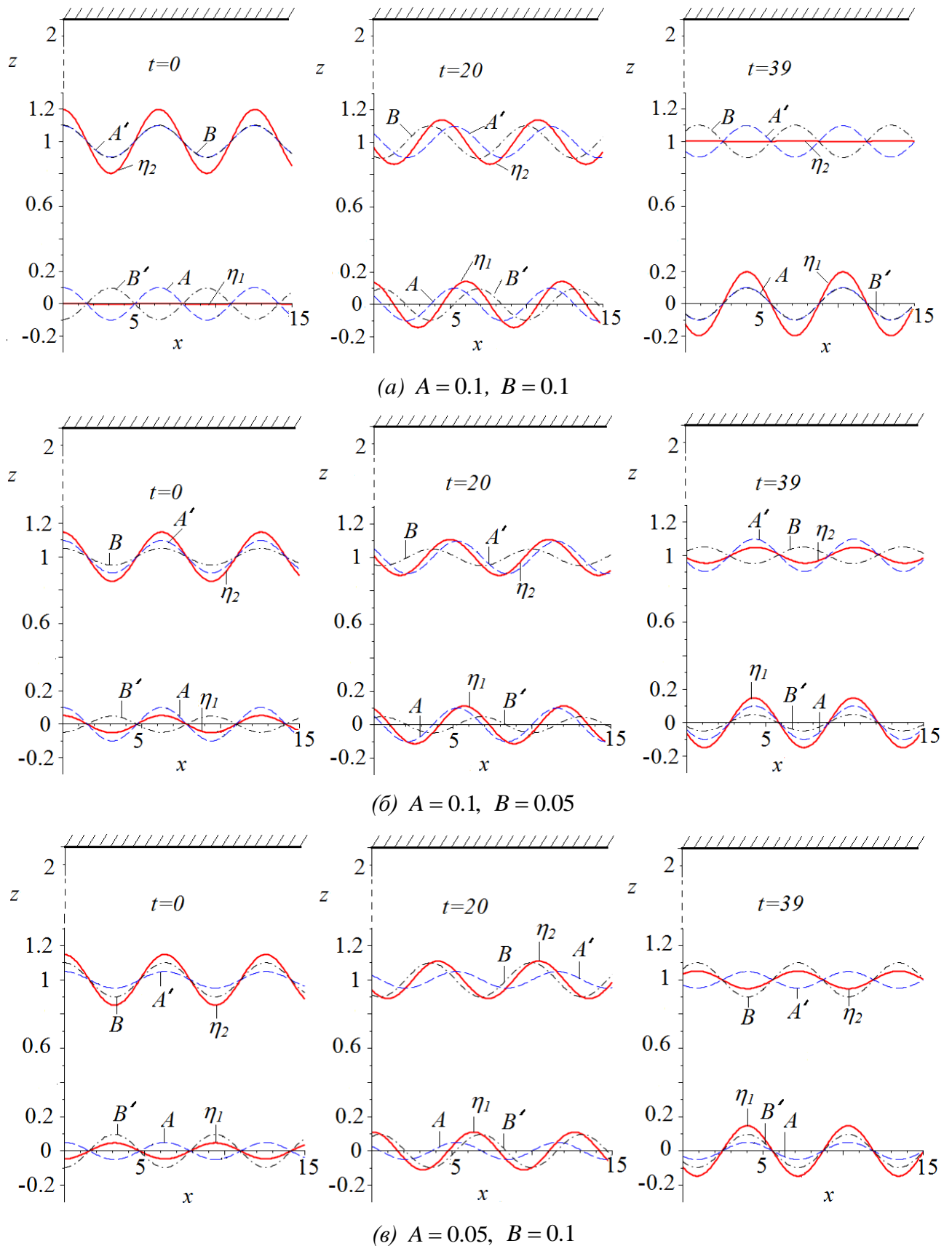
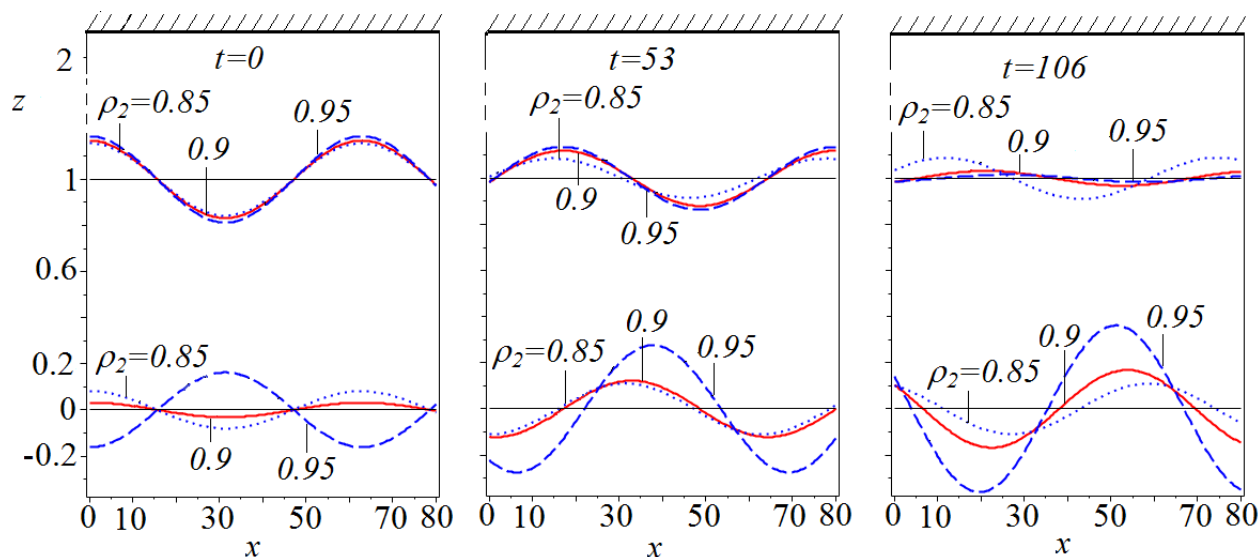
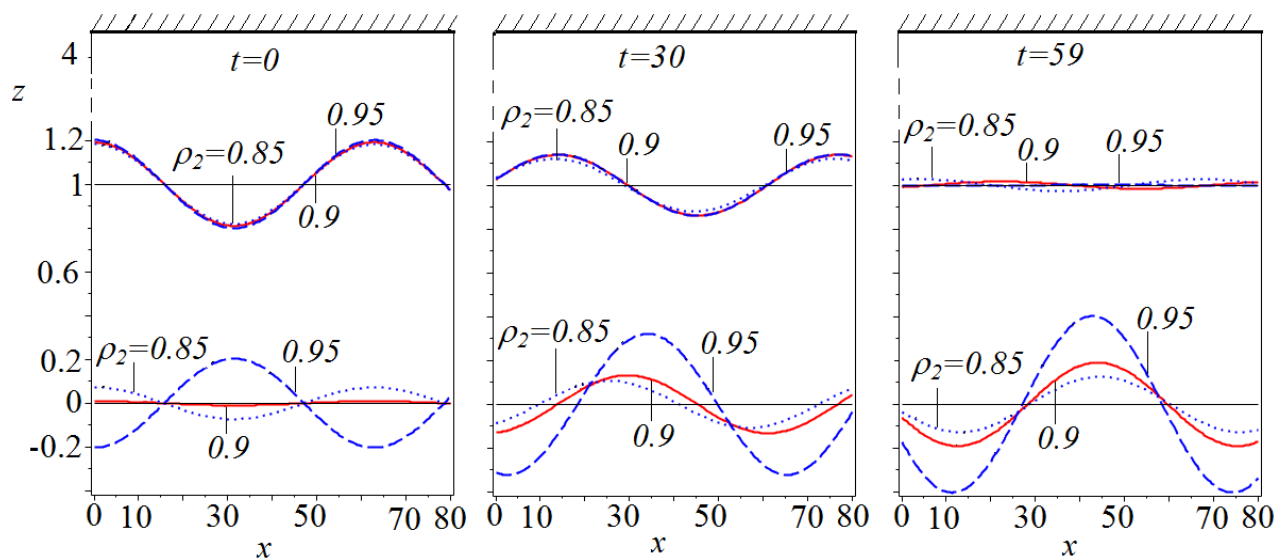


Рис. 2.8. Відхилення поверхонь контакту $\eta_1(x,t)$ та $\eta_2(x,t)$ у різні моменти часу t

На графіках (рис. 2.8а–е) представлено структуру хвильових процесів на нижній та верхній поверхнях контакту, де видно яким чином внесок основних хвиль та хвиль-відгуків впливає на максимальне відхилення поверхонь контакту.



(а) $h_3 = 1$



(б) $h_3 = 3$

Рис. 2.9. Відхилення поверхонь контакту $\eta_1(x, t)$ та $\eta_2(x, t)$ у різні моменти часу t для різних значень товщини верхнього шару h_3

На рис. 2.9а–б представлено картини хвильового руху на нижній внутрішній поверхні контакту $\eta_1(x, t)$ та верхній внутрішній поверхні контакту

$\eta_2(x, t)$ для таких значень параметрів $k = 0.1$, $\rho_2 = 0.9$, $\rho_1 = 1$, $\rho_3 = 0.8$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1; 3$, $A = 0.1$, $B = 0.1$ при різних значеннях густини середнього шару $\rho_2 = 0.85, 0.9, 0.95$ та у різні моменти часу t .

Як видно з рис. 2.9а-б за рівнозначних умов, зміна густини середнього шару має суттєвий вплив на амплітуду відхилення як верхньої, так і нижньої поверхонь контакту, причому з наближенням значення густини середнього шару ρ_2 до значення $\rho_1 = 1$ цей вплив є більш вираженим на нижній поверхні контакту.

Для заданих параметрів гідродинамічної системи для обох випадків товщини верхнього шару $h_3 = 1$ та $h_3 = 3$ зміна густини середнього шару $\rho_2 = 0.85, 0.9, 0.95$ має істотний вплив на амплітуду нижньої поверхні контакту. Що ж стосується верхньої поверхні контакту, то на її відхилення впливає товщина верхнього шару h_3 . Зокрема, при $h_3 = 1$ та при густині $\rho_2 = 0.85$ в окремі моменти часу амплітуда відхилення істотно більша за амплітуди при $\rho_2 = 0.9$ і $\rho_2 = 0.95$ (рис. 2.9а), що при більшій товщині верхнього шару $h_3 = 3$ не спостерігається.

2.4.2. Аналіз форми хвильового пакета на поверхнях контакту з урахуванням розв'язків другого наближення

Для визначення форми відхилення поверхонь контакту важливий знак коефіцієнтів Λ_1 та Λ_2 при других гармоніках на поверхнях. Використовуючи вирази для першого (2.20) та другого (2.43) наближень відхилення поверхонь контакту, побудуємо області знакосталості Λ_1 і Λ_2 та проаналізуємо форму хвиль на поверхнях контакту

$$\eta_1(x, t) = a \cos(kx - \omega_1 t) + \alpha a^2 [0.5 \cdot \Lambda_1 \cos 2(kx - \omega_1 t) + F_0],$$

$$\eta_2(x, t) = a \left[\frac{\rho_2 \omega_2^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega_2^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega_2^2} \right] \cos(kx - \omega_2 t) + \alpha a^2 [0.5 \cdot \Lambda_2 \cos 2(kx - \omega_2 t) + G_0].$$

Дослідження будемо проводити при фіксованому значенні густини нижнього шару $\rho_1 = 1$. Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Густина нижнього півпростору ρ_1 і середнього шару ρ_2 є фіксованими та дорівнюють 1 і 0.9 відповідно, а густина верхнього шару ρ_3 змінюється від 0 до ρ_2 . Значення інших параметрів системи такі: $0 \leq k \leq 3.5$, $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$.

Форма відхилення нижньої поверхні контакту. Форма відхилення нижньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$ залежить від знака коефіцієнта Λ_1 при другій гармоніці. Аналіз знака Λ_1 виявив, що на площині (ρ_3, k) існують криві L_1 та L_2 , вздовж яких Λ_1 рівна нулю, та крива L_3 , в околі якої Λ_1 набуває як завгодно великих значень. При переході через криві L_1 , L_2 та L_3 знак коефіцієнта Λ_1 змінюється на протилежний.

Як видно на рис.2.10, криві L_1 , L_2 та L_3 розбивають площину (ρ_3, k) на п'ять областей. В областях S_1, S_3, S_5 , де коефіцієнт Λ_1 при другій гармоніці набуває додатних значень, мають місце хвилі з загостреними гребнями та затупленими підосвами. У двох інших областях S_2, S_4 , де $\Lambda_1 < 0$, спостерігаються хвилі із затупленими гребнями та гострими підосвами.

Виявлено, що зі зростанням товщини верхнього шару h_3 збільшується площа області S_2 , де довгі хвилі мають \cap - подібну форму (рис.2.10а-в). Дослідження також показало, що між областями S_1 та S_3 вклинюється вузька частина області S_2 , а між областями S_2 та S_4 – вузька частина області S_3 (рис.2.10в).

На рис. 2.10в відмічені точки А та В, для яких побудовано графіки форми відхилення нижньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$ (рис.2.11). Ці точки обрані для дослідження зміни форми хвилі при переході через криву L_3 . В околі кривої L_3 значення Λ_1 змінює знак з плюса на мінус та набуває як завгодно великих значень, при цьому спостерігається істотний вплив другої гармоніки на форму поверхні контакту.

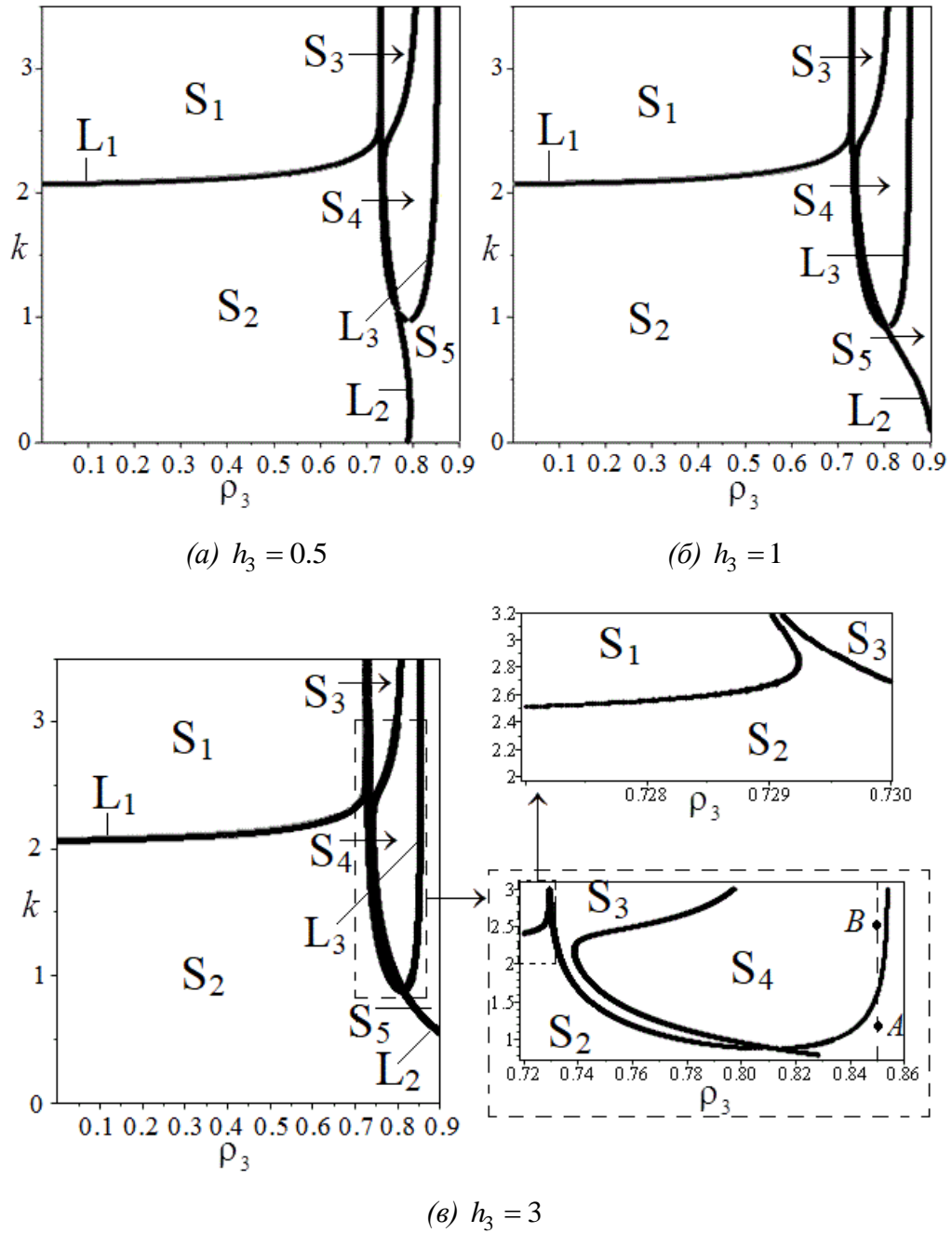


Рис.2.10. Области знакосталості Λ_1 на площині (ρ_3, k)

Графіки форми відхилення нижньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$ (рис.2.11) побудовані для частоти хвильового пакету ω_1 та параметрів системи $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $\rho_3 = 0.85$, $h_2 = 1$, $h_3 = 3$, $T_1 = T_2 = 0$, $a = 0.15$, $\alpha = 0.1$ у точці А, де $k = 1.2$ та точці В, де $k = 2.5$ (див. рис.2.10в.)

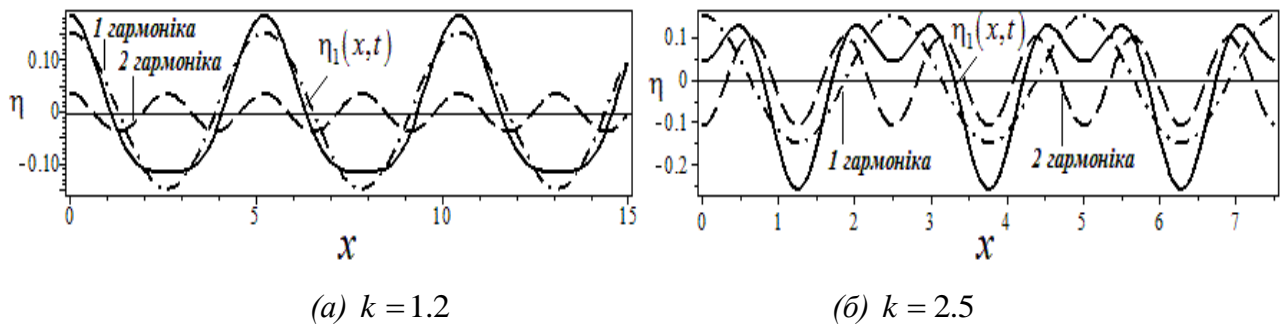


Рис.2.11. Графік форми відхилення нижньої внутрішньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$

Як видно з рис.2.11а, амплітуда першої гармоніки більша за амплітуду другої гармоніки, а період другої гармоніки є вдвічі меншим, тому накладання мінімуму першої гармоніки та максимуму другої гармоніки призводить до затуплення підошов поверхні контакту. При накладанні максимуму першої гармоніки та наступного максимуму другої гармоніки спостерігається загострення гребеня хвилі. Отже, форма відхилення нижньої поверхні контакту в області S_5 набуває U - подібної форми.

Графік форми відхилення поверхні контакту, представлений на рис.2.11б, демонструє форму хвилі в області S_4 , де Λ_1 набуває від'ємних значень. Тут можемо бачити картину, коли при накладанні мінімумів першої та другої гармонік спостерігається загострення підошов хвилі, а накладання максимуму першої гармоніки та наступного мінімуму другої гармоніки приводить до затуплення гребеня хвилі. Отже, в області S_4 спостерігаються \cap - подібні хвилі.

У ході дослідження також виявлено, що в межах однієї області спостерігається істотний вплив значення хвильового числа k на значення амплітуд гармонік при однакових інших значеннях параметрів системи.

Форма відхилення верхньої поверхні контакту. На рис.2.12 побудовано області знакосталості коефіцієнта Λ_2 для частоти хвильового пакета ω_2 та наступних значень параметрів: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $0 \leq \rho_3 \leq \rho_2$, $0 \leq k \leq 4.5$, $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$

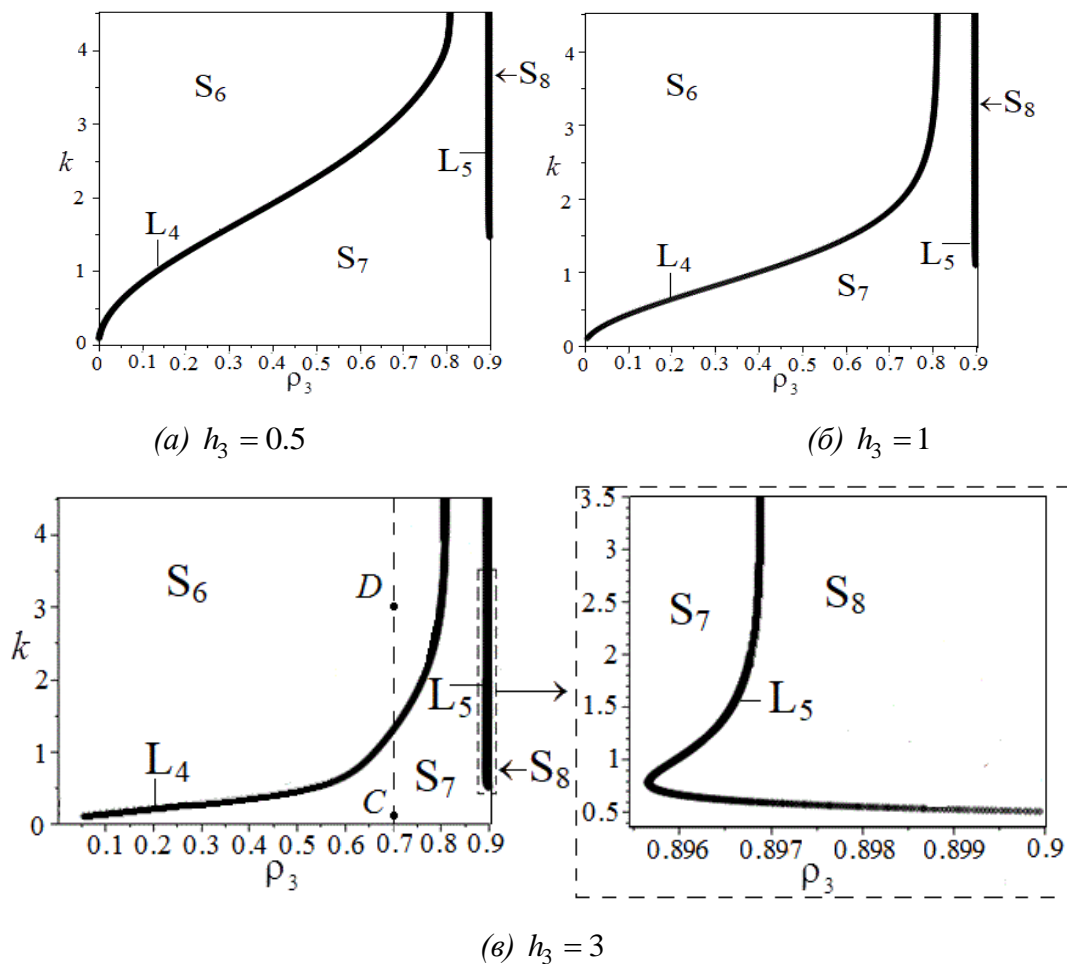


Рис.2.12. Области знакосталості Λ_2 на площині (ρ_3, k)

Як видно з рис.2.12, криві L_4 та L_5 , вздовж яких Λ_2 рівна нулю, розбивають площину (ρ_3, k) на три області. В областях S_6, S_8 Λ_2 набуває додатних значень, а в області S_7 $\Lambda_2 < 0$. Причому, площа області S_7 зменшується зі зростанням значення товщини верхнього шару h_3 . Кривих, в околі яких Λ_2 набуває як завгодно великих значень, не виявлено.

Побудуємо графіки відхилення верхньої поверхні контакту для значень параметрів системи: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $\rho_3 = 0.7$, $h_2 = 1$, $h_3 = 3$, $T_1 = T_2 = 0$, $a = 0.15$, $\alpha = 0.1$ у точках C та D (див. рис. 2.12a), у яких $k = 0.1$ та $k = 3$ відповідно.

Як видно з рис.2.13a, у випадку, коли коефіцієнт Λ_2 набуває від'ємних значень, спостерігається накладання мінімумів першої та другої гармонік, що призводить до загострення підошов хвилі, а накладання максимуму першої

гармоніки та наступного мінімуму другої гармоніки призводить до затуплення гребеня хвилі.

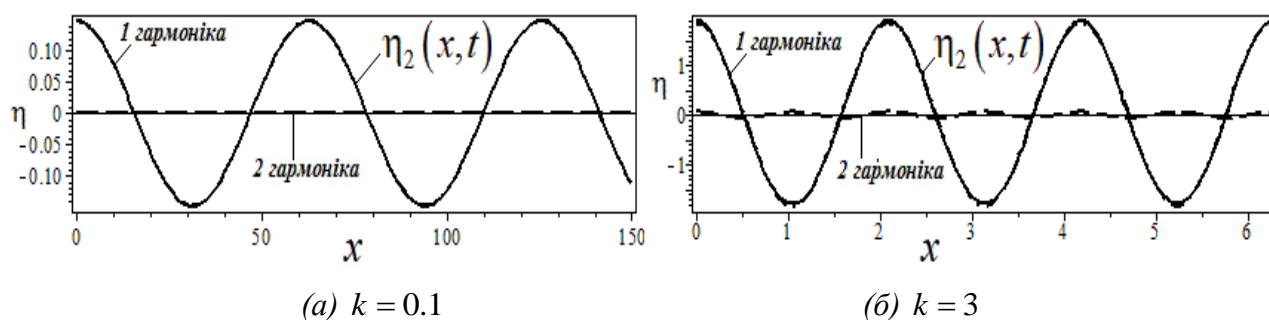


Рис.2.13. Графік форми відхилення верхньої внутрішньої поверхні контакту $\eta_2(x, t)$

На рис.2.13б представлено випадок, коли Λ_2 додатне, при цьому накладання максимумів першої та другої гармонік призводить до загострення гребеня хвилі, а накладання мінімуму першої гармоніки та наступного максимуму другої гармоніки – до затуплення підшов хвилі. Отже, в областях S_6, S_8 хвиля має U - подібну, а в області S_7 – \cap - подібну форму.

Випадок 2. Зафіксуємо значення густини нижнього півпростору $\rho_1 = 1$ та верхнього шару $\rho_3 = 0.8$, а значення густини середнього шару ρ_2 змінюватимемо від ρ_3 до ρ_1 . Значення інших параметрів такі: $0 \leq k \leq 3.5$, $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$.

Форма відхилення нижньої поверхні контакту. На рис.2.14 представлені області знакосталості коефіцієнта Λ_1 при другій гармоніці на нижній поверхні контакту. Графіки побудовані за таких параметрів систем: $\rho_1 = 1$, $\rho_3 \leq \rho_2 \leq \rho_1$, $\rho_3 = 0.8$, $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$.

Виявлено криві L_6, L_7 та L_8 , які розбивають площину (ρ_2, k) на п'ять областей і при переході через які значення коефіцієнту Λ_1 при другій гармоніці на нижній поверхні контакту змінюється на протилежне. При цьому, вздовж кривих L_7 та L_8 значення Λ_1 рівне нулю, а вздовж кривої L_6 набуває як завгодно великих значень. В областях S_9, S_{11}, S_{13} (де $\Lambda_1 > 0$) мають місце хвилі з U -

подібною формою. В областях S_8, S_{10} (де $\Lambda_1 < 0$) форма хвилі має \cap - подібну форму. Відмітимо, що як і у випадку 1 для Λ_1 (рис.2.10), спостерігається вплив товщини верхнього шару h_3 на площу області S_{10} , а саме, зі зростанням значення товщини верхнього шару збільшилась площа області S_{10} в тій частині, де довгі хвилі мають \cap - подібну форму. Також присутні вклинювання вузьких областей з іншим знаком коефіцієнта.

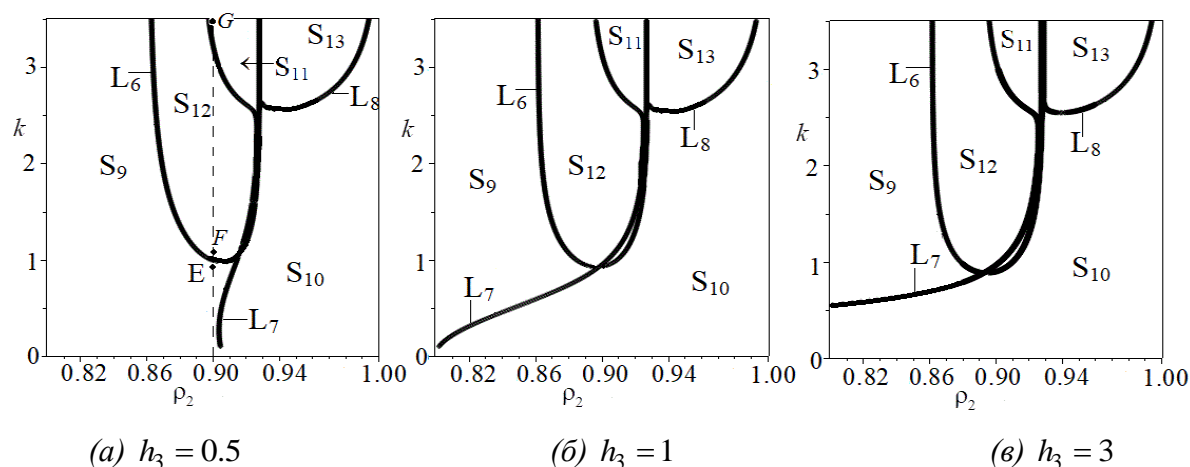


Рис.2.14. Области знакосталості Λ_1 на площині (ρ_2, k)

На рис. 2.14а позначені три точки E, F, G ($k=0.9, k=1.1, k=3.5$, відповідно), для яких побудовано графіки (рис.2.15) форми відхилення нижньої поверхні контакту $\eta_1(x, t)$ за таких параметрів системи: $\rho_1=1, \rho_2=0.9, \rho_3=0.85, h_2=1, h_3=0.5, T_1=T_2=0, a=0.15$.

Графіки форми відхилення нижньої поверхні контакту, зображені на рис. 2.15а-б, відповідають точкам E та F , що належать областям, які розділені кривою L_6 . Точка E належить області S_9 , де коефіцієнт Λ_1 набуває додатних значень, а тому хвилі мають U - подібну форму. Точка F належить області S_{12} (де $\Lambda_1 < 0$), тому тут спостерігається \cap - подібна форма хвиль.

Графік форми відхилення поверхні, представлений на рис.2.15в, демонструє форму хвиль в області S_{11} (де $\Lambda_1 > 0$), яка відмежована від області S_{12} кривою

L_7 . Вдovж цієї кривої значення Λ_1 рівне нулю, тому в її околі спостерігається гасіння другої гармоніки.

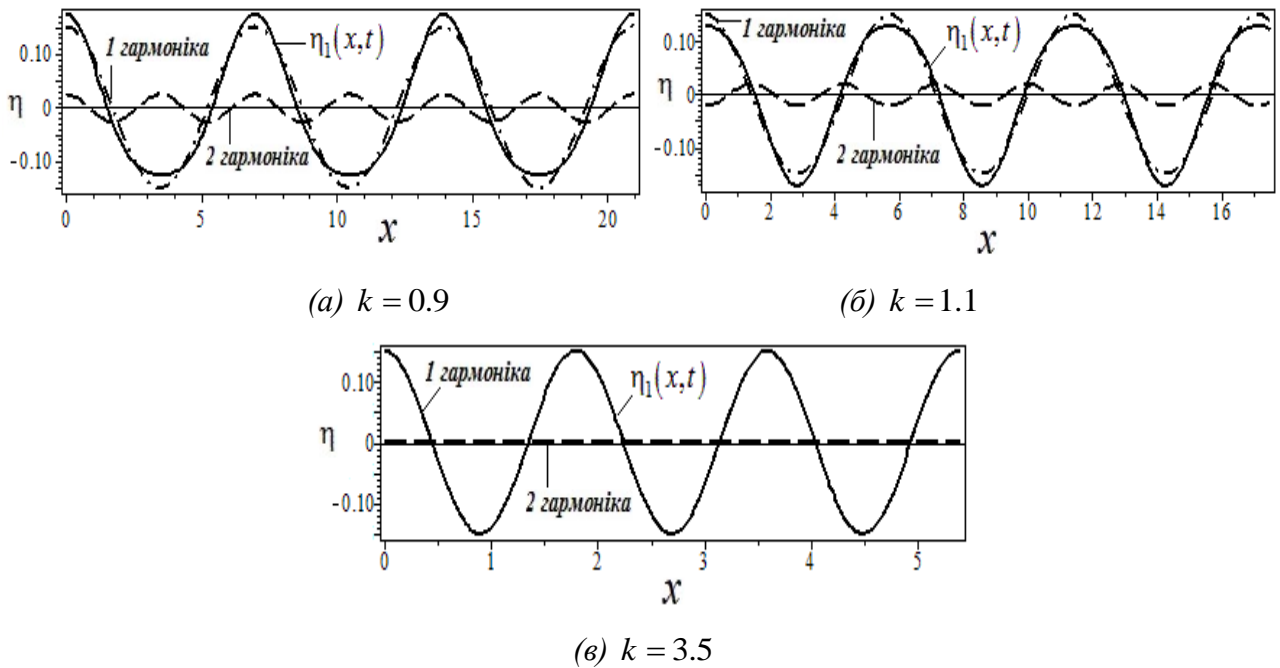


Рис. 2.15. Графіки форми відхилення нижньої поверхні контакту $\eta_1(x,t)$

Форма відхилення верхньої поверхні контакту. На рис.2.16 побудовано області знакосталості коефіцієнта Λ_2 при другій гармоніці верхньої поверхні контакту для частоти хвильового пакету ω_2 та параметрів системи: $\rho_1 = 1$, $\rho_3 \leq \rho_2 \leq \rho_1$, $\rho_3 = 0.8$, $0 \leq k \leq 4.5$, $h_2 = 1$, $T_1 = T_2 = 0$.

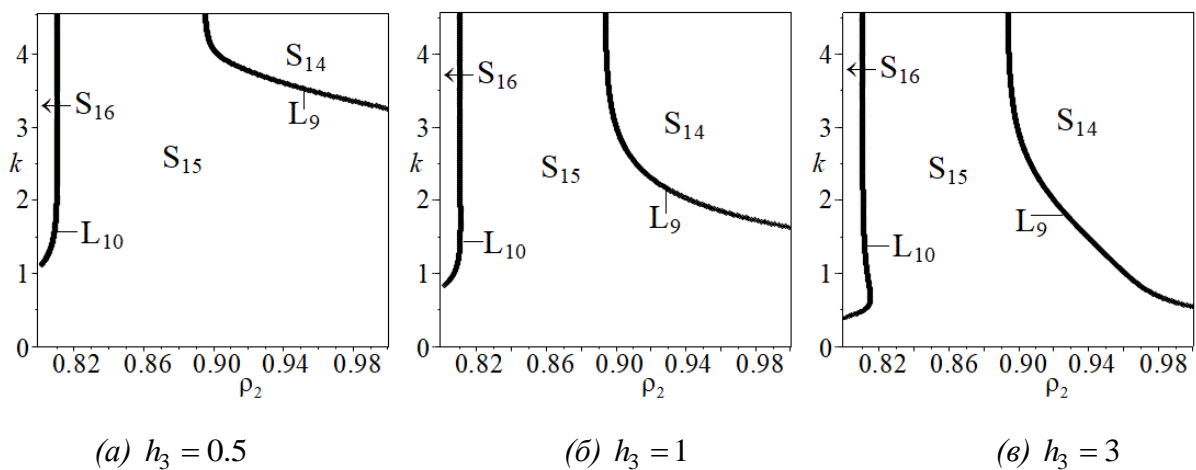


Рис.2.16. Области знакосталості Λ_2 на площині (ρ_2, k)

Виявлено дві криві L_9 та L_{10} (вдovж яких $\Lambda_2 = 0$), які розбивають площину (ρ_2, k) на три області. В областях, де Λ_2 набуває додатних значень (S_{14}, S_{16}), спостерігається U - подібна форма хвилі. В області S_{15} Λ_2 набуває від'ємних значень, тому хвилі тут приймають \cap - подібну форму. Аналогічно до випадку 1 для коефіцієнта Λ_2 (рис. 2.12), площа області S_{15} зменшується зі зростанням значення товщини верхнього шару h_3 .

2.5. Точність методу та резонанс другої гармоніки

У пункті 2.4.2, де досліджувалась форма відхилень поверхонь контакту, було виявлено криві $L_3 = 0$ та $L_6 = 0$, вдovж яких Λ_1 набуває як завгодно великих значень, що обумовлено так званим резонансом другої гармоніки [100], коли амплітуда $\eta_{12}(x, t)$, яка рівна $\alpha a^2 \Lambda_1$, зростає порівняно з амплітудою $\eta_{11}(x, t)$, яка рівна a .

На рис. 2.17 представлена крива $L_3 = 0$ при фіксованому значенні товщини середнього шару $h_2 = 1$ і двох значеннях товщини верхнього шару а) $h_3 = 1$ та б) $h_3 = 3$. Графік побудовано на площині (ρ_3, k) при фіксованих значеннях густини нижнього $\rho_1 = 1$ та середнього $\rho_2 = 0.9$ шарів. Показані також околиці кривої L_3 , де значення величини Λ_1 більше заданої величини ($|\Lambda_1| > 100$).

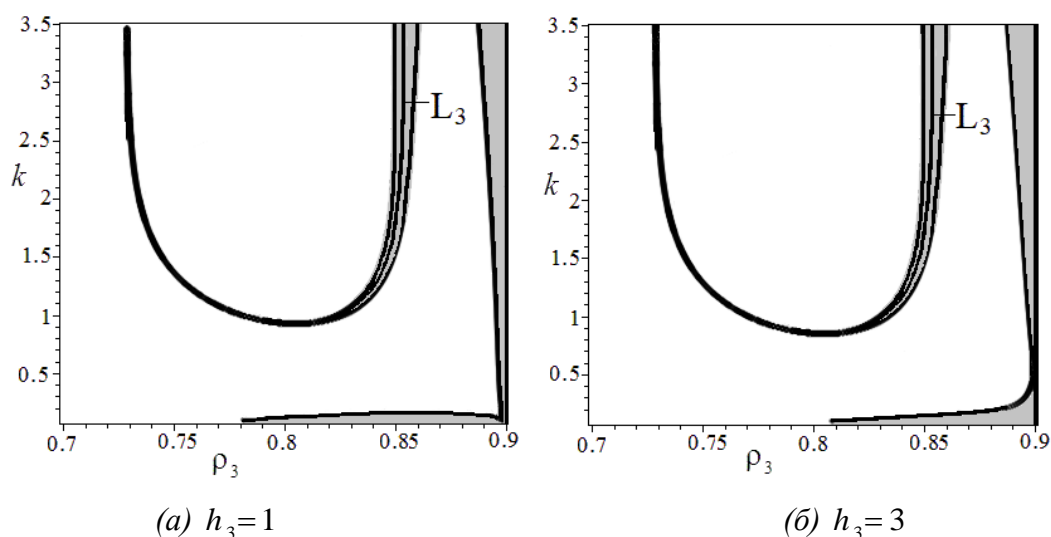


Рис. 2.17. Области резонансу другої гармоніки на нижній поверхні контакту

Відмітимо, що на верхній поверхні контакту не виявлено кривих, в околі яких спостерігався би резонанс другої гармоніки.

Аналогічні області резонансу другої гармоніки, побудовані для нижньої поверхні на площині (ρ_2, k) при фіксованих значеннях густин інших шарів ($\rho_1 = 1$ та $\rho_3 = 0.8$). На рис 2.18 представлена крива $L_6 = 0$ при фіксованому значенні товщини середнього шару $h_2 = 1$ і двох різних значеннях товщини верхнього шару а) $h_3 = 1$ та б) $h_3 = 3$, в околі якої також спостерігається резонанс другої гармоніки, коли значення величини Λ_1 більше заданої величини ($|\Lambda_1| > 100$).

У ході дослідження було виявлено області резонансу за умови співпадіння густин верхнього та середнього шарів ($\rho_2 = \rho_3 = 0.9$) тобто виродження тришарової системи у двошарову (рис. 2.17, рис. 2.18).

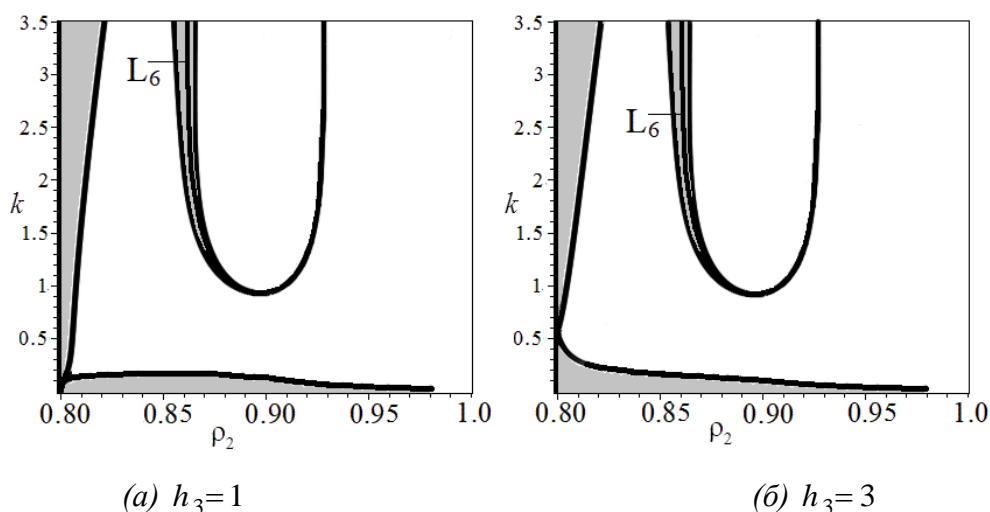


Рис. 2.18. Области резонансу другої гармоніки на нижній поверхні контакту

Області резонансу вказують на ті параметри тришарової системи, за яких друга гармоніка набуває великих значень. Це обумовлено нехтуванням в'язкості у математичній моделі задачі, а також тим, що при її розв'язуванні не враховуються наближення вищих порядків. При цьому ефект резонансу другої гармоніки у значній мірі компенсується тим, що у розвинення для відхилень

поверхонь контакту (2.16), (2.17) друге наближення входить з множником α , який є достатньо малою величиною.

Тому можемо вважати, що застосування методу багатомасштабних розвинень у повній мірі прийнятне для аналізу гідродинамічної системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» з параметрами, дослідженими у дисертаційній роботі.

Висновки до другого розділу

У другому розділі розглянуто постановку нелінійної задачі поширення та взаємодію хвильових пакетів у системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». З використанням методу багатомасштабних розвинень до третього порядку виведено перші два лінійні наближення задачі про поширення та взаємодію хвиль вздовж поверхонь контакту в даній тришаровій гідродинамічній системі. Була розв'язана задача першого наближення і отримано дисперсійне співвідношення, яке має дві пари лінійно незалежних розв'язків. Отримано умову розв'язності задачі другого наближення та знайдено її розв'язки. Проведений аналіз коренів дисперсійного рівняння виявив два граничних випадки, які підтверджують достовірність результатів.

Проаналізовано графіки залежності частот від товщини верхнього шару та від хвильового числа при різних значеннях густини середнього шару рідини з урахуванням впливу коефіцієнтів поверхневого натягу. Виявлено, що при переході системи від одного виродженого випадку до другого спостерігається якісна симетрія графіків частот центру хвильового пакета відносно значення густини середнього шару. При цьому вплив поверхневого натягу на одній із поверхонь контакту або на двох поверхнях одночасно призводить до збільшення абсолютного значення частоти центру хвильового пакета.

Досліджено залежність амплітуд хвиль-відгуків від параметрів системи. Виявлено такі ефекти і закономірності:

- при збільшенні товщини верхнього шару амплітуди хвиль-відгуків прямують до граничного значення;
- при рівних стрибках густини на поверхнях контакту взаємний вплив поширення хвилі на одній із поверхонь контакту на поширення хвилі на іншій поверхні контакту співпадає;
- якщо стрибок густини на нижній поверхні контакту є меншим за стрибок густини на верхній поверхні контакту, то хвилі-відгуки, що виникають на нижній поверхні є більшими, ніж хвилі відгуки на верхній поверхні;
- зміна густини внутрішнього шару ρ_2 від значення ρ_1 до значення ρ_3 приводить до змін амплітуд хвиль відгуків, причому для менших значень хвильового числа зростання виконуються повільніше за випадок, коли хвильове число є більшим;
- виявлені випадки співпадіння амплітуд хвиль-відгуків для різних значень хвильових чисел; зміна значення хвильового числа приводить до того, що значення амплітуд хвиль відгуків досить швидко збігаються до спільного граничного значення при значеннях товщини верхнього шару більше двох;
- зміна густини середнього шару має суттєвий вплив на амплітуду відхилення як верхньої так і нижньої поверхонь контакту, а при наближенні значення густини середнього шару до значення густини нижнього шару, цей вплив є більш вираженим на нижній поверхні контакту;
- зміна густини середнього шару має істотний вплив на амплітуду нижньої поверхні контакту, при цьому амплітуда верхньої поверхні контакту зазнає істотних змін тільки за певних властивостей системи (при зміні геометричних параметрів).

Проведений аналіз відношення амплітуд є важливим при подальшому дослідженні енергетичних процесів у досліджуваній системі адже при поширенні хвиль в багат шарових гідродинамічних системах виникає явище перекачування енергії хвиль.

Також проведено аналіз розв'язків задачі другого наближення. Для кожної частоти центра хвильового пакета побудовані області знакосталості коефіцієнта

при другій гармоніці на нижній та верхній поверхнях контакту. Виявлено такі ефекти та закономірності:

- в областях площин (ρ_2, k) та (ρ_3, k) , де коефіцієнти Λ_1 та Λ_2 других гармонік на нижній та верхній поверхні контакту відповідно набувають додатних значень, спостерігаються хвилі U - подібної форми. В іншому випадку, коли Λ_1 та Λ_2 від'ємні, хвилі набувають \cap - подібної форми;
- капілярні хвилі здебільшого набувають U - подібної форми, при цьому виявлені дві вузькі області \cap - подібної форми.
- виявлено, що зі збільшенням товщини верхнього шару збільшується площа області, де довгі хвилі мають \cap - подібну форму, а області U - подібних хвиль звужуються;
- виявлені області гасіння другої гармоніки та області істотного впливу другої гармоніки на форму поверхні контакту.

Аналізуючи розв'язки другого наближення, виявили області резонансу другої гармоніки. Такі області були виявлені на нижній поверхні контакту в околі кривих $L_3 = 0$ та $L_6 = 0$, вдовж яких Λ_1 набуває як завгодно великих значень, а також кривих $\rho_3 = 0,9$ (рис. 2.5.1) та $\rho_2 = 0,9$, коли спостерігається виродження тришарової системи у двошарову.

Виконано оцінку застосовності методу багатомасштабних розвинень до даної проблеми, у результаті чого зроблено висновок про достатню точність методу та достовірність отриманих результатів.

В наступному розділі отримано умову розв'язності третього наближення, що, разом з дисперсійним рівнянням та умовою розв'язності другого наближення, дасть змогу отримати еволюційні рівняння обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту, а також дослідити явище модуляційної стійкості хвиль.

РОЗДІЛ 3.

ЕВОЛЮЦІЯ ОБВІДНИХ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ ТА ОЦІНКА ПОТОКУ ЕНЕРГІЇ

У цьому розділі наведено третє наближення слабконелінійної задачі про поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою, виведено умову її розв'язності, аналітичні вирази еволюційних рівнянь обвідних внутрішнього верхнього та нижнього хвильових пакетів у формі нелінійного рівняння Шредінгера, проаналізовано модуляційну стійкість. Також виведено аналітичні вирази для дослідження енергетичних характеристик хвильового руху, проаналізовано залежність потоку енергії хвильового руху в тришаровій гідродинамічній системі від фізичних та геометричних параметрів цієї системи. Отримані результати опубліковані в роботах [64], [7], [8], [14], [33].

3.1. Умова розв'язності третього наближення проблеми

Постановка задачі третього наближення проблеми (2.9)-(2.15) отримана після підстановки в неї виразів (2.16)-(2.18) та прирівнювання виразів при α^2 і має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_{j3, x_0 x_0} + \varphi_{j3, zz} &= -\varphi_{j1, x_1 x_1} - 2\varphi_{j2, x_0 x_1} - 2\varphi_{j1, x_0 x_2} \quad \text{в } \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ \eta_{13, t_0} - \varphi_{j3, z} &= -\eta_{11, t_2} - \eta_{12, t_1} - \eta_{11, x_0} \varphi_{j1, x_1} - \eta_{11, x_1} \varphi_{j1, x_0} - \eta_{12, x_0} \varphi_{j1, x_0} - \\ &\quad - \eta_{11, x_0} \varphi_{j2, x_0} + \eta_{11} \varphi_{j2, zz} + \eta_{12} \varphi_{j1, zz} + \frac{1}{2} \eta_{11}^2 \varphi_{j1, zzz} - \eta_{11} \eta_{11, x_0} \varphi_{j1, x_0 z} \\ &\quad \text{при } z = 0, \quad j = 1, 2, \\ \eta_{23, t_0} - \varphi_{j3, z} &= -\eta_{21, t_2} - \eta_{22, t_1} - \eta_{21, x_0} \varphi_{j1, x_1} - \eta_{21, x_1} \varphi_{j1, x_0} - \eta_{22, x_0} \varphi_{j1, x_0} - \\ &\quad - \eta_{21, x_0} \varphi_{j2, x_0} + \eta_{21} \varphi_{j2, zz} + \eta_{22} \varphi_{j1, zz} + \frac{1}{2} \eta_{21}^2 \varphi_{j1, zzz} - \eta_{21} \eta_{21, x_0} \varphi_{j1, x_0 z} \\ &\quad \text{при } z = h_2, \quad j = 2, 3, \quad (3.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{13, t_0} - \rho_2 \varphi_{23, t_0} + (\rho_1 - \rho_2) \eta_{13} - T_1 \eta_{13, x_0 x_0} &= -\rho_1 (\varphi_{11, t_2} + \varphi_{12, t_1} + \eta_{12} \varphi_{11, t_0 z} + \\ + \eta_{11} \varphi_{11, t_1 z} + \frac{1}{2} \eta_{11}^2 \varphi_{11, t_0 zz}) + \rho_2 &\left(\varphi_{21, t_2} + \varphi_{22, t_1} + \eta_{12} \varphi_{21, t_0 z} + \eta_{11} \varphi_{21, t_1 z} + \frac{1}{2} \eta_{11}^2 \varphi_{21, t_0 zz} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho_1 \left(\eta_{11} \varphi_{12, t_0 z} + \varphi_{11, x_0} \varphi_{11, x_1} + \varphi_{11, x_0} \varphi_{12, x_0} + \eta_{11} \varphi_{11, x_0} \varphi_{11, x_0 z} + \varphi_{11, z} \varphi_{12, z} + \eta_{11} \varphi_{11, z} \varphi_{11, z z} \right) + \\
& + \rho_2 \left(\eta_{11} \varphi_{22, t_0 z} + \varphi_{21, x_0} \varphi_{21, x_1} + \varphi_{21, x_0} \varphi_{22, x_0} + \eta_{11} \varphi_{21, x_0} \varphi_{21, x_0 z} + \varphi_{21, z} \varphi_{22, z} + \eta_{11} \varphi_{21, z} \varphi_{21, z z} \right) + \\
& \quad + T_1 \eta_{11, x_1 x_1} + 2T_1 \eta_{12, x_0 x_1} + 2T_1 \eta_{11, x_0 x_2} - \frac{3}{2} T_1 \left(\eta_{11, x_0} \right)^2 \eta_{11, x_0 x_0} \text{ при } z = 0, \\
& \rho_2 \varphi_{23, t_0} - \rho_3 \varphi_{33, t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{23} - T_2 \eta_{23, x_0 x_0} = -\rho_2 \left(\varphi_{21, t_2} + \varphi_{22, t_1} + \eta_{22} \varphi_{21, t_0 z} + \right. \\
& \quad \left. + \eta_{21} \varphi_{21, t_1 z} + \frac{1}{2} \eta_{21}^2 \varphi_{21, t_0 z z} \right) + \rho_3 \left(\varphi_{31, t_2} + \varphi_{32, t_1} + \eta_{22} \varphi_{31, t_0 z} + \eta_{21} \varphi_{31, t_1 z} + \frac{1}{2} \eta_{21}^2 \varphi_{31, t_0 z z} \right) - \\
& -\rho_2 \left(\eta_{21} \varphi_{22, t_0 z} + \varphi_{21, x_0} \varphi_{21, x_1} + \varphi_{21, x_0} \varphi_{22, x_0} + \eta_{21} \varphi_{21, x_0} \varphi_{21, x_0 z} + \varphi_{21, z} \varphi_{22, z} + \eta_{21} \varphi_{21, z} \varphi_{21, z z} \right) + \\
& + \rho_3 \left(\eta_{21} \varphi_{32, t_0 z} + \varphi_{31, x_0} \varphi_{31, x_1} + \varphi_{31, x_0} \varphi_{32, x_0} + \eta_{21} \varphi_{31, x_0} \varphi_{31, x_0 z} + \varphi_{31, z} \varphi_{32, z} + \eta_{21} \varphi_{31, z} \varphi_{31, z z} \right) + \\
& \quad + T_2 \eta_{21, x_1 x_1} + 2T_2 \eta_{22, x_0 x_1} + 2T_2 \eta_{21, x_0 x_2} - \frac{3}{2} T_2 \left(\eta_{21, x_0} \right)^2 \eta_{21, x_0 x_0} \text{ при } z = h_2, \\
& \varphi_{33, z} = 0 \text{ при } z = h_2 + h_3, \\
& \varphi_{13} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty.
\end{aligned}$$

Розв'язки третьої лінійної задачі будемо шукати у вигляді:

$$\begin{aligned}
\varphi_{13} &= \left(B_{10}^{(3)} + B_{11}^{(3)} \cdot z + B_{12}^{(3)} \cdot z^2 \right) e^{i\theta + kz} + \left(B_{20}^{(3)} + B_{21}^{(3)} \cdot z \right) e^{2i\theta + 2kz} + B_{30}^{(3)} e^{3i\theta + 3kz} + cc, \\
\varphi_{23} &= \left(C_{10}^{(3)} + C_{11}^{(3)} \cdot z + C_{12}^{(3)} \cdot z^2 \right) e^{i\theta + k(h_2 - z)} + \left(C_{20}^{(3)} + C_{21}^{(3)} \cdot z \right) e^{2i\theta + 2k(h_2 - z)} + C_{30}^{(3)} e^{3i\theta + 3k(h_2 - z)} + \\
& + \left(D_{10}^{(3)} + D_{11}^{(3)} \cdot z + D_{12}^{(3)} \cdot z^2 \right) e^{i\theta - k(h_2 - z)} + \left(D_{20}^{(3)} + D_{21}^{(3)} \cdot z \right) e^{2i\theta - 2k(h_2 - z)} + D_{30}^{(3)} e^{3i\theta - 3k(h_2 - z)} + cc, \\
\varphi_{33} &= E_{11}^{(3)} \cdot (h_2 + h_3 - z) \sinh(k(h_2 + h_3 - z)) e^{i\theta} + E_{21}^{(3)} \cdot (h_2 + h_3 - z) \sinh(2k(h_2 + h_3 - z)) e^{2i\theta} + \\
& + \left(E_{10}^{(3)} + E_{12}^{(3)} \cdot (h_2 + h_3 - z)^2 \right) \cosh(k(h_2 + h_3 - z)) e^{i\theta} + E_{20}^{(3)} \cosh(2k(h_2 + h_3 - z)) e^{2i\theta} + \\
& \quad + E_{30}^{(3)} \cosh(3k(h_2 + h_3 - z)) e^{3i\theta} + cc, \\
\eta_{13} &= F_0^{(3)} + F_1^{(3)} e^{i\theta} + F_2^{(3)} e^{2i\theta} + F_3^{(3)} e^{3i\theta} + cc, \\
\eta_{23} &= G_0^{(3)} + G_1^{(3)} e^{i\theta} + G_2^{(3)} e^{2i\theta} + G_3^{(3)} e^{3i\theta} + cc,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

де $B_{ij}^{(3)}$, $C_{ij}^{(3)}$, $D_{ij}^{(3)}$, $E_{ij}^{(3)}$, $F_i^{(3)}$, $G_i^{(3)}$ – невизначені коефіцієнти.

Підставимо розв'язки першої лінійної задачі (2.20), розв'язки другої лінійної задачі (2.43) та вирази для невідомих функцій (3.2) у лінійне

наближення третього порядку (3.1). З перших двох співвідношень задачі (3.1) можемо знайти вирази для наступних коефіцієнтів

$$\begin{aligned}
 B_{12}^{(3)} &= \frac{i\omega}{2k} A_{,x_1x_1}, \\
 C_{12}^{(3)} &= \frac{i}{2k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3}{\rho_2\omega \cosh kh_2} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 - (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2) e^{-kh_2}}{\rho_2\omega \cosh kh_2} \right) \right) A_{,x_1x_1}, \quad (3.3) \\
 D_{12}^{(3)} &= \frac{i}{2k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3}{\rho_2\omega \cosh(kh_2)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(\rho_2\omega^2 \cosh(kh_2) + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh(kh_2)) e^{kh_2}}{\rho_2\omega \cosh(kh_2)} \right) \right) A_{,x_1x_1}, \\
 E_{12}^{(3)} &= -\frac{i}{2k} \left(\frac{(\rho_2\omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1\omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3) \sinh kh_2)}{\rho_2\omega \sinh kh_3} \right) A_{,x_1x_1},
 \end{aligned}$$

а також $B_{11}^{(3)}, C_{11}^{(3)}, D_{11}^{(3)}, E_{11}^{(3)}$, які мають більш громіздкий вигляд і наведені у Додатку Б, де представлено програму відповідних символічних обчислень.

Далі, врахувавши розв'язки попередніх наближень (2.20), (2.43) та вирази для коефіцієнтів $B_{11}^{(3)}, B_{12}^{(3)}, C_{11}^{(3)}, C_{12}^{(3)}, D_{11}^{(3)}, D_{12}^{(3)}, E_{11}^{(3)}$, та $E_{12}^{(3)}$ і прирівнявши вирази при $e^{i\theta}$, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $B_{10}^{(3)}, C_{10}^{(3)}, D_{10}^{(3)}, E_{10}^{(3)}, F_1^{(3)}, G_1^{(3)}$. Отримана система лінійних рівнянь несумісна, а умова її розв'язності має вигляд:

$$W_1 A_{,t_2} + W_2 A_{,x_2} + W_3 A_{,x_1x_1} + W_4 A^2 \bar{A} = 0, \quad (3.4)$$

де W_i ($i = \overline{1,4}$) коефіцієнти, що залежать від $\rho_1, \rho_2, \rho_3, k, h_2, h_3, T_1, T_2, \omega$, були отримані за допомогою пакетів символічних обчислень (Додаток Б).

3.2. Еволюційні рівняння обвідних внутрішнього верхнього та нижнього хвильових пакетів

Знайшовши групову швидкість $\omega' = d\omega/dk$, яка отримується із дисперсійного співвідношення (2.22), умову розв'язності (2.39) задачі другого наближення запишемо у вигляді

$$A_{,t_1} + \omega' A_{,x_1} = 0. \quad (3.5)$$

Аналогічно, знайшовши вираз для $\omega'' = d^2\omega/dk^2$, умову розв'язності (3.4) третього наближення приведемо до вигляду

$$A_{,t_2} + \omega' A_{,x_2} - \frac{1}{2} i\omega'' A_{,x_1 x_1} = iIA^2 \bar{A}. \quad (3.6)$$

Частинні похідні $A_{,t}$, $A_{,x}$, $A_{,xx}$ запишемо у вигляді сум по степенях параметра нелінійності

$$A_{,t} = \sum_{n=1}^2 \alpha^n A_{,t_n} + O(\alpha^3), \quad A_{,x} = \sum_{n=1}^2 \alpha^n A_{,x_n} + O(\alpha^3), \quad A_{,xx} = \alpha^2 A_{,x_1 x_1} + O(\alpha^3), \quad (3.7)$$

де похідні $A_{,t_n}$ та $A_{,x_n}$ визначають внесок членів порядку α^n у загальне значення похідних $A_{,t}$ та $A_{,x}$.

Помножимо співвідношення (3.5) та (3.6) на α та α^2 відповідно, додамо одне до одного та, враховуючи (3.7), отримаємо шукане еволюційне рівняння обвідної на нижній поверхні контакту

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - \frac{1}{2} i\omega'' A_{,xx} = i\alpha^2 IA^2 \bar{A}. \quad (3.8)$$

Враховуючи співвідношення (2.21) та використовуючи рівняння (3.8), нескладно отримати еволюційне рівняння на верхній поверхні контакту

$$A_{,t}^{(1)} + \omega' A_{,x}^{(1)} - \frac{1}{2} i\omega'' A_{,xx}^{(1)} = i\alpha^2 J (A^{(1)})^2 \overline{A^{(1)}}, \quad (3.9)$$

де
$$J = \frac{\rho_2^2 \omega^4}{(\rho_2 \omega^2 \cosh(kh_2) + (\rho_1 \omega^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh(kh_2))^2} I. \quad (3.10)$$

Схоже еволюційне рівняння у формі нелінійного рівняння Шредінгера раніше було отримане в задачах [99, 44, 45, 57, 75] про поширення хвильових пакетів в різних гідродинамічних системах. У задачі, яка представлена в цьому

дисертаційному дослідженні, отримано два еволюційних рівняння обвідних хвильових пакетів: одне отримане на нижній внутрішній поверхні контакту, друге – на верхній внутрішній поверхні контакту у формі нелінійних рівнянь Шредінгера другого степеня.

3.3 Умова модуляційної стійкості

3.3.1. Аналітичні вирази для дослідження модуляційної стійкості

Здійснимо перехід до системи, що рухається з груповою швидкістю, використавши заміну $t = \zeta$ і $\xi = x - \omega' t$. При цьому еволюційне рівняння (3.8) набуде вигляду

$$A_{,\zeta} - \frac{1}{2} i \omega'' A_{,\xi\xi} = i \alpha^2 I A^2 \bar{A}. \quad (3.11)$$

Відмітимо, що еволюційне рівняння (3.8) має розв'язок, що залежить лише від часу, який має місце при балансі між дисперсією та нелінійністю [99]

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i \alpha^2 a^2 I \zeta), \quad (3.12)$$

де a – стала. Такий розв'язок нелінійного рівняння Шредінгера був раніше розглянутий в статтях [50, 109, 99] для різних двошарових гідродинамічних систем.

Вираз (3.12) дає можливість знаходити розв'язок вже після того, як встановиться баланс між дисперсією та нелінійністю. Замінюючи обвідну A у розв'язках задачі першого наближення (2.20), а також у розв'язках задачі другого наближення (2.43), а далі підставляючи результат у (2.16) та (2.17) отримаємо вирази для відхилення поверхонь контакту

$$\begin{aligned} \eta_1(x, t) &= a \cos(kx - \tilde{\omega} t) + a^2 \alpha [F_0 + 0.5 \Lambda_1 \cos 2(kx - \tilde{\omega} t)] + O(\alpha^2) \quad (3.13) \\ \eta_2(x, t) &= a \left[\frac{\rho_2 \omega^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega^2 - k \rho_1 + k \rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2} \right] \cos(kx - \tilde{\omega} t) + \\ &\quad + a^2 \alpha [G_0 + 0.5 \Lambda_2 \cos 2(kx - \tilde{\omega} t)] + O(\alpha^2), \end{aligned}$$

де $\tilde{\omega} = \omega - \alpha^2 a^2 I$.

Віднайдемо такі параметри тришарової гідродинамічної системи, за яких цей розв'язок буде стійким або нестійким до модулюючих збурень. Дослідження стійкості хвильових пакетів проводилось згідно [19] та [120].

Надамо розв'язку (3.12) збурення $A = (a + \alpha_0) \exp(i\alpha^2 a^2 I \zeta + i\beta_0)$, де $\alpha_0 = \alpha_0(\zeta, \xi)$ і $\beta_0 = \beta_0(\zeta, \xi)$ є дійсними.

Підставимо збурений розв'язок в еволюційне рівняння і прийдемо до системи рівнянь відносно α_0 і β_0

$$\alpha_{0,\zeta} + \frac{1}{2} a \omega'' \beta_{0,\xi\xi} = 0, \quad (3.14)$$

$$\alpha \beta_{0,\zeta} - \frac{1}{2} \omega'' \alpha_{0,\xi\xi} = 2\alpha_0 \alpha^2 I a^2.$$

Розв'язок лінійної системи (3.14) можна представити у вигляді

$$\alpha_0 = \alpha_1 \exp(i(k_1 \xi - \omega_1 \zeta)), \quad (3.15)$$

$$\beta_0 = \beta_1 \exp(i(k_1 \xi - \omega_1 \zeta)).$$

Отже, умова модуляційної стійкості на нижній внутрішній поверхні контакту має вигляд

$$I \omega'' < 0. \quad (3.18)$$

Аналогічно, отримуємо умову модуляційної стійкості на верхній внутрішній поверхні

$$J \omega'' < 0. \quad (3.19)$$

Зазначимо, що враховуючи рівність (3.10), при дослідженні модуляційної нестійкості хвильових пакетів на нижній поверхні контакту та на верхній поверхні, можна обмежитись дослідженням умови (3.18).

3.3.2. Аналіз умов модуляційної стійкості на поверхнях контакту

Чисельний аналіз знакосталості величин I та ω'' показав наступне. Величина ω'' є від'ємною на всій області дослідження, а I змінює знак в залежності від параметрів системи. На рис. 3.1 представлені діаграми модуляційної стійкості розв'язку (3.12) на нижній поверхні контакту для різних

значень товщини верхнього шару. Области модуляційної стійкості (МС) та модуляційної нестійкості (МН) побудовані в системі (ρ_3, k) для фізично прийнятних значень $0 < \rho_3 < \rho_2$ та $0 < k < 1.4$, значення густини нижнього півпростору $\rho_1 = 1$ та густини середнього шару $\rho_2 = 0.9$. Коефіцієнти поверхневого натягу не враховуються.

При $h_3 = 0.5$ виявлено три криві, що розділяють площину (ρ_3, k) на дві області МС та три області МН (рис.3.1а). Перша вузька область МС1, обмежена кривими "1" і "2", відповідає капілярним хвилям. Друга область МС2, обмежена кривими "1", "2" і "3", відповідає як капілярним, так і гравітаційним хвилям та розділяє дві області модуляційної нестійкості МН2 та МН3. Третя область модуляційної нестійкості МН1 виявлена для хвильових чисел більших за одиницю, ця область відділяється від МС1 та МС2 кривою "2".

Зі збільшенням значення товщини верхнього шару h_3 до 1 (рис.3.1б) спостерігається зміщення області МС2 в бік лівого краю площини (ρ_3, k) .

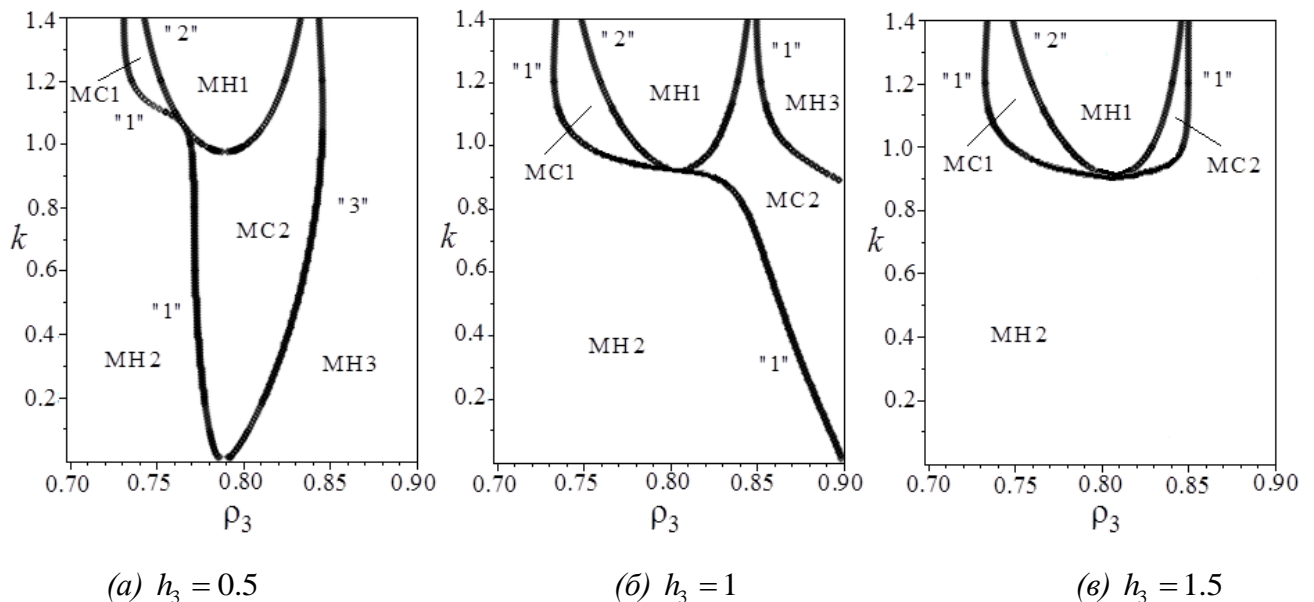


Рис. 3.1. Діаграми стійкості для різних значень товщини верхнього шару

На рис.3.1e представлена діаграма стійкості при $h_3 = 1.5$. В даному випадку, виявлено дві криві, які розділяють площину (ρ_3, k) на дві області

знакосталості величин J та ω'' показав, що величина ω'' є від'ємною на всій області дослідження, а J змінює знак в залежності від параметрів системи. Діаграми побудовано на площині (ρ_3, k) для фізично прийнятних параметрів системи. В даному випадку було виявлено вузькі, подібні до петель області МС, які відповідають гравітаційним хвилям для малих значень густини верхнього шару. В той же час на площині (ρ_2, k) не виявлено жодних областей МС.

Далі проведемо дослідження модуляційної стійкості з урахуванням поверхневого натягу на одній із поверхонь контакту та на обох поверхнях одночасно.

На рис. 3.3 представлено графіки областей МС, побудовані для частоти хвильового пакету ω_1 і таких параметрів системи: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $0 \leq \rho_3 \leq \rho_2$, $0 \leq k \leq 3.5$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1$, а) $T_1 = 0.1, T_2 = 0$; б) $T_1 = 0, T_2 = 0.1$; в) $T_1 = 0.1, T_2 = 0.1$.

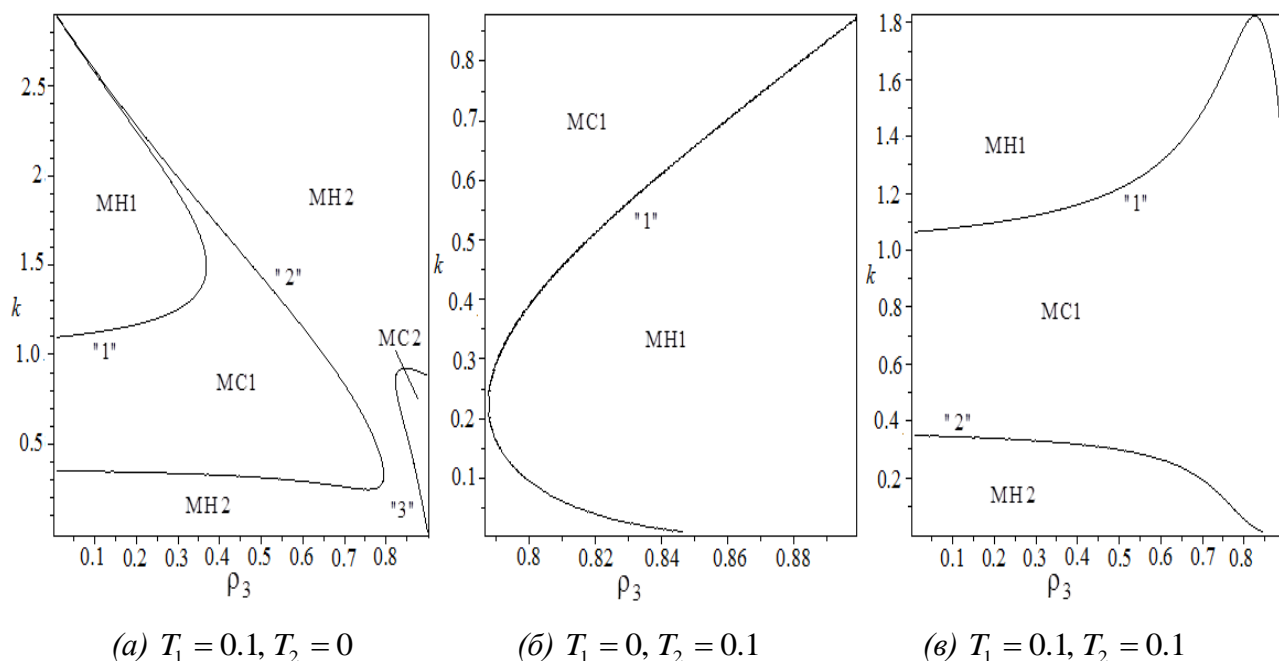


Рис. 3.3. Діаграми стійкості з урахуванням впливу поверхневого натягу для частоти хвильового пакету ω_1

Області модуляційної стійкості (МС) та модуляційної нестійкості (МН) побудовані в системі (ρ_3, k) . У випадку, коли коефіцієнт поверхневого натягу присутній на нижній поверхні контакту, а на верхній поверхні рівний нулю

виявлено три криві, що розділяють площину (ρ_3, k) на дві області МС та дві області МН (рис.3.3а). Перша область МС1, обмежена кривими “1” і “2”, відповідає гравітаційно-капілярним хвилям з малою густиною. Друга область МС2, обмежена кривою “3”, відповідає капілярним хвилям зі значенням густини верхнього шару близьким до значення густини середнього шару. Область модуляційної нестійкості МН1 виявлена для хвильових чисел більших за одиницю при малих значеннях густини. Ця область відділена від МС1 кривою “1”. Друга область нестійкості МН2, обмежена з боків кривими “2” і “3” та вісю ρ_3 , відповідає гравітаційно-капілярним хвилям.

На рис. 3.3б представлено випадок, коли коефіцієнт поверхневого натягу на нижній поверхні контакту рівний нулю, а на верхній поверхні $T_2 = 0.1$. Тоді можемо спостерігати вузьку область модуляційної нестійкості МН1, яка відділена від області стійкості МС1 кривою “1” і відповідає гравітаційним хвилям зі значенням густини верхнього шару близьким до значення густини середнього шару.

У випадку коли враховано вплив коефіцієнтів поверхневого натягу на обох поверхнях контакту, виявлено дві криві, що розділяють площину (ρ_3, k) на область модуляційної стійкості МС1, яка відділена кривими “1” і “2” від областей МН (рис.3.3в). Область нестійкості МН1 відповідає капілярним хвилям, в той час як МН2 – гравітаційним.

На рис. 3.4 представлено графіки областей МС для частоти хвильового пакету ω_2 і таких параметрів системи: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $0 \leq \rho_3 \leq \rho_2$, $0 \leq k \leq 3.5$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1$, а) $T_1 = 0.1, T_2 = 0$; б) $T_1 = 0, T_2 = 0.1$; в) $T_1 = 0.1, T_2 = 0.1$.

Області МС та МН побудовані в системі (ρ_3, k) . На рис. 3.4а представлено випадок, коли коефіцієнт поверхневого натягу на нижній поверхні контакту $T_1 = 0.1$, а на верхній поверхні рівний нулю. Виявлено дві криві, які виокремлюють дві області модуляційної стійкості від нестійкості. Перша область МС1 обмежена кривою “1” і відповідає гравітаційним хвилям з малою

густиною верхнього шару. Друга вузька область МС2, обмежена кривою “2”, відповідає капілярним хвилям.

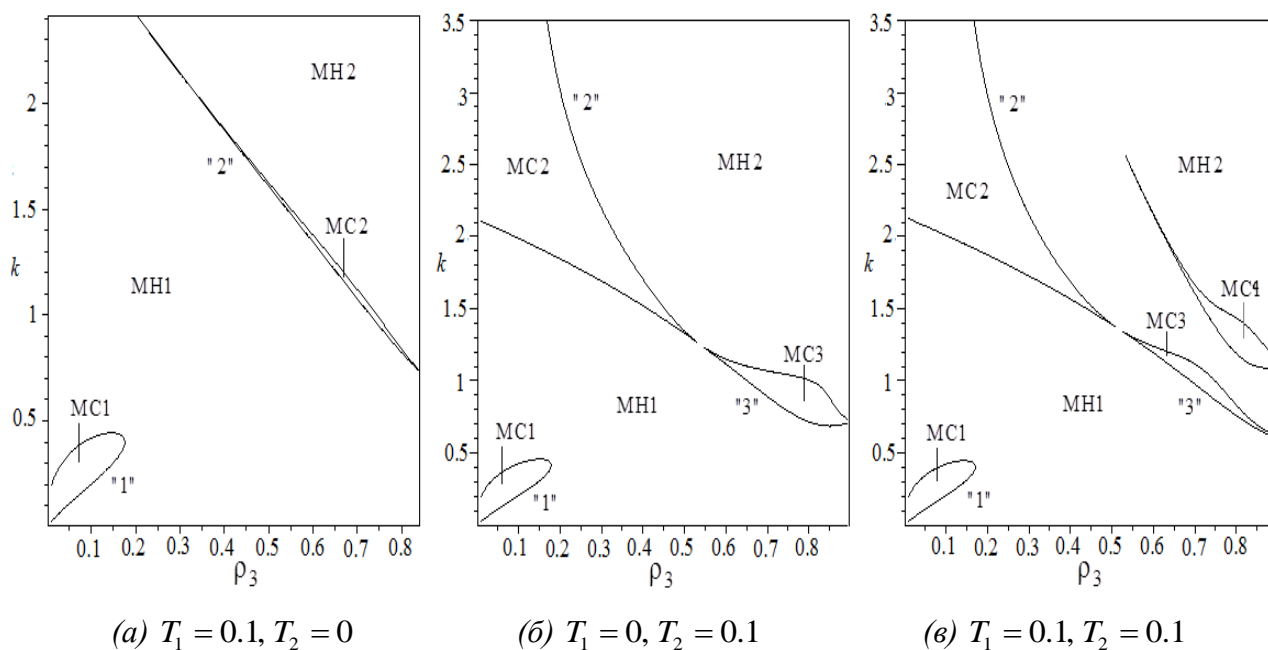


Рис. 3.4. Діаграми стійкості з урахуванням впливу поверхневого натягу для частоти хвильового пакету ω_2

Коли коефіцієнт поверхневого натягу на нижній поверхні контакту рівний нулю, а на верхній поверхні $T_2 = 0.1$ (рис. 3.4.б), можемо спостерігати вузьку подібну до петлі область модуляційної стійкості МС1, яка виокремлена кривою “1”, та ще дві області МС, які виокремлені кривими “2” і “3”.

У випадку коли враховано вплив коефіцієнтів поверхневого натягу на обох поверхнях контакту (рис.3.4.в), бачимо комбінацію областей модуляційної стійкості із двох попередніх випадків (рис.3.4.а, б).

3.4. Дослідження потоку енергії хвильового руху

Для дослідження потоку енергії хвильового руху використаємо дисперсійне співвідношення (2.22), яке має дві пари коренів ω_1 і ω_2 . Як було виявлено раніше (підрозділ 2.2), наявність двох пар коренів дисперсійного співвідношення дає можливість отримати дві пари незалежних розв’язків першого наближення

– для ω_1 :

$$\begin{aligned}\eta_{11}^{(1)} &= A\cos(kx - \omega_1 t), \\ \eta_{21}^{(1)} &= \frac{\rho_2 \omega_1^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega_1^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2}{\rho_2 \omega_1^2} A\cos(kx - \omega_1 t), \\ \varphi_{11}^{(1)} &= \frac{\omega_1}{k} \exp(kz) A \sin(kx - \omega_1 t), \\ \varphi_{21}^{(1)} &= \left[\frac{(-\rho_1 \omega_1^2 + k(\rho_1 - \rho_2) + T_1 k^3) \cosh k(h_2 - z)}{\rho_2 \omega_1 k \cosh kh_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-\rho_2 \omega_1^2 \cosh kh_2 + (-\rho_1 \omega_1^2 + k(\rho_1 - \rho_2) + T_1 k^3) \sinh kh_2) \sinh kz}{\rho_2 \omega_1 k \cosh kh_2} \right] A \sin(kx - \omega_1 t), \\ \varphi_{31}^{(1)} &= \frac{(-\rho_2 \omega_1^2 \cosh kh_2 + (-\rho_1 \omega_1^2 + k(\rho_1 - \rho_2) + T_1 k^3) \sinh kh_2) \cosh k(h_2 + h_3 - z)}{\rho_2 \omega_1 k \sinh kh_3} \times \\ &\quad \times A \sin(kx - \omega_1 t); \end{aligned} \tag{3.20}$$

– для ω_2 :

$$\begin{aligned}\eta_{11}^{(2)} &= \frac{\rho_2 \omega_2^2}{\rho_2 \omega_2^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega_2^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2} B \cos(kx - \omega_2 t), \\ \eta_{21}^{(2)} &= B \cos(kx - \omega_2 t), \\ \varphi_{11}^{(2)} &= \left[\frac{\omega_2 \exp(kz)}{k} \cdot \frac{\rho_2 \omega_2^2}{\rho_2 \omega_2^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega_2^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2} \right] B \sin(kx - \omega_2 t), \\ \varphi_{21}^{(2)} &= \left[\frac{\omega_2 (-\rho_1 \omega_2^2 + k(\rho_1 - \rho_2) + T_1 k^3) \cosh k(h_2 - z)}{k(\rho_2 \omega_2^2 \cosh kh_2 + (\rho_1 \omega_2^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \sinh kh_2) \cosh kh_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_2 \sinh kz}{k \cosh kh_2} \right] B \sin(kx - \omega_2 t), \\ \varphi_{31}^{(2)} &= \frac{\omega_2 \cosh k(h_2 + h_3 - z)}{k \sinh kh_3} B \sin(kx - \omega_2 t), \end{aligned} \tag{3.21}$$

де $\eta_{21}^{(1)}$ є хвилею-відгуком на хвилю $\eta_{11}^{(1)}$ з частотою ω_1 та амплітудою A , що поширюється на нижній поверхні контакту; $\eta_{11}^{(2)}$ є хвилею-відгуком на хвилю

$\eta_{21}^{(2)}$ з частотою ω_2 та амплітудою B , що поширюється на верхній поверхні контакту.

Енергію, яку переносять внутрішні хвилі на верхній та нижній поверхнях контакту, будемо досліджувати згідно [114]. Розглянемо енергію, яку переносять за період τ двовимірні прогресивні хвилі, що задаються розв'язками (3.20) та (3.21), через площину $x = \text{const}$. Тоді мають місце формули

$$E_1 = -\frac{\rho_1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-\infty}^0 \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (3.22)$$

$$E_2 = -\frac{\rho_2}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (3.23)$$

$$E_3 = -\frac{\rho_3}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{h_2}^{h_2+h_3} \frac{\partial(\varphi_{31}^{(1)} + \varphi_{31}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{31}^{(1)} + \varphi_{31}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (3.24)$$

$$E_s = E_1 + E_2 + E_3, \quad (3.25)$$

де E_1 , E_2 , E_3 – енергія хвильового руху у півпросторі, середньому та верхньому шарах, відповідно; E_s – сумарна енергія тришарової системи. Енергія хвильових рухів знаходиться підстановкою виразів потенціалів (3.20)–(3.21) у формули (3.22)–(3.24), всі подальші обчислення виконані у пакеті символьних обчислень у зв'язку з громіздкістю підінтегральних виразів. При обчисленнях враховуємо, що потенціали $\varphi_{j1}^{(1)}$ та $\varphi_{j1}^{(2)}$ не мають спільного періоду, оскільки ω_1 та ω_2 , взагалі кажучи, не є раціональними числами. Тому при обчисленні інтегралу по t використовується достатньо великі значення довжини проміжку інтегрування τ .

Формули (3.22)–(3.25) дають оцінку сумарної енергії та її складових на основі розв'язків першого наближення. Далі наведемо їх аналіз.

Енергія хвильового руху у граничних випадках досліджуваної системи. Розпочнемо дослідження енергетичних характеристик системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» з розгляду двох граничних випадків, за яких тришарова система вироджується у двошарову систему

«півпростір – шар з твердою кришкою». Отримані результати будемо порівнювати з розрахунком енергії, що переносять хвилі в гідродинамічній системі «півпростір – шар з твердою кришкою», який виконано в [1]. Розв'язки цієї задачі в лінійній постановці мають наступний вигляд

$$\begin{aligned}\zeta &= 2C \cos(kx - \omega t), \\ \varphi_1 &= \frac{2\omega C \sin(kx - \omega t) e^{kz}}{k}, \\ \varphi_2 &= -\frac{2\omega C \sin(kx - \omega t) \cosh k(h - z)}{k \sinh kh}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Енергія, яку переносять хвилі у названій двошаровій системі, обчислюється наступним чином

$$E_{1c} = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-\infty}^0 \frac{\partial(\varphi_1)}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_1)}{\partial x} dz = \frac{2\pi\omega^2 A^2}{k^2}, \quad (3.27)$$

$$E_{2c} = -\frac{\rho_2}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^h \frac{\partial(\varphi_2)}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_2)}{\partial x} dz = \frac{2\pi\omega^2 (\cosh kh_2 \cdot \sinh kh_2 + kh_2) A^2}{k^2 \sinh^2 kh_2}, \quad (3.28)$$

$$E_c = E_{1c} + E_{2c}. \quad (3.29)$$

Перший граничний випадок виродження тришарової системи «рідкий півпростір – шар – шар з твердою кришкою» у двошарову виникає за умови рівності густин двох шарів $\rho_2 = \rho_3 = 0.9$. При цьому амплітуда верхньої внутрішньої прогресивної хвилі $B = 0$. У даному випадку маємо шар рідини обмежений згори твердою кришкою та рідкий півпростір під ним з поверхнею контакту η_1 . На рис.3.3а показана залежність E_1 , E_2 , E_3 , E_s та E_c від товщини верхнього шару для наступних параметрів: $k = 0.1$, $T_1 = T_2 = 0$, $h_2 = 1$, амплітуда нижньої внутрішньої прогресивної хвилі $A = 0.1$.

Як помітно з рис. 3.5а при збільшенні товщини верхнього шару енергія E_1 , що переноситься на півпросторі, зростає. В той же час енергія середнього шару E_2 спадає до деякого рівня. Енергія верхнього шару E_3 зростає до максимального значення зі збільшенням товщини верхнього шару h_3 , а при подальшому збільшенні спадає до свого граничного значення. Зауважимо, що

випадок $h_3 \in [-1, 0]$ має суто теоретичний характер, де складові енергії набувають умовних значень. Як видно з графіка, сумарна енергія системи E_s співпадає з енергією відповідної двошарової системи «півпростір – шар з твердою кришкою» E_c з товщиною верхнього шару $h = h_2 + h_3$. Подібне співпадіння графіків, в кінцевому випадку, підтверджує фізичну достовірність отриманих результатів.

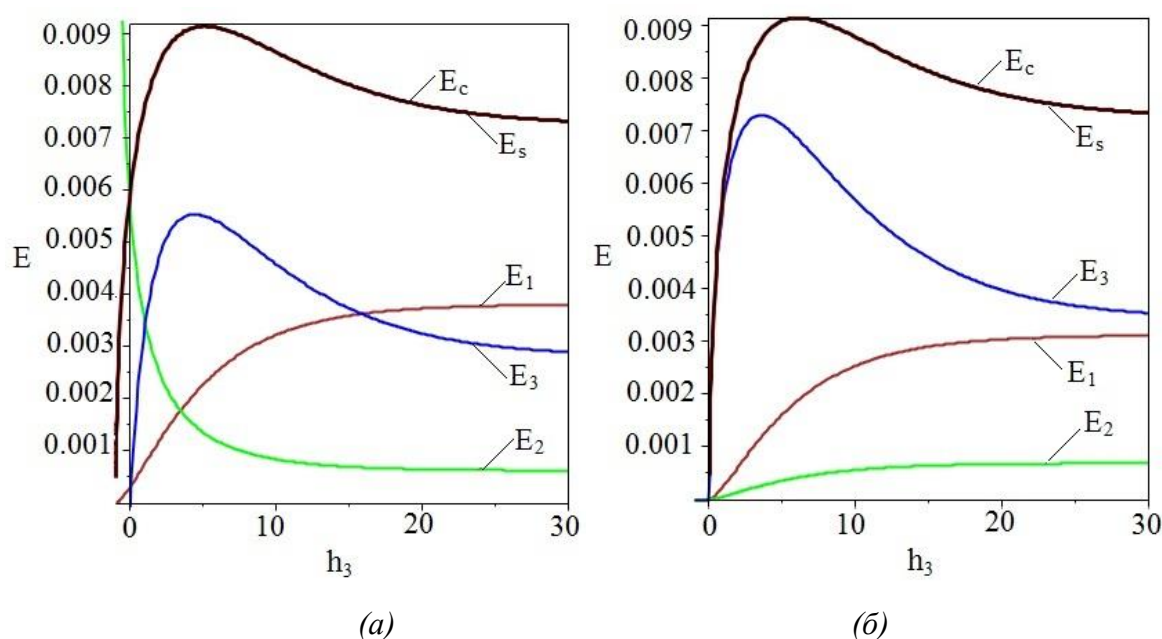


Рис. 3.5. Графік залежності E_1 , E_2 , E_3 , E_s та E_c від товщини верхнього шару h_3 :

а) – перший вироджений випадок; б) – другий вироджений випадок

Другий граничний випадок виродження тришарової системи «рідкий півпростір – шар – шар з твердою кришкою» у двошарову виникає за умови рівності густин двох нижніх шарів $\rho_1 = \rho_2 = 1$. У цьому випадку маємо рідкий шар товщиною h_3 , обмежений згори кришкою, та півпростір, між якими міститься поверхня контакту η_2 .

На рис. 3.5б показана залежність E_1 , E_2 , E_3 , E_s та E_c від товщини верхнього шару для наступних параметрів: $k = 0.1$, $T_1 = T_2 = 0$, $h_2 = 1$, $A = 0$, $B = 0.1$. Аналогічно до першого граничного випадку енергія хвильового руху півпростору E_1 зростає при збільшенні товщини верхнього шару. Енергія

верхнього шару E_3 також має зростаючий характер для малих значень товщини h_3 , а при збільшенні починає спадати до певного граничного значення. Істотна відмінність двох граничних випадків полягає у залежності енергії середнього шару E_2 від товщини верхнього шару. У другому випадку енергія середнього шару не спадає, а зростає до рівня, близького до того, що спостерігався у першому випадку. Зазначимо, що і у другому граничному випадку сумарна енергія системи E_s співпадає з енергією E_c , що підтверджує фізичну достовірність результатів для тришарової системи.

Аналіз залежності енергії хвиль від хвильового числа. На рис. 3.6 показано залежність E_1 , E_2 , E_3 , та суми E_s від хвильового числа k при різних значеннях товщини верхнього шару $h_3 = 10$, $h_3 = 3$, $h_3 = 1$ для таких параметрів системи $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $\rho_3 = 0.8$, $T_1 = T_2 = 0$, $h_2 = 1$, $A = 0.1$, $B = 0.05$.

На рис. 3.6а можемо бачити, що при збільшенні значення хвильового числа значення енергії хвильового руху на півпросторі E_1 спочатку зростає до максимального значення, а після його досягнення досить швидко спадає до певного граничного значення. Така залежність спостерігається в області малих хвильових чисел (для довгих хвиль) для кожної товщини верхнього шару h_3 , причому чим більше h_3 , тим більше максимальне значення E_1 . Відмітимо також, що для великих хвильових чисел (для коротких хвиль) енергія півпростору майже не залежить від товщини верхнього шару.

На рис. 3.6б зображено графік залежності енергії середнього шару E_2 від хвильового числа k при різних значеннях товщини верхнього шару h_3 . З рис. 3.6 видно, що зі збільшенням значення хвильового числа k значення енергії середнього шару має спадний характер і достатньо швидко збігається до певного граничного значення. Тобто для коротких хвиль енергія середнього шару майже не залежить від товщини верхнього шару. На рис. 3.6в можемо бачити, що залежність енергії верхнього шару E_3 від хвильового числа k при різних

значеннях товщини цього шару h_3 також має виражений спадний характер і на певних проміжках графіка не залежить від значення його товщини.

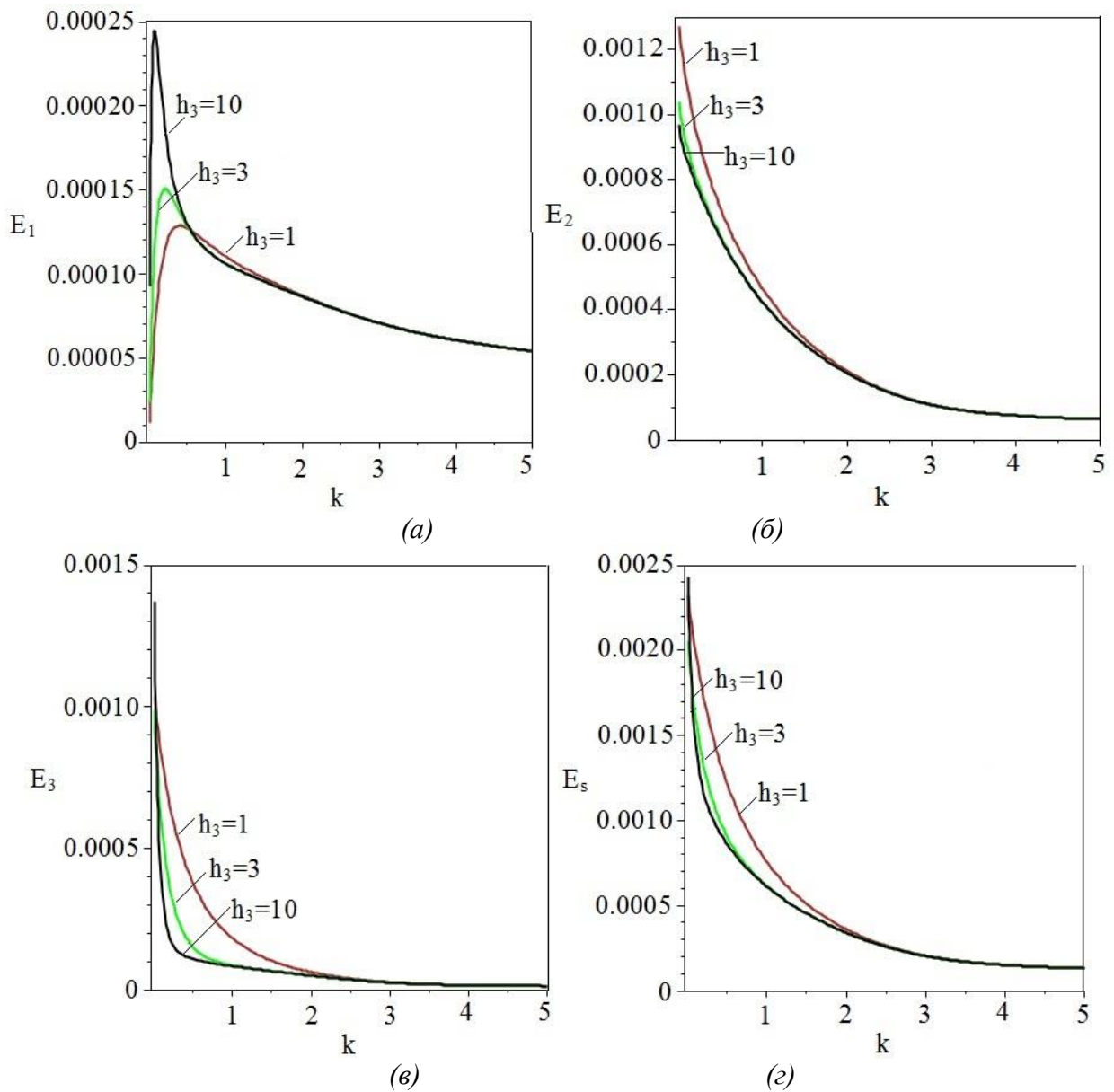


Рис. 3.6. Графік залежність енергії хвильового руху від хвильового числа k при різних значеннях товщини верхнього шару

Сумарна енергія тришарової системи E_s (рис. 3.6д) зі збільшенням значення хвильового числа k , спадає і, як видно з графіка, для великих значень k не залежить від значення товщини верхнього шару h_3 .

Аналіз залежності енергії хвиль різної довжини від товщини верхнього шару. У цьому пункті розглянемо три випадки залежності енергії хвиль різної

довжини від товщини верхнього шару за різних амплітуд A і B прогресивних хвиль на нижній та верхній поверхнях контакту, відповідно:

- 1) $A \neq 0, B = 0$;
- 2) $A = 0, B \neq 0$;
- 3) $A \neq 0, B \neq 0$.

1) Розглянемо тришарову систему за умови проходження на нижній поверхні контакту прогресивної хвилі з амплітудою $A \neq 0$ за відсутності прогресивної хвилі на верхній поверхні.

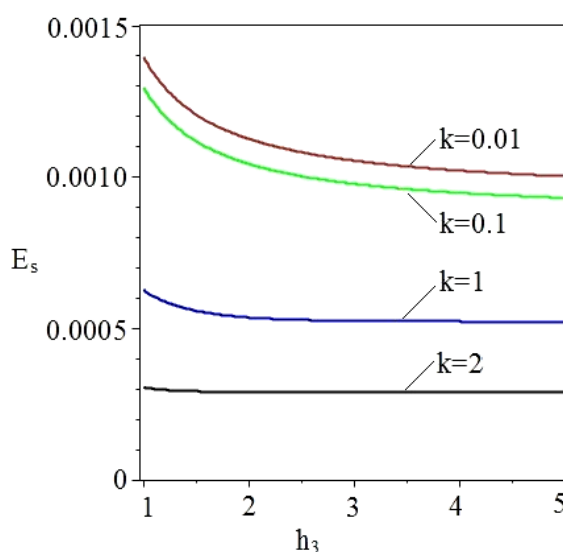


Рис. 3.7. Графік залежність енергії E_s від товщини верхнього шару h_3 при різних значення хвильового числа k

На рис. 3.7 представлено залежність енергії E_s від товщини верхнього шару h_3 при різних значеннях хвильового числа $k = 0.01, k = 0.1, k = 1, k = 2$ для наступних параметрів системи: $\rho_1 = 1, \rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.8, T_1 = T_2 = 0, h_2 = 1$, амплітуда хвилі на нижній поверхні контакту $A = 0.1$, а на верхній $B = 0$.

Як видно з графіка, сумарна енергія системи E_s (рис. 3.7) зі збільшенням товщини верхнього шару має спадний характер і для довгих хвиль має більше значення порівняно з короткими хвилями.

2) Розглянемо тришарову систему за умови проходження на верхній поверхні контакту прогресивної хвилі з амплітудою $B \neq 0$ за умови, що на нижній поверхні контакту прогресивна хвиля відсутня, тобто $A = 0$.

На рис. 3.8 представлено залежність сумарної енергії E_s від товщини верхнього шару h_3 при різних значеннях хвильового числа $k = 0.01$, $k = 0.1$, $k = 1$, $k = 2$ для наступних параметрів системи: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.9$, $\rho_3 = 0.8$, $T_1 = T_2 = 0$, $h_2 = 1$, амплітуда верхньої внутрішньої прогресивної хвилі $B = 0.05$.

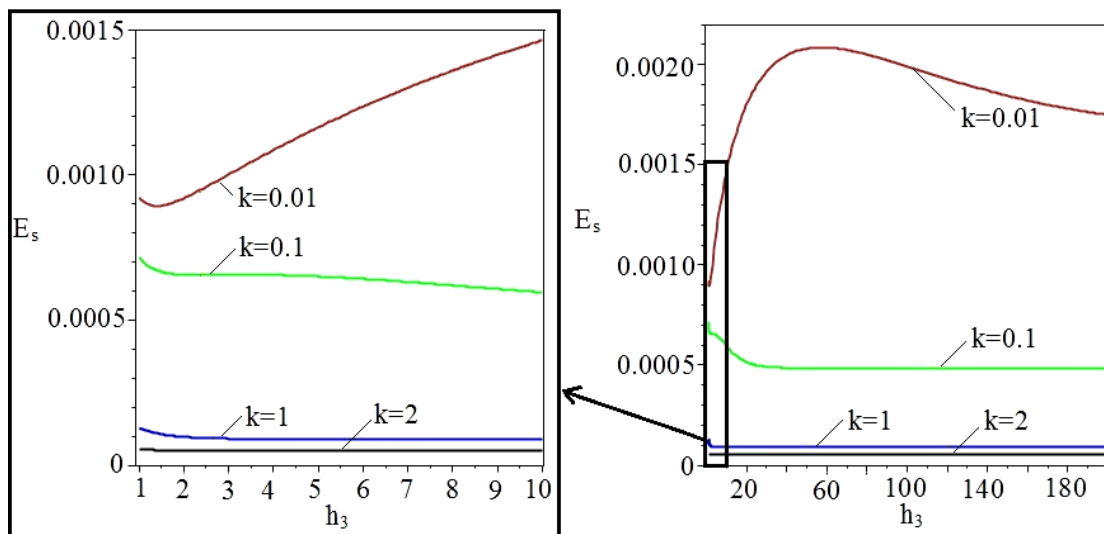


Рис.3.8. Графік залежність енергії E_s від товщини верхнього шару h_3 при різних значення хвильового числа k

Сумарна енергія системи для малого значення хвильового числа ($k = 0.01$) зростає, досягає максимального значення та починає спадати до граничної величини. При інших значеннях хвильового числа ($k = 0.1, k = 1, k = 2$), залежність енергії від товщини верхнього шару має слабо виражений спадний характер та доволі швидко збігається до свого граничного значення.

3) Розглянемо тришарову систему за умови одночасного проходження на верхній внутрішній поверхні прогресивної хвилі з амплітудою $B \neq 0$ та проходження на нижній внутрішній поверхні контакту прогресивної хвилі з амплітудою $A \neq 0$.

Розглянемо залежність E_s (рис. 3.9) від товщини верхнього шару для різних хвильових чисел $k=0.01$, $k=0.1$, $k=1$, $k=2$ та таких параметрів системи: $\rho_1=1$, $\rho_2=0.9$, $\rho_3=0.8$, $T_1=T_2=0$, $h_2=1$, $A=0.1$, $B=0.05$.

На рис. 3.9 представлена сумарна енергія системи, яка при збільшенні товщини h_3 для малого хвильового числа ($k=0.01$) зростає, досягає максимального значення та починає спадати до граничної величини. У цей же час для більших значень хвильового числа сумарна енергія системи досить швидко спадає до свого граничного значення.

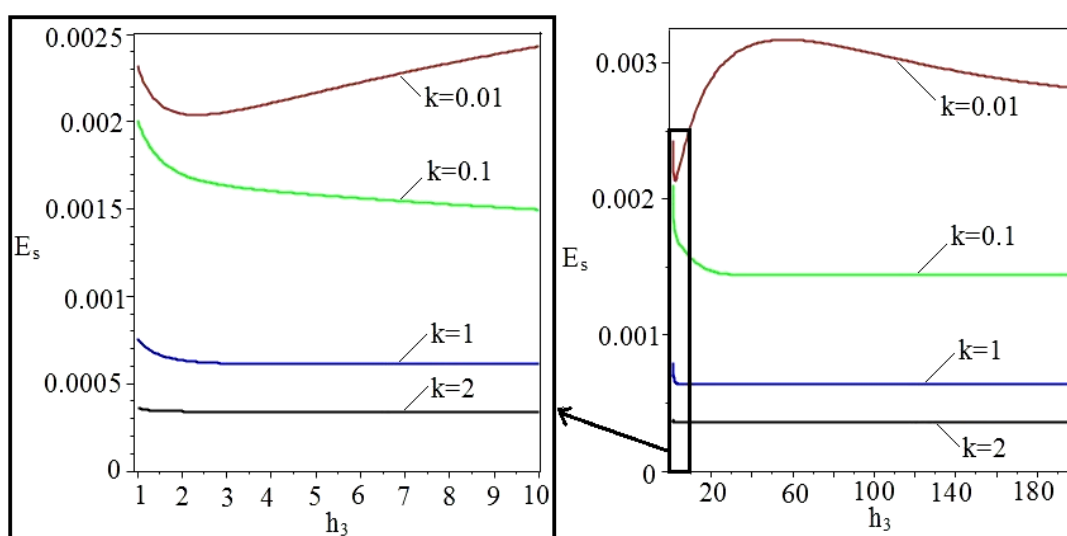


Рис. 3.9. Графік залежність енергії E_s від товщини верхнього шару h_3 при різних значення хвильового числа k

Відмітимо, що у розглядуваному випадку поширення прогресивних хвиль вздовж обох поверхонь контакту, сумарна енергія системи близька до суми енергій системи у випадках, за яких на одній із поверхонь контакту хвиля не поширюється.

Висновки до третього розділу

В третьому розділі наведено слабконелінійну постановку задачі про поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою у третьому наближенні проблеми, виведено умову її розв'язності. На

її основі та з урахуванням дисперсійного рівняння і умови розв'язності другого наближення отримано аналітичні вирази еволюційних рівнянь обвідних внутрішнього верхнього та нижнього хвильових пакетів у формі нелінійного рівняння Шредінгера, проаналізовано його розв'язки та модуляційну стійкість.

Побудовано діаграми модуляційної стійкості для різних значень товщини верхнього шару на площині «густина шару – хвильове число», при цьому виявлено криві, які відділяють область модуляційної стійкості від нестійкості для капілярних та гравітаційних хвиль. Виявлено, що області модуляційної нестійкості істотно розширюються при збільшенні товщини верхнього шару.

Також отримано співвідношення для кількісної та якісної оцінки енергії трьох шарів рідини та сумарної енергії гідродинамічної системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» у вигляді інтегралів за часовою та вертикальною просторовою змінними від добутку похідних потенціалів швидкостей за часовою та горизонтальною просторовою змінними. Було виявлено, що енергія середнього та верхнього шару тришарової гідродинамічної системи зі збільшенням значення хвильового числа k має спадний характер і достатньо швидко збігається до певного граничного значення, яке для коротких хвиль не залежить від товщини верхнього шару. В той же час значення енергії нижнього шару зростає до певного значення, а після досягнення максимуму досить швидко спадає до свого граничного значення. При цьому енергія системи, що є сумою енергій трьох шарів, також має спадний характер і достатньо швидко збігається до свого граничного значення.

Аналіз впливу геометричних параметрів системи на енергетичні характеристики системи показав:

– якщо амплітуда прогресивної хвилі на верхній поверхні контакту відсутня, а є лише амплітуда прогресивної хвилі на нижній поверхні контакту, то енергія системи зі збільшенням товщини верхнього шару має спадний характер і для довгих хвиль має більше значення порівняно з короткими хвилями;

– якщо амплітуда прогресивної хвилі на нижній поверхні контакту відсутня, а амплітуда прогресивної хвилі на верхній поверхні контакту наявна, то для деяких значень товщини верхнього шару сумарна енергія досягає максимальних значень та зі збільшенням товщини верхнього шару прямує до свого граничного значення;

– якщо наявні обидві амплітуди прогресивних хвиль на верхній та нижній поверхнях контакту, то сумарний потік енергії системи в залежності від товщини верхнього шару також має максимальні значення, а при збільшенні товщини верхнього шару спадає та прямує до граничного значення. В той же час, для коротких хвиль, сумарна енергія системи має спадний характер і досить швидко спадає до свого граничного значення.

Отже, відмітимо, що дослідження проводилось в рамках слабконелінійної моделі. Наявність великої кількості фізичних та геометричних параметрів системи, пов'язаних між собою, призводить до необхідності детального аналізу та інтерпретації отриманих результатів, які створюють цілісну картину хвильового процесу і у повній мірі можуть бути застосовані для вивчення хвильових процесів в океані з льодовим покриттям та з шаруватою структурою рідини, яка виникає поблизу гирла річок, а також у відкритому океані у період танення льоду.

ВИСНОВКИ

Дослідження умов поширення та взаємодії внутрішніх слабконелінійних хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» із застосуванням методу багатомасштабних розвинень дало наступні результати:

- виконано постановку слабконелінійної задачі про поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» з урахуванням поверхневого натягу; застосувавши метод багатьох масштабів, отримали перші три наближення досліджуваної проблеми;

- для задачі першого лінійного наближення знайдено частинні розв'язки, виведено дисперсійне рівняння та знайдено дві пари його коренів, які є частотами внутрішніх хвиль; проаналізовано корені дисперсійного рівняння у двох граничних випадках; встановлено, що за певних параметрів гідродинамічної системи, результати вроджуються у результати, раніше отримані для двошарової гідродинамічної системи «півпростір – шар з твердою кришкою»;

- для кожної частоти центра хвильового пакета побудовані залежності амплітуд хвиль, що рухаються вздовж поверхонь контакту, за різних геометричних та фізичних параметрів гідродинамічної системи; виявлено, що при збільшенні товщини верхнього шару амплітуди хвиль відгуків починають прямувати до граничного значення;

- для задачі другого наближення отримано аналітичні розв'язки та, внаслідок виключення секулярних членів, отримано умову розв'язності другого наближення;

- для кожної частоти центра хвильового пакета побудовано області знакосталості коефіцієнта при другій гармоніці на нижній і верхній поверхнях контакту, виявлено вплив значення товщини верхнього шару на форму хвиль, також виявлені області гасіння другої гармоніки та області істотного впливу другої гармоніки на форму поверхні контакту;

- отримано умову розв'язності третього наближення та, з урахуванням

дисперсійного співвідношення і умови розв'язності задачі другого наближення, виведено еволюційні рівняння для обвідних на поверхнях контакту у формі нелінійних рівнянь Шредінгера; використовуючи отримані еволюційні рівняння обвідних, виявили умову модуляційної стійкості обвідних хвильових пакетів на поверхнях контакту;

- побудовано діаграми модуляційної стійкості для різних значень товщини верхнього шару на площинах «густина верхнього шару – хвильове число» та «густина середнього шару – хвильове число», при цьому виявлено криві, які відділяють область модуляційної стійкості від нестійкості для капілярних та гравітаційних хвиль. Виявлено, що області модуляційної нестійкості істотно розширюються при збільшенні товщини верхнього шару;

- отримано співвідношення для кількісної та якісної оцінки потоку енергії трьох шарів рідини та сумарної енергії гідродинамічної системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» у вигляді інтегралів за часовою та вертикальною просторовою змінними від добутку похідних потенціалів швидкостей за часовою та горизонтальною просторовою змінними; проаналізовано залежність енергії хвильового руху при різних геометричних та фізичних параметрах системи.

В цілому дисертаційна робота носить теоретичний характер, в ній враховані сучасні проблеми моделювання хвильових процесів, які виникають в практичній діяльності. Зокрема, таких, які виникають в океані з шаруватою структурою за наявності льодового покриття. Як відомо, такі явища виникають поблизу гирла річок, а також у відкритому океані в областях, суміжних з термокліном. Вивчення впливу поверхневого натягу має практичне застосування у розробках нових технологій з використанням шаруватих середовищ, які не перемішуються, що має перспективу застосування у створенні інноваційних рішень для різних галузей прикладної науки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авраменко О. В. Аналіз енергії хвиль в двошарових гідродинамічних системах / О. В. Авраменко, Ю. В. Гуртовий, В. В. Наратовий // Наукові записки. Серія фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка., – 2014. – Вип. 73. – С. 3-9.
2. Авраменко О. В. Аналіз поширення слабконелінійних хвиль в двошаровій рідині з вільною поверхнею / О.В. Авраменко, В.В. Наратовий // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2015. – 4, №7 (76). – С. 39-45.
3. Авраменко О. В. Умови лінійної стійкості хвильових пакетів у двошаровій рідині з вільною поверхнею / О.В. Авраменко, В.В. Наратовий // Наукові записки. Серія: Математичні науки. – 2016. – Вип. 67. – С. 3-10.
4. Авраменко О.В. Аналіз умов хвилеутворення в тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» / О.В. Авраменко, М.В. Луньова // XV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання»: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2019. –С. 3.
5. Авраменко О.В. Аналіз форми хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» / О.В. Авраменко, М.В. Луньова // . Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2019. – 62, № 3. – С. 1-16.
6. Авраменко О.В. Візуалізація поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою / О.В. Авраменко, М.В. Луньова // XII Всеукраїнська студентська наукова конференція “Сучасні проблеми фізико-математичних наук та методики їх викладання”: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2017. – С. 3-4.
7. Авраменко О.В. Еволюційні рівняння для обвідних хвильових пакетів у напівнескінченній тришаровій рідині / О.В. Авраменко, М.В. Луньова // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: Збірка матеріалів XIV міжнародної наукової

- конференції для молодих вчених / Під ред. проф. Жолткевича Г.М. – Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2019. – С. 42-43.
8. Авраменко О. Модуляційна стійкість хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі / О. Авраменко, М. Луньова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2019. – Вип. 1. – С. 30-35.
 9. Авраменко О.В. Умови поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідро-динамічній системі з твердою кришкою / О.В. Авраменко, М.В. Луньова, В.В. Наратовий, І.Т. Селезов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2017. – 60, № 4. – С. 137-151.
Те саме: Avramenko O.V. Conditions of Wave Propagation in a Semiinfinite Three-Layer Hydrodynamic System with Rigid Lid / O.V. Avramenko, V.V. Naradovyi, M.V. Lunyova, I.T. Selezov // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – 247 (1). – P. 173-190.
 10. Авраменко О.В. Характерные свойства распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости / О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий, И.Т. Селезов // Прикладна гідромеханіка. – 2009. – Т. 11, № 4. – С. 3-8.
 11. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах 2-е изд., доп. и испр. – М.: Наука. – 1973. – 343 с.: ил.
 12. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн: монография [Черкесов Л. В.]. – К.: Наук, думка, 1976. – 364 с.
 13. Годунов С. К. Разностный метод расчета ударных волн / С. К. Годунов // Успехи математических наук: зб. наук. праць. – М. – 1957. – С. 176 – 177.
 14. Гринько А.Р. Використання математичного пакету Maple для аналізу енергії хвиль у тришаровій гідродинамічній системі / А.Р. Гринько, М.В. Луньова // Наукові записки молодих учених. – 2018. – № 1. – 8 с.
 15. Гуртовий Ю.В. Еволюція і асиметрія нестійких хвильових пакетів в двошаровій рідині. / Ю.В. Гуртовий // Наукові записки. Серія: Математичні науки. – Кропивницький: РВВ ЦДПУ ім. В. Винниченка. – 2008. – Вип. 67. – С. 21-26.

16. Гуртовий Ю.В. Нелінійні особливості хвильових пакетів в гідродинамічній системі «шар-шар». // Наукові записки. Серія: Математичні науки. – 2010. – Вип. 69. – С. 41-48.
17. Доценко С. Ф. Анализ двумерного распространения волн цунами из эллиптического очага в прямолинейный канал / С.Ф. Доценко, Н.К. Санникова // МГИ НАН Украины, 2011.– С 419-428.
18. Доценко С. Ф. Связь образования волн–убийц и метеорологических условий в северо–западной части Черного моря / С.Ф. Доценко, В.А. Иванов, Ю.А. Побережный // Доповіді НАН України, 2010. – №12. – С 105-109.
19. Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости / В. Е. Захаров // Прикладная математика и теоретическая физика. – 1968.– № 2. – С. 68-94.
20. Захаров В.Е. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах / В. Е. Захаров, А. Б. Шабат // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1971. – Т.61, Вып. 1. – С. 118-134.
21. Иванов В.А. Влияние Керченского пролива на стгонно-нагонные явления и течения в Азовском море, вызываемые циклоническими возмущениями / В.А. Иванов, В.В. Фомин, Л.В. Черкесов, Т.Я. Шульга // Морской гидрофизический журнал. – 2009. – № 4. – С. 3-18.
22. Иванов В.А. Волны, течения и эволюция пассивной примеси, вызываемые прогностическим ветром в Азовском море / В.А. Иванов, Л.В. Черкесов, Т.Я. Шульга // Доповіді Національної академії наук України. – 2013. – № 6. – С. 105-110.
23. Иванов В.А. Исследование влияния ветрового воздействия на течения и распространение примеси в Азовском море / В.А. Иванов, В.В. Фомин, Л.В. Черкесов, Т.Я. Шульга // Морской гидрофизический журнал. – 2010. – № 3. – С. 15-28.
24. Иванов В.А. Исследование влияния стационарных течений на динамические процессы и эволюцию примеси в Азовском море, вызванные действием

- ветра / В.А. Иванов, Л.В. Черкесов, Т.Я. Шульга // Морской гидрофизический журнал. – 2013. – № 3. – С. 13-24.
25. Инфельд Э. Нелинейные волны, солитоны и хаос / Э. Инфельд, Дж. Роуландс // Физматлит. – 2006. – 480 с.
26. Ільченко В.М. Поверхневі хвилі в каналі, утворені рухомою областю поверхневого тиску / В.М. Ільченко, О.Г. Стеценко // Прикладна гідромеханіка. – 2013. – Т. 15, № 4. – С. 40-48.
27. Кавецкая А. Распространение волн давления в трубках, заполненных жидкостью / А. Кавецкая, Н.Н. Кизилова // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях. Сб. тезисов междунар. конф. – Харьков. – 2012. – С.51.
28. Карпман В. И. Модулированные волны в нелинейных диспергирующих средах / В. И. Карпман, Е. М. Крушкаль // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1968. – Т. 55, Вып. 2. – С. 496 – 530.
29. Ковалев В.Г. Об определении профиля волны, генерируемой расширяющейся полостью в жидкости / В.Г. Ковалев, В.А. Поздеев // Акуст. вісн. – 2000. – Т. 3, N 3. – С. 56-61.
30. Константинов А.В. Влияние вязкости и капиллярности жидкости на нелинейную динамику системы "резервуар – жидкость со свободной поверхностью" / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Прикладная механика. – 2017. – Т. 53, № 2. – С. 13-23.
31. Константинов А.В. Нелинейная динамика совместного движения системы "резервуар – жидкость со свободной поверхностью" / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко // Прикладная механика. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 94-105.
32. Лимарченко О.С. Зародження кругової хвилі на вільній поверхні рідини в рухомому еліпсоїді / О. С. Лимаренко, І. С. Рудницький // Вісник КНУ. Серія фізико–математичні науки – 2009.– №4. – С. 43 – 46.
33. Луньова М.В. Аналіз енергії хвильового руху тришарової гідродинамічної системи. Вироджені випадки / М.В. Луньова, В.І. Богданов // XIII Всеукраїнська студентська наукова конференція “Перспективи розвитку

- точных наук, економіки та методики їх викладання”: матеріали конференції.
– Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2018. – С. 188-190.
34. Луньова М.В. Моделирование расширения хвиль у напівнескінченній тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою / М.В.Луньова // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях / Под редакцией профессора Жолткевича Г.Н. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2017. – С. 22-23.
35. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн: монография [Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г.]. – Киев: Наукова думка, 2012. – 232 с.
36. Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч. 3: Механика невязкой жидкости: монография [Тарапов И.Е.]. – Харьков: Золотые страницы, 2005. – 332 с.
37. Нелинейные волны в диспергирующих средах: монография [Карпман В.И.]. – М.: Наука, 1973 – 237 с.
38. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн: монография [Овсянников В.Л., Макаренко Н.И., Налимов В.И.]. – Новосибирск: Наука. – 1985. – 318 с.
39. Ольховський Р.В. Внутрішні хвилі за локальним збуренням при його слабонестационарному русі в стратифікованій рідині скінченої глибини / Р.В. Ольховський, О.Г. Стеценко // Прикладна гідромеханіка. – 1999. – Т. 1, № 1. – С. 64-72.
40. Пацегон Н.Ф. Общие свойства волновых движений непроводящих намагничивающихся сред / Н.Ф. Пацегон // I. Магнитн. гидродинамика. – 1990. – № 3. – С.15-20.
41. Пацегон Н.Ф. Термодинамическая устойчивость намагничивающихся сред / Н.Ф. Пацегон // I. Магнитн. гидродинамика. – 1989. – № 4. – С.13-21.
42. Пацегон Н.Ф. Термодинамические модели структурирования намагничивающихся сред / Н.Ф. Пацегон // I. Магнитн. гидродинамика. – 1991. – № 3. – С.10-16.

43. Пацегон Н.Ф. Термодинамические модели структурирования намагничивающихся сред / Н.Ф. Пацегон // I. Магнитн. гидродинамика. – 1991. – № 4. – С.40-44.
44. Питаевский Л. П. Вихревые нити в идеальном Бозе–газе / Л. П. Питаевский // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1961. – Т. 40, Вып. 2. – С. 646-651.
45. Поверхностные и внутренние волны: монография [Черкесов Л. В.]. – К: «Наукова думка», 1973. – 248 с.
46. Редчиц Д.А. Численное моделирование эффекта Магнуса при обтекании кругового цилиндра невозмущенным потоком вязкой жидкости / Д.А. Редчиц, А.А. Гуржий // Прикладная гидромеханика. – 2012. – Т.14, №.1. – С. 63 – 71.
47. Селезов И. Т. Нелинейное распространение волновых пакетов при околокритических волновых числах в кусочно–неоднородной по глубине жидкости / И.Т. Селезов, О. В. Авраменко // Теоретическая и прикладная механика. – 2000. – Вып.31. – С. 151-157.
48. Селезов И. Т. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред. / И.Т. Селезов, О.В. Авраменко // Прикладна гідромеханика. – 2002. – Т. 4 (76).– С. 3-13.
49. Селезов И. Т. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах / И.Т. Селезов, О.В. Авраменко // Динамические системы. – 2001.– Вып. 17. – С. 58-67.
50. Селезов И. Т. Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта / И. Т. Селезов, О. В. Авраменко // Математичні методи та фізико–механічні поля. – 2001. – 44, № 2.– С. 113-122.
51. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения / И. Т. Селезов, О. В. Авраменко // Прикладна гідромеханика. – 2001. – Т.3 (75), № 4.– С. 38 – 46.

52. Селезов И.Т. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины / И.Т. Селезов, О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий // Прикладна гідромеханіка. – 2005. – Т. 7 (79), № 1. – С. 80-89.
53. Селезов И.Т. Нелінійна стійкість розповсюдження хвильових пакетів в двошаровій рідині. / И.Т. Селезов, О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий // Прикладна гідромеханіка. – 2006. – Том 8 (80). № 4. – С.60-65.
54. Стеценко О.Г. Нестационарный рух точкового вихору в шарі стратифікованої рідини скінченої товщини / О.Г. Стеценко // Прикладна гідромеханіка. – 2012. – Т. 14, № 4. – С. 65-74.
55. Стеценко О.Г. Нестационарный рух точкового вихору у двошаровій рідині / О.Г. Стеценко // Прикладна гідромеханіка. – 2012. – Т. 14, № 2. – С. 70-79.
56. Стеценко О.Г. Поверхневі хвилі за рухомою областю поверхневого тиску в каналі з трапецієвидним поперечним перерізом / О.Г. Стеценко, В.М. Ільченко // Прикладна гідромеханіка. – 2014. – Т. 16, № 4. – С. 66-78.
57. Теория волновых движений жидкости: монография [Сретенский Л. Н.]. – М.: Наука, 1977.– 815 с.
58. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
59. Филиппова Е.Н. Математическая модель течения крови в сосуде как суперпозиции биоактивного windkessel элемента и пульсовой волны / Е.Н. Филиппова, Н.Н. Кизилова // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях. Сб. тезисов междунар. конф. – Харьков. – 2012. – С.119.
60. Чистина Э.О. Стабилизация неустойчивых мод в заполненных жидкостью многослойных вязкоупругих трубках // Э.О. Чистина, Н.Н. Кизилова // Современные проблемы математики, механики, информатики. Сб. тезисов междунар. школы-конф. "Тараповские чтения-2013". Харьков:Изд-во "Цифровая типография №1". – 2013. – С.75-76.
61. Чистина Э.О. Стабилизация течений вязких биожидкостей в многослойных вязкоупругих трубках / Э.О. Чистина, Н.Н. Кизилова // "Математическое

- моделирование и биомеханика в современном университете". Тезисы докладов 8-й Всероссийской школы-конф. Ростов-на-Дону. – 2013. – С.102.
62. Akers B.F. Overturned internal capillary-gravity waves / B. F. Akers, D. M. Ambrose, K. Pond, J. D. Wright // *European Journal of Mechanics B/Fluids*. – 2016. – Vol. 57. – P. 143-151.
63. Alford M. H. The formation and fate of internal waves in the South China Sea / M. H. Alford et al. // *Nature*. – 2015. – Т. 521. – №. 7550. – С. 65-69.
64. Avramenko O. Analysis of energy of internal waves in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system / O. Avramenko, M. Lunyova // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2018. – Vol. 2. – Issue 5 (92). – P. 26-33.
65. Avramenko O. Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid / O. Avramenko, M. Lunyova, V. Naradovyi // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2017. – Vol. 5. – Issue 5 (89). – P. 58-66.
66. Avramenko O.V. Conditions of wave propagation in a two-layer liquid with free surface / O.V. Avramenko, V.V. Naradovyi, I.T. Selezov // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2016. – 212 (2). – P. 131-141.
- Те саме: Селезов И.Т. Особенности распространения слабонелинейных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью / И. Т. Селезов, О. В. Авраменко, В. В. Наратовый // *Динамические системы*. – 2011. – Т.1 (29), № 1. – С. 53 – 68.
67. Avramenko O. V. Energy of Motion of Internal and Surface Waves in a Two-Layer Hydrodynamic System / O.V. Avramenko, V.V. Naradovyi, I.T. Selezov // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2018. – 229 (9). – P. 241-252.
68. Bai Y. et al. Nonlinear internal solitary waves in the northeast South China Sea near Dongsha Atoll using seismic oceanography // *Chinese Science Bulletin*. – 2015. – Т. 60. – № 10. – P. 944-951.
69. Benjamin T.B. The disintegration of wave trains in deep water. Pt. I. Theory / T.B. Benjamin, J.E. Feir // *J. Fluid Mech*. – 1967. – Vol. 27. – № 3. – P. 417-430.

70. Benney D. J. The propagation of nonlinear wave envelopes / D.J. Benney, A.C. Newell // *Journal Math. Phys.* – 1967. – Vol. 46. – P. 133-139.
71. Bona, J.L. Asymptotic models for internal waves / J.L. Bona, D. Lannes, J.-C. Saut, // *Math. Pures Appl.* – 2008. – 89. – P. 53-566.
72. Boussinesq J. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire / J. Boussinesq // *CR Acad. Sci. Paris.* – 1871. – T. 72. – P. 755-759.
73. Choi W. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system / W. Choi, R. Camassa // *J. Fluid Mech.* – 1996. – Vol. 313.- P. 83-103.
74. Chystina E.O. Flow stabilization in collapsible liquid-filled three-layered tubes / E.O. Chystina, N.N. Kizilova, M. Hamadiche // *Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки. Матеріали конф. Харків.* – 2013. – С. 6-9.
75. Cristie D. R. On solitary waves in the atmosphere / D. R. Cristie, K. Muirhead, A. Hales // *Journal of Atmospheric. Sciences.* – 1978. – 35. – P.805.
76. Debsarma S. Current-modified evolution equation for a broader bandwidth capillary-gravity wave packet / S. Debsarma, K. P. Das // *ANZIAM J.* – 2016. – No. 58. – P. 143-161
77. Debsarma S. Nonlinear evolution equations for broader bandwidth wave packets in crossing sea states / S. Debsarma, S. Senapati, K.P. Das // *International Journal of Oceanography.* – 2014. – Vol. 2014. – P. 1-9.
78. Deconinck, B. Stability of periodic gravity waves in the presence of surface tension / B. Deconinck, O. Trichtchenko // *European Journal of Mechanics B/Fluids.* – 2014. – Vol. 46. – P. 97–108.
79. Delfs J.-O. Water quality in urban areas: Mathematical modeling in environmental mechanics / J.-O. Delfs, N.N. Kizilova, O. Kolditz, Yu.I. Rudnev // *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. Abstracts of school-conf. "Tarapov readings".* – Kharkov. – 2013. – P.140-141.

80. Fan, K. Internal wave parameters retrieval from space-borne SAR image / K. Fan, B. Fu, Y. Gu, X. Yu, T. Liu, A. Shi, K. Xu, X. Gan // *Front. Earth Sci.* – 2015. – Vol. 9. – Issues 4. – P. 700-708.
81. Hamadiche M. Pulsatile flows in distensible tubes: a membrane model with fluid-structure interaction / M. Hamadiche, N. Kizilova // “Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology: From Macro- to Nanoscale Structures”. Book of Abstracts. Belarusian State University. – 2013. – P.139-142.
82. Hamadiche M. Stabilization of laminar and turbulent flows by sandwich-type coating / M. Hamadiche, N. Kizilova, M. Gad-el-Hak // *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. Abstracts of school-conf. "Tarapov readings"*. – Kharkov. – 2013. – P.12.
83. Haren H. High-frequency internal wave motions at the ANTARES site in the deep Western Mediterranean / H. Haren // *Ocean Dynamics*. – 2014. – Vol. 64 – P. 507–517.
84. Hasimoto H. Nonlinear modulation of gravity waves / H. Hasimoto, H. Ono // *Journal of the Physical Society of Japan*. – 1972. – 33. – P. 805-811.
85. Hong W. Y. A kind of new algebraic Rossby solitary waves generated by periodic external source / W. Y. Hong, R. W. Xiang, S. Y. Bao // *Nonlinear Dyn.* – 2014. – No. 76. – P. 1725-1735.
86. Hong W. Y. Forced dissipative Boussinesq equation for solitary waves excited by unstable topography / W. Y. Hong, S. Y. Bao, L. S. Yun // *Nonlinear Dyn.* – 2012. – No. 70. – P.1389-1396.
87. Hong, Y. A high-order perturbation of surfaces method for scattering of linear waves by periodic multiply layered gratings in two and three dimensions / Y. Hong, D.P. Nicholls // *Journal of Computational Physics*. – 2017. – Vol. 345. – P. 162-188.
88. Hongwei Y. Benjamin-Ono-Burgers-MKdV equation for algebraic Rossby solitary waves in stratified fluids and conservation Laws / Y. Hongwei, J. Shanshan, Y. Baoshu // *Abstract and Applied Analysis*. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1-5.

- 89.Hsu, H.-C. Lagrangian approach to interfacial water waves with free surface / H.-C. Hsu, C.-C. Tsai // *Applied Ocean Research*. – 2016. – No. 59. – P. 616-637.
- 90.Jo, T.-C. Dynamics of strongly nonlinear internal long waves in a three-layer fluid system / T.-C. Jo, Y.-K. Choi // *Ocean Sci. J.* – 2014. – 49. – P. 357.
- 91.Kizilova N. 3D modeling of flow and heat transfer for optimization the geothermal systems / N. Kizilova // *Proc. of the 8th International Green Energy Conference. Monograph*. – NAU, Kiev. – 2013. – P.245-248.
- 92.Kizilova N. Modeling of pulse wave propagation and reflection along human aorta / N. Kizilova, H. Solovyova, J. Mizerski // *The International Conference of the Polish Society of Biomechanics*. – Springer, Cham. – 2018. – P. 23-35.
- 93.Korteweg D.J. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves / D.J. Korteweg, G. de Vries // *Phil. Mag.* – 1895. – Vol. 39. – P. 422-443.
- 94.Kurkina O. Kinematic parameters of internal waves of the second mode in the South China Sea / O. Kurkina et al. // *Nonlinear Processes in Geophysics*. – 2017. – T. 24. – № 4. – P. 645.
- 95.Lighthill M.J. Contributions to the theory of waves in nonlinear dispersive systems / M.J. Lighthill // *J. Inst. Math. Appl.* – 1965. – Vol. 1. – № 3. – P. 269-306.
- 96.Massel S. R. On the nonlinear internal waves propagating in an inhomogeneous shallow sea / S. R. Massel // *Oceanologia*. – 2016. – 58. – P. 59-70.
- 97.Matsuno Y. Higher-order nonlinear evolution equation for interfacial waves in two-layer fluid system / Y. Matsuno // *Physical review*. – 1994. – Vol. 49. – No 3. – P. 2091-2095.
- 98.Naradovyi V. Investigation of the energy of wave motions in a three-layer hydrodynamic system / V. Naradovyi, D. Kharchenko // *Waves in Random and Complex Media*. – P.1-20.
- 99.Nayfeh A. H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface / A.H. Nayfeh // *Trans. ASME., Ser. E.*– 1976. – 43, № 4.– P. 584-588.

100. Nayfeh, A. H. Second-harmonic resonance in the interaction of an air stream with capillary-gravity waves. / A. H. Nayfeh // Journal of Fluid Mechanics. – 1973. – 59(04). – P. 803.
101. Patsegon N.F. To the theory of parametric resonance in magnetic fluids / N.F. Patsegon // First Karazin Scientific readings. Mathematical symposium. – 2004. – P.50-51.
102. Patsegon N.F. Wave processes in magnetic fluids with transformed microstructure / N.F. Patsegon // Proc.of Fifth Intern.Conf. Fluid Mechanics. – Cairo. – 1995. – P.1277-1286.
103. Rayleigh L. On Waves Propagated along the Plane Surface of an Elastic Solid / Lord Rayleigh // Proc. London Math. Soc.: journal. – 1885. – Vol. s1-17. – № 1. – P. 4-11.
104. Riemann B. Uber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungswite / B. Riemann // Gottingen Abhandlungen. Bd. VIII, S. 43; Werke, 2te Aufl., Leipzig. – 1892. – P. 157.
105. Rosi, G. Surface waves at the interface between an inviscid fluid and a dipolar gradient solid / G. Rosi, V.-H. Nguyen, S. Naili // Wave Motion. – 2015. – Vol. 53. – P. 51-65.
106. Scott Russell J. Report on waves / J. Scott Russell // Rept. 14th meetings of the British Assoc. for the Advancement of Science. – London: John Murray. – 1844. – P. 311-390.
107. Sechin R.V. Flow over a streamline body and shape optimization / R.V. Sechin, N.N. Kizilova // «Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках иа інформаційних технологіях». Тези наукової конференції для студентів та аспірантів. – Харків. – 2010. – С. 62-63.
108. Sechin R.V. Numerical determination of hydrodynamical coefficients of equations of the solid body motion in infinite liquid / R.V. Sechin, N.N. Kizilova // Book of abstracts of the International school-conference “Tarapov’s readings”. – Kharkov. – 2008. – P.61-64.

109. Selezov I. T. Nonlinear interaction of internal and surface gravity waves in a two-layer fluid with free surface / I.T. Selezov, Yu.V. Gurtovyy, O.V. Avramenko, V.V. Naradovyy // J. of Math. Science. – 2010. – Vol. 168, № 4. – P. 590-602.
- Те саме: Селезов И.Т. Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью / И.Т. Селезов, О.В. Авраменко, Ю.В. Гуртовий, В.В. Наратовый // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – 52, № 1. – С. 72-83.
110. Singh, A. K. Effect of loosely bonded undulated boundary surfaces of doublylayered half-space on the propagation of torsional wave / A. K. Singh, A. Lakshman // Mechanics Research Communications. – 2016. Vol. 73. – P. 91-106.
111. Smith S. Experiments on nonlinear harmonic wave generation from colliding internal wave beams / S. Smith, J. Crockett // Experimental Thermal and Fluid Science. – 2014. – Vol. 54. – P. 93–101.
112. Stokes C.C. On the theory of oscillatory waves / C.C. Stokes // Camb. Trans. – 1847. – 8. – P. 441-473.
113. Tahvildari, N. Generation of long subharmonic internal waves by surface waves / N. Tahvildari, J.M. Kaihatu, W.S. Saric // Ocean Modelling. – 2016. – Vol. 106. – P. 12-26.
114. Tarapov I. E. Continuum Mechanics: Vol. 3, Mechanics of Inviscid Liquid [in Russian], Zolotye Stranitsy, Kharkov. – 2005.
115. Turitsyn S.K. Dispersion-managed solitons in fibre systems and lasers / S.K. Turitsyn, B.G. Bale, M.P. Fedoruk // Physics Reports. – 2012. – T. 521. – № 4. – P. 135-203.
116. Vitousek, S. A nonhydrostatic, isopycnal-coordinate ocean model for internal waves / S. Vitousek, O. B. Fringer // Ocean Modelling. – 2014. – Vol. 83. – P. 118–144.

117. Wang, Y. The viscous surface-internal wave problem: Global well-posedness and decay / Y. Wang, I. Tice, C. Kim // Arch. Rational Mech. Anal. – 2014. – Vol. 212. – P. 1–92.
118. Whitham G.B. A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian // J. Fluid Mech. – 1965. – 22. – P. 273-283.
119. Yuen H.C. Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train / H. C. Yuen, B. M. Lake // Journal of Fluid Mechanics. – 1977. – Vol.83, Part 1. – P. 49-74.
120. Yuen H.C. Nonlinear dynamics of deep-water waves / H. C. Yuen, B. M. Lake // Advances in Applied Mechanics. – 1982. – 22. – P. 33-45.
121. Zakharov V. E. Kolmogorov spectra of turbulence / V.E. Zakharov, V. S. L'vov, G.I. Falkovich // I. Wave turbulence. – Springer-Verlag. – 1992. – 364 p.
122. Zakharov V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid / V.E. Zakharov // Zh. Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz. – 1968. – 9. – P. 86–94. (Transl. J. Appl. Mech. and Tech. Phys. – 1968. – 9. – P. 190–194)
123. Zhenhua X. Variability of internal tides and near-inertial waves on the continental slope of the northwestern South China Sea / X. Zhenhua, Y. Baoshu, H. Yijun, X. Yongsheng // Journal of geophysical research: Oceans. – 2013. – Vol. 118. – P. 197-211.
124. Zhisong F. A study of SAR remote sensing of internal solitary waves in the north of the South China Sea: I. Simulation of internal tide transformation / F. Zhisong, Z. Yuanling, S. Mei // Acta Oceanologica Sinica. – 2008. – Vol. 27. – № 4. – P. 39-56..
125. Zhu, H. (2016). Numerical simulation of interaction between internal solitary waves and submerged ridges / H. Zhu, L. Wang, E.J. Avital, H. Tang, J.J.R. Williams // Applied Ocean Research. – 2016. – 58. – P. 118-134.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А.

Програма символного виводу умови розв'язності задачі другого наближення
та знаходження її розв'язків

```
restart;
// підключимо бібліотеки лінійної алгебри
with(LinearAlgebra); with(LinearFunctionalSystems);

// задамо розв'язки задачі першого наближення
phi11 := -I*omega*(A(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))*exp(k*z)-AC(x1, x2, t1, t2)*exp(-
    I*(k*x0-omega*t0))*exp(k*z))/k;
phi21 := -I*(z1*((1/2)*e1*exp(-k*z)+(1/2)*e2*exp(k*z))+z2*((1/2)*exp(k*z)-(1/2)*exp(-
    k*z)))*(A(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))-AC(x1, x2, t1, t2)*exp(-I*(k*x0-
    omega*t0)))/(rho[2]*omega*cosh(k*h[2])*k);
phi31 := I*z2*cosh(k*(h[2]+h[3]-z))*(A(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))-AC(x1, x2, t1,
    t2)*exp(-I*(k*x0-omega*t0)))/(sinh(k*h[3])*k*rho[2]*omega);
eta11 := A(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))+AC(x1, x2, t1, t2)*exp(-I*(k*x0-omega*t0));
eta21 := z2*(A(x1, x2, t1, t2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))+AC(x1, x2, t1, t2)*exp(-I*(k*x0-
    omega*t0)))/(omega^2*rho[2]);

// розв'язки задачі другого наближення будемо шукати у вигляді
phi12 := (B10+B11*z)*exp(I*(k*x0-omega*t0))*exp(k*z)+B20*exp((2*I)*(k*x0-
    omega*t0))*exp(2*k*z)+(BC10+BC11*z)*exp(-I*(k*x0-
    omega*t0))*exp(k*z)+BC20*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))*exp(2*k*z);
phi22 := (C10+C11*z)*exp(I*(k*x0-omega*t0))*e1*exp(-k*z)+C20*exp((2*I)*(k*x0-
    omega*t0))*e5*exp(-2*k*z)+(D10+D11*z)*exp(I*(k*x0-
    omega*t0))*e2*exp(k*z)+D20*exp((2*I)*(k*x0-
    omega*t0))*e6*exp(2*k*z)+(CC10+CC11*z)*exp(-I*(k*x0-omega*t0))*e1*exp(-
    k*z)+CC20*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))*e5*exp(-2*k*z)+(DC10+DC11*z)*exp(-
    I*(k*x0-omega*t0))*e2*exp(k*z)+DC20*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))*e6*exp(2*k*z);
phi32 := E11*(h[2]+h[3]-z)*sinh(k*(h[2]+h[3]-z))*exp(I*(k*x0-
    omega*t0))+E10*cosh(k*(h[2]+h[3]-z))*exp(I*(k*x0-
    omega*t0))+E20*cosh(2*k*(h[2]+h[3]-z))*exp((2*I)*(k*x0-
    omega*t0))+EC11*(h[2]+h[3]-z)*sinh(k*(h[2]+h[3]-z))*exp(-I*(k*x0-
    omega*t0))+EC10*cosh(k*(h[2]+h[3]-z))*exp(-I*(k*x0-
    omega*t0))+EC20*cosh(2*k*(h[2]+h[3]-z))*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0));
eta12 := F0+F1*exp(I*(k*x0-omega*t0))+F2*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))+FC0+FC1*exp(-
    I*(k*x0-omega*t0))+FC2*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0));
eta22 := G0+G1*exp(I*(k*x0-omega*t0))+G2*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))+GC0+GC1*exp(-
    I*(k*x0-omega*t0))+GC2*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0));

// задамо систему виразів, якими описується постановка задачі другого наближення
проблеми
KU1 := unapply(collect(diff(eta12, t0)-(diff(phi12, z))+diff(eta11, t1)+(diff(eta11, x0))*(diff(phi11,
    x0))-eta11*(diff(diff(phi11, z), z)), exp), z);
KU2 := unapply(collect(diff(eta12, t0)-(diff(phi22, z))+diff(eta11, t1)+(diff(eta11, x0))*(diff(phi21,
    x0))-eta11*(diff(diff(phi21, z), z)), exp), z);
KU3 := unapply(collect(diff(eta22, t0)-(diff(phi22, z))+diff(eta21, t1)+(diff(eta21, x0))*(diff(phi21,
    x0))-eta21*(diff(diff(phi21, z), z)), exp), z);
```

```

KU4 := unapply(collect(diff(eta22, t0)-(diff(phi32, z))+diff(eta21, t1)+(diff(eta21, x0))*(diff(phi31,
x0))-eta21*(diff(diff(phi31, z), z)), exp), z);
DU1 := unapply(collect(rho[1]*(diff(phi12, t0))-rho[2]*(diff(phi22, t0))+(rho[1]-rho[2])*eta12-
T[1]*(diff(diff(eta12, x0), x0))+rho[1]*(diff(phi11, t1)+eta11*(diff(diff(phi11, t0), z)))-
rho[2]*(diff(phi21, t1)+eta11*(diff(diff(phi21, t0), z)))+.5*rho[1]*((diff(phi11,
x0))^2+(diff(phi11, z))^2)-.5*rho[2]*((diff(phi21, x0))^2+(diff(phi21, z))^2)-
2*T[1]*(diff(diff(eta11, x0), x1)), exp), z);
DU2 := unapply(collect(rho[2]*(diff(phi22, t0))-rho[3]*(diff(phi32, t0))+(rho[2]-rho[3])*eta22-
T[2]*(diff(diff(eta22, x0), x0))+rho[2]*(diff(phi21, t1)+eta21*(diff(diff(phi21, t0), z)))-
rho[3]*(diff(phi31, t1)+eta21*(diff(diff(phi31, t0), z)))+.5*rho[2]*((diff(phi21,
x0))^2+(diff(phi21, z))^2)-.5*rho[3]*((diff(phi31, x0))^2+(diff(phi31, z))^2)-
2*T[2]*(diff(diff(eta21, x0), x1)), exp), z);

```

// використаємо процедуру algsubs для приведення виразів до одного вигляду

```

KU11 := algsubs((exp(I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)), KU1(0));
KU21 := algsubs((exp(I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)), KU2(0));
KU31 := algsubs((exp(I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)), KU3(h[2]));
KU41 := algsubs((exp(I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)), KU4(h[2]));
DU11 := algsubs((exp(I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)), DU1(0));
DU21 := algsubs((exp(I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)), DU2(h[2]));

```

```

KU12 := algsubs((exp(-I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0)), KU1(0));
KU22 := algsubs((exp(-I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0)), KU2(0));
KU32 := algsubs((exp(-I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0)), KU3(h[2]));
KU42 := algsubs((exp(-I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0)), KU4(h[2]));
DU12 := algsubs((exp(-I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0)), DU1(0));
DU22 := algsubs((exp(-I*(k*x0-omega*t0)))^2 = exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0)), DU2(h[2]));

```

// задамо коефіцієнти B11, C11, D11, E11 та спряжені до них вирази BC11, CC11, DC11, EC11

```

B11 := -omega*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))/k;
D11 := -((1/2*(rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-
T[1]*k^3))/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))+(1/2*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]
*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-
T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*exp(k*h[2])/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))*(diff(A(x1, x2,
t1, t2), x1)));
C11 := ((1/2*(rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-T[1]*k^3))/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))-
(1/2*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-
T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*exp(-k*h[2])/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))*(diff(A(x1, x2,
t1, t2), x1)));
E11 := (omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-
T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))/(k*sinh(k*h[3])*rho[2]*omega);
BC11 := -omega*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1))/k;
DC11 := -((1/2*(rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-
T[1]*k^3))/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))+(1/2*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]
*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-
T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*exp(k*h[2])/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))*(diff(AC(x1, x2,
t1, t2), x1)));
CC11 := ((1/2*(rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-T[1]*k^3))/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))-
(1/2*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-

```

```

T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*exp(-k*h[2]/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))*(diff(AC(x1, x2,
t1, t2), x1));
EC11 := (omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-
T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1))/(k*sinh(k*h[3])*rho[2]*omega);

// выпишем систему при exp(I*(k*x0-omega*t0));
riv11 := collect(coeff(KU11, exp(I*(k*x0-omega*t0))), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1));
riv12 := collect(coeff(KU21, exp(I*(k*x0-omega*t0))), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1));
riv13 := collect(collect(coeff(KU31, exp(I*(k*x0-omega*t0))), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1)),
diff(A(x1, x2, t1, t2), t1));
riv14 := collect(collect(coeff(KU41, exp(I*(k*x0-omega*t0))), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1)),
diff(A(x1, x2, t1, t2), t1));
riv15 := ((1.*I)*(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3)*(5.*e1+5.*e2)/(omega*cosh(k*h[2])*k)-(1.*I)*rho[1]*omega/k)*(diff(A(x1,
x2, t1, t2), t1))-(2.*I)*T[1]*k*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-(1.*I)*rho[1]*B10*omega-
1.*rho[2]*(-(1.*I)*C10*omega*e1-(1.*I)*D10*omega*e2)+(rho[1]-
1.*rho[2])*F1+T[1]*F1*k^2;
riv16 := (-1.*I)*rho[3]*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*cosh(k*h[3]/(k*sinh(k*h[3])*rho[2]*omega)-
(1.*I)*((rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-1.*T[1]*k^3)*(5.*e1*exp(-
k*h[2])+5.*e2*exp(k*h[2]))+(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-
1.*k*rho[1]+k*rho[2]-1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*(5.*exp(k*h[2])-5.*exp(-
k*h[2]))/(omega*cosh(k*h[2])*k))*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
t1)))+((1.*I)*rho[3]*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-
1.*k*rho[1]+k*rho[2]-1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*h[3]/(k*rho[2]+rho[2]*(-
(1.*I)*omega*e1*exp(-k*h[2]))*(5.*(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3))/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))-
(5.*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*exp(-
k*h[2]/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2])))*h[2]+I*omega*e2*exp(k*h[2]))*((5.*(rho[1]*om
ega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3))/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))+(5.*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[
1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*exp(k*h[2]/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2])))*h[2]-
(2.*I)*T[2]*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*k/(omega^2*rho[2]))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))+rho[2]*(-
(1.*I)*omega*e1*exp(-k*h[2])*C10-
(1.*I)*omega*e2*exp(k*h[2])*D10)+T[2]*G1*k^2+(1.*I)*rho[3]*E10*cosh(k*h[3])*ome
ga+(rho[2]-1.*rho[3])*G1;

// выпишем систему при exp(-I*(k*x0-omega*t0));
riv21 := collect(coeff(KU12, exp(-I*(k*x0-omega*t0))), diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1));
riv22 := collect(coeff(KU22, exp(-I*(k*x0-omega*t0))), diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1));
riv23 := collect(collect(coeff(KU32, exp(-I*(k*x0-omega*t0))), diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1)),
diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1));
riv24 := collect(collect(coeff(KU42, exp(-I*(k*x0-omega*t0))), diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1)),
diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1));
riv25 := (-1.*I)*(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3)*(5.*e1+5.*e2)/(omega*cosh(k*h[2])*k)+I*rho[1]*omega/k)*(diff(AC(x1,
x2, t1, t2), t1))+(2.*I)*T[1]*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1))*k+I*rho[1]*BC10*omega-
1.*rho[2]*(I*CC10*omega*e1+I*DC10*omega*e2)+(rho[1]-
1.*rho[2])*FC1+T[1]*FC1*k^2;

```



```

riv26 := ((1.*I)*rho[3]*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*cosh(k*h[3])/(sinh(k*h[3])*k*rho[2]*omega)+I*((rho[1]*om
ega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-1.*T[1]*k^3)*(0.5*e1*exp(-
k*h[2])+0.5*e2*exp(k*h[2]))+(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-
1.*k*rho[1]+k*rho[2]-1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*(0.5*exp(k*h[2])-0.5*exp(-
k*h[2])))/(omega*cosh(k*h[2])*k))*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1))+(-
(1.*I)*rho[3]*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*h[3]/(k*rho[2]+rho[2]*(I*omega*e1*exp(-
k*h[2])*((0.5*(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3))/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))-
(0.5*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2])))*exp(-k*h[2])/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2])))*h[2]-
(1.*I)*omega*e2*exp(k*h[2])*((0.5*(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3))/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]))+(0.5*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[
1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2])))*exp(k*h[2])/(k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2])))*h[2]+(2.*I)*
T[2]*(omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-1.*k*rho[1]+k*rho[2]-
1.*T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]))*k/(omega^2*rho[2]))*(diff(AC(x1, x2, t1, t2),
x1))+rho[2]*(I*omega*e1*exp(-
k*h[2])*CC10+I*omega*e2*exp(k*h[2])*DC10)+T[2]*GC1*k^2-
(1.*I)*rho[3]*EC10*cosh(k*h[3])*omega+(rho[2]-1.*rho[3])*GC1;

```

// випишемо систему при $\exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))$;

```

riv31 := collect(coeff(KU11, exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))), A(x1, x2, t1, t2));
riv32 := collect(coeff(KU21, exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))), A(x1, x2, t1, t2));
riv33 := collect(coeff(KU31, exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))), A(x1, x2, t1, t2));
riv34 := collect(coeff(KU41, exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))), A(x1, x2, t1, t2));
riv35 := collect(coeff(DU11, exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))), A(x1, x2, t1, t2));
riv36 := collect(coeff(DU21, exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))), A(x1, x2, t1, t2));

```

// випишемо систему при $\exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))$;

```

riv41 := collect(coeff(KU12, exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))), AC(x1, x2, t1, t2));
riv42 := collect(coeff(KU22, exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))), AC(x1, x2, t1, t2));
riv43 := collect(coeff(KU32, exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))), AC(x1, x2, t1, t2));
riv44 := collect(coeff(KU42, exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))), AC(x1, x2, t1, t2));
riv45 := collect(coeff(DU12, exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))), AC(x1, x2, t1, t2));
riv46 := collect(coeff(DU22, exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))), AC(x1, x2, t1, t2));

```

// ЗНАЙДЕМО УМОВУ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ ДРУГОГО НАБЛИЖЕННЯ

// задамо значення невідомих змінних

```

e1 := exp(k*h[2]);
e2 := exp(-k*h[2]);
e3 := exp(k*(h[2]+h[3]));
e4 := exp(-k*(h[2]+h[3]));
e5 := exp(2*k*h[2]);
e6 := exp(-2*k*h[2]);
e7 := exp(2*k*(h[2]+h[3]));
e8 := exp(-2*k*(h[2]+h[3]));
e9 := exp(3*k*h[2]);
e10 := exp(-3*k*h[2]);
e11 := exp(3*k*(h[2]+h[3]));
e12 := exp(-3*k*(h[2]+h[3]));

```

```

z1 := rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-T[1]*k^3;
z2 := omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-
T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]);

```

// складаємо стовпчики вільних членів

```

V0 := Matrix([[-coeff(riv11, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv11,
diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))), [-coeff(riv12, diff(A(x1, x2, t1, t2),
x1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv12, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(A(x1, x2, t1,
t2), t1))), [-coeff(riv13, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv13,
diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))), [-coeff(riv14, diff(A(x1, x2, t1, t2),
x1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv14, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(A(x1, x2, t1,
t2), t1))), [-coeff(riv15, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv15,
diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))), [-coeff(riv16, diff(A(x1, x2, t1, t2),
x1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv16, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(A(x1, x2, t1,
t2), t1))]]);

```

// запишемо умову розв'язності другого наближення у вигляді матриці, що залежить від коефіцієнтів B10, C10, D10, E10, G1 та стовпчика вільних членів V0

```

M0 := Matrix([[coeff(riv11, B10), coeff(riv11, C10), coeff(riv11, D10), coeff(riv11, E10), V0[1, 1],
coeff(riv11, G1)], [coeff(riv12, B10), coeff(riv12, C10), coeff(riv12, D10), coeff(riv12, E10),
V0[2, 1], coeff(riv12, G1)], [coeff(riv13, B10), coeff(riv13, C10), coeff(riv13, D10),
coeff(riv13, E10), V0[3, 1], coeff(riv13, G1)], [coeff(riv14, B10), coeff(riv14, C10),
coeff(riv14, D10), coeff(riv14, E10), V0[4, 1], coeff(riv14, G1)], [coeff(riv15, B10),
coeff(riv15, C10), coeff(riv15, D10), coeff(riv15, E10), V0[5, 1], coeff(riv15, G1)],
[coeff(riv16, B10), coeff(riv16, C10), coeff(riv16, D10), coeff(riv16, E10), V0[6, 1],
coeff(riv16, G1)]]);

```

// знайдемо визначник матриці M0, виділивши при цьому доданки з частинними похідними від обвідної хвильового пакету Ax1 та At1

```

VM := algsubs(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1) = diff(A(x1, x2, t1, t2), t1),
collect(collect(Determinant(M0), diff(A(x1, x2, t1, t2), t1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1)));

```

// впишемо коефіцієнти при частинних похідних від обвідної хвильового пакету Ax1 та At1

```

Ax1 := coeff(VM, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1));
At1 := coeff(VM, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1));

```

// Умова розв'язності буде мати вигляд

```

UR := At1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))+Ax1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1));

```

// Виконаємо перевірку відповідно до рівняння (3.5) на сторінці 94.

```

PR1 := unapply(Ax1(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k, omega)/At1(rho[1], rho[2],
rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k, omega), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k, omega);

```

```

a := unapply(rho[3]*coth(k*h[3])*rho[1]+rho[2]*coth(k*h[2])*rho[1]+
rho[3]*coth(k*h[3])*coth(k*h[2])*rho[2] +rho[2]^2, rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2],
h[3], k);

```

```

b := unapply(-rho[3]*coth(k*h[3])*T[1]*k^3-rho[2]*coth(k*h[2])*T[1]*k^3-
rho[3]*coth(k*h[3])*k*rho[1]+rho[3]*coth(k*h[3])*k*rho[2]+coth(k*h[2])*k*rho[2]^2-
rho[2]*coth(k*h[2])*k*rho[1]-(rho[1]+coth(k*h[2])*rho[2])*(k*rho[2]-k*rho[3]+k^3*T[2]),
rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k);

```

```

c := unapply(-(-T[1]*k^3-k*rho[1]+k*rho[2])*(k*rho[2]-k*rho[3]+k^3*T[2]), rho[1], rho[2],
rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k);

```

```
w[1] := unapply(sqrt((-b(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)-sqrt(b(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)^2-4*a(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)*c(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)))/(2*a(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k))), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k);
w[2] := unapply(sqrt((-b(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)+sqrt(b(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)^2-4*a(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)*c(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)))/(2*a(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k))), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k);
difw1 := unapply(diff(w[1](rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k), k), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k);
```

// задамо значення параметрів системи

```
r1 := 1; r2 := .9; r3 := .8; T1 := 0; T2 := 0; hh2 := 1; hh3 := 1; kk := 1;
```

```
omega := evalf(w[1](r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3, kk));
```

```
evalf(PR1(r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3, kk, omega)); evalf(difw1(r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3, kk));
```

0.1520184666

0.1520184667

// задамо значення параметрів системи

```
rho[1] := 'rho[1]'; rho[2] := 'rho[2]'; rho[3] := 'rho[3]';
```

```
T[1] := 'T[1]'; T[2] := 'T[2]';
```

```
h[2] := 'h[2]'; h[3] := 'h[3]';
```

```
k := 'k'; omega := 'omega';
```

// ЗНАЙДЕМО РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ ДРУГОГО НАБЛИЖЕННЯ

// запишемо систему при $\exp(I(k*x0-\omega*t0))$; у вигляді матриці, що залежить від коефіцієнтів B10, C10, D10, E10, G1*

```
M1 := Matrix([[coeff(riv11, B10), coeff(riv11, C10), coeff(riv11, D10), coeff(riv11, E10), coeff(riv11, G1)], [coeff(riv12, B10), coeff(riv12, C10), coeff(riv12, D10), coeff(riv12, E10), coeff(riv12, G1)], [coeff(riv13, B10), coeff(riv13, C10), coeff(riv13, D10), coeff(riv13, E10), coeff(riv13, G1)], [coeff(riv14, B10), coeff(riv14, C10), coeff(riv14, D10), coeff(riv14, E10), coeff(riv14, G1)], [coeff(riv16, B10), coeff(riv16, C10), coeff(riv16, D10), coeff(riv16, E10), coeff(riv16, G1)]]);
```

// запишемо систему при $\exp(-I(k*x0-\omega*t0))$; у вигляді матриці, що залежить від коефіцієнтів BC10, CC10, DC10, EC10, GC1*

```
M2 := Matrix([[coeff(riv21, BC10), coeff(riv21, CC10), coeff(riv21, DC10), coeff(riv21, EC10), coeff(riv21, GC1)], [coeff(riv22, BC10), coeff(riv22, CC10), coeff(riv22, DC10), coeff(riv22, EC10), coeff(riv22, GC1)], [coeff(riv23, BC10), coeff(riv23, CC10), coeff(riv23, DC10), coeff(riv23, EC10), coeff(riv23, GC1)], [coeff(riv24, BC10), coeff(riv24, CC10), coeff(riv24, DC10), coeff(riv24, EC10), coeff(riv24, GC1)], [coeff(riv26, BC10), coeff(riv26, CC10), coeff(riv26, DC10), coeff(riv26, EC10), coeff(riv26, GC1)]]);
```

// складаємо стовпчики вільних членів для матриці M1 та M2 відповідно

```
V1 := Matrix([[ -coeff(riv11, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv11, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))], [-coeff(riv12, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv12, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))], [-coeff(riv13, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv13,
```

```
diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))), [-coeff(riv14, diff(A(x1, x2, t1, t2),
x1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv14, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(A(x1, x2, t1,
t2), t1))], [-coeff(riv16, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv16,
diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1))]]);
```

```
V2 := Matrix([[coeff(riv21, diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1))*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv21,
diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1))], [-coeff(riv22, diff(AC(x1, x2, t1,
t2), x1))*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv22, diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(AC(x1,
x2, t1, t2), t1))], [-coeff(riv23, diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1))*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1))], [-
coeff(riv24, diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1))*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv24,
diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1))], [-coeff(riv26, diff(AC(x1, x2, t1,
t2), x1))*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1))-coeff(riv26, diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1))*(diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1))]]);
```

// розв'язки системи при $\exp(I(k*x0-\omega*t0))$ відносно коефіцієнтів B10, C10, D10, E10, G1 будемо шукати матричним способом*

```
MO1 := evalm(1/M1);
R1 := `&*(MO1, V1);
RR1 := evalm(R1);
```

// виведемо коефіцієнти B10, C10, D10, E10, G1

```
B10 := collect(collect(RR1[1, 1], diff(A(x1, x2, t1, t2), x1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), t1));
C10 := collect(collect(collect(RR1[2, 1], exp), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), t1));
D10 := collect(collect(collect(RR1[3, 1], exp), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), t1));
E10 := collect(collect(collect(RR1[4, 1], exp), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), t1));
G1 := collect(collect(collect(RR1[5, 1], exp), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), t1));
F1 := 0;
```

// розв'язки системи при $\exp(-I(k*x0-\omega*t0))$ відносно коефіцієнтів BC10, CC10, DC10, EC10, GC1 будемо шукати матричним способом*

```
MO2 := evalm(1/M2);
R2 := `&*(MO2, V2);
RR2 := evalm(R2);
```

// виведемо коефіцієнти BC10, CC10, DC10, EC10, GC1

```
BC10 := collect(collect(RR2[1, 1], diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1)), diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1));
CC10 := collect(collect(RR2[2, 1], diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1)), diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1));
DC10 := collect(collect(RR2[3, 1], diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1)), diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1));
EC10 := collect(collect(RR2[4, 1], diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1)), diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1));
GC1 := collect(collect(simplify(RR2[5, 1]), diff(AC(x1, x2, t1, t2), x1)), diff(AC(x1, x2, t1, t2), t1));
FC1 := 0;
```

*// запишемо систему при $\exp((2*I)*(k*x0-\omega*t0))$ у вигляді матриці, що залежить від коефіцієнтів B20, C20, D20, E20, F2, G2*

```
M3 := Matrix(6, 6, [[coeff(riv31, B20), coeff(riv31, C20), coeff(riv31, D20), coeff(riv31, E20),
coeff(riv31, F2), coeff(riv31, G2)], [coeff(riv32, B20), coeff(riv32, C20), coeff(riv32, D20),
coeff(riv32, E20), coeff(riv32, F2), coeff(riv32, G2)], [coeff(riv33, B20),
coeff(riv33, C20), coeff(riv33, D20), coeff(riv33, E20), coeff(riv33, F2), coeff(riv33, G2)],
[coeff(riv34, B20), coeff(riv34, C20), coeff(riv34, D20), coeff(riv34, E20), coeff(riv34,
```

F2), coeff(riv34, G2)], [coeff(riv35, B20), coeff(riv35, C20), coeff(riv35, D20),
coeff(riv35, E20), coeff(riv35, F2), coeff(riv35, G2)], [coeff(riv36, B20), coeff(riv36,
C20), coeff(riv36, D20), coeff(riv36, E20), coeff(riv36, F2), coeff(riv36, G2)]]);

// запишемо систему при $\exp(-(2*I)*(k*x0-\omega*t0))$ у вигляді матриці, що залежить від
коефіцієнтів BC20, CC20, DC20, EC20, FC2, GC2

M4 := Matrix(6, 6, [[coeff(riv41, BC20), coeff(riv41, CC20), coeff(riv41, DC20), coeff(riv41,
EC20), coeff(riv41, FC2), coeff(riv41, GC2)], [coeff(riv42, BC20), coeff(riv42, CC20),
coeff(riv42, DC20), coeff(riv42, EC20), coeff(riv42, FC2), coeff(riv42, GC2)],
[coeff(riv43, BC20), coeff(riv43, CC20), coeff(riv43, DC20), coeff(riv43, EC20),
coeff(riv43, FC2), coeff(riv43, GC2)], [coeff(riv44, BC20), coeff(riv44, CC20),
coeff(riv44, DC20), coeff(riv44, EC20), coeff(riv44, FC2), coeff(riv44, GC2)],
[coeff(riv45, BC20), coeff(riv45, CC20), coeff(riv45, DC20), coeff(riv45, EC20),
coeff(riv45, FC2), coeff(riv45, GC2)], [coeff(riv46, BC20), coeff(riv46, CC20),
coeff(riv46, DC20), coeff(riv46, EC20), coeff(riv46, FC2), coeff(riv46, GC2)]]);

// складаємо стовпчики вільних членів для матриць M3 та M4 відповідно

V3 := Matrix(6, 1, [[-coeff(riv31, A(x1, x2, t1, t2)^2)*A(x1, x2, t1, t2)^2], [-coeff(riv32, A(x1, x2,
t1, t2)^2)*A(x1, x2, t1, t2)^2], [-coeff(riv33, A(x1, x2, t1, t2)^2)*A(x1, x2, t1, t2)^2], [-
coeff(riv34, A(x1, x2, t1, t2)^2)*A(x1, x2, t1, t2)^2], [-coeff(riv35, A(x1, x2, t1,
t2)^2)*A(x1, x2, t1, t2)^2], [-coeff(riv36, A(x1, x2, t1, t2)^2)*A(x1, x2, t1, t2)^2]]);

V4 := Matrix(6, 1, [[-coeff(riv41, AC(x1, x2, t1, t2)^2)*AC(x1, x2, t1, t2)^2], [-coeff(riv42, AC(x1,
x2, t1, t2)^2)*AC(x1, x2, t1, t2)^2], [-coeff(riv43, AC(x1, x2, t1, t2)^2)*AC(x1, x2, t1,
t2)^2], [-coeff(riv44, AC(x1, x2, t1, t2)^2)*AC(x1, x2, t1, t2)^2], [-coeff(riv45, AC(x1, x2,
t1, t2)^2)*AC(x1, x2, t1, t2)^2], [-coeff(riv46, AC(x1, x2, t1, t2)^2)*AC(x1, x2, t1, t2)^2]]);

// розв'язки системи при $\exp((2*I)*(k*x0-\omega*t0))$ відносно коефіцієнтів B20, C20, D20,
E20, F2, G2 будемо шукати матричним способом

MO3 := evalm(1/M3);
R3 := `&*`(MO3, V3);
RR3 := evalm(R3);

// впишемо коефіцієнти B20, C20, D20, E20, F2, G2

B20 := collect(collect(simplify(RR3[1, 1]), exp), A(x1, x2, t1, t2)^2);
C20 := collect(collect(simplify(RR3[2, 1]), exp), A(x1, x2, t1, t2)^2);
D20 := collect(collect(simplify(RR3[3, 1]), exp), A(x1, x2, t1, t2)^2);
E20 := collect(collect(simplify(RR3[4, 1]), exp), A(x1, x2, t1, t2)^2);
F2 := collect(collect(simplify(RR3[5, 1]), exp), A(x1, x2, t1, t2)^2);
G2 := collect(collect(simplify(RR3[6, 1]), exp), A(x1, x2, t1, t2)^2);

// розв'язки системи при $\exp(-(2*I)*(k*x0-\omega*t0))$ відносно коефіцієнтів B20, C20, D20,
E20, F2, G2 будемо шукати матричним способом

MO4 := evalm(1/M4);
R4 := `&*`(MO4, V4);
RR4 := evalm(R4);

// впишемо коефіцієнти B20, C20, D20, E20, F2, G2

BC20 := collect(collect(simplify(RR4[1, 1]), exp), AC(x1, x2, t1, t2)^2);
CC20 := collect(collect(simplify(RR4[2, 1]), exp), AC(x1, x2, t1, t2)^2);
DC20 := collect(collect(simplify(RR4[3, 1]), exp), AC(x1, x2, t1, t2)^2);
EC20 := collect(collect(simplify(RR4[4, 1]), exp), AC(x1, x2, t1, t2)^2);
FC2 := collect(collect(simplify(RR4[5, 1]), exp), AC(x1, x2, t1, t2)^2);

GC2 := collect(collect(simplify(RR4[6, 1]), exp), AC(x1, x2, t1, t2)^2);

// задамо врази коефіцієнтів F0, G0 та спряжені до них FC0, GC0

F0 := 0.5*(-rho[2]*(z1^2/(rho[2]^2*omega^2))+omega^2*rho[2])*AC(x1, x2, t1, t2)*A(x1, x2, t1, t2)/(rho[1]-rho[2]);

G0 := 0.5*(-(rho[2]-rho[3])*z^2/(omega^2*rho[2]^2)-rho[3]*z^2*cosh(k*h[3])^2/(sinh(k*h[3])^2*rho[2]^2*omega^2)+rho[2]*((z1+z2*sinh(k*h[2]))^2/(rho[2]^2*omega^2*cosh(k*h[2])^2)))*AC(x1, x2, t1, t2)*A(x1, x2, t1, t2)/(rho[2]-rho[3]);

FC0 := 0.5*(-rho[2]*(z1^2/(rho[2]^2*omega^2))+omega^2*rho[2])*AC(x1, x2, t1, t2)*A(x1, x2, t1, t2)/(rho[1]-rho[2]);

GC0 := 0.5*(-(rho[2]-rho[3])*z^2/(omega^2*rho[2]^2)-rho[3]*z^2*cosh(k*h[3])^2/(sinh(k*h[3])^2*rho[2]^2*omega^2)+rho[2]*((z1+z2*sinh(k*h[2]))^2/(rho[2]^2*omega^2*cosh(k*h[2])^2)))*AC(x1, x2, t1, t2)*A(x1, x2, t1, t2)/(rho[2]-rho[3]);

// виведемо розв'язки другого наближення

phi12 := (B10+B11*z)*exp(I*(k*x0-omega*t0))*exp(k*z)+B20*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))*exp(2*k*z)+(BC10+BC11*z)*exp(-I*(k*x0-omega*t0))*exp(k*z)+BC20*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))*exp(2*k*z);

phi22 := (C10+C11*z)*exp(I*(k*x0-omega*t0))*e1*exp(-k*z)+C20*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))*e5*exp(-2*k*z)+(D10+D11*z)*exp(I*(k*x0-omega*t0))*e2*exp(k*z)+D20*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))*e6*exp(2*k*z)+(CC10+CC11*z)*exp(-I*(k*x0-omega*t0))*e1*exp(-k*z)+CC20*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))*e5*exp(-2*k*z)+(DC10+DC11*z)*exp(-I*(k*x0-omega*t0))*e2*exp(k*z)+DC20*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0))*e6*exp(2*k*z);

phi32 := E11*(h[2]+h[3]-z)*sinh(k*(h[2]+h[3]-z))*exp(I*(k*x0-omega*t0))+E10*cosh(k*(h[2]+h[3]-z))*exp(I*(k*x0-omega*t0))+E20*cosh(2*k*(h[2]+h[3]-z))*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))+EC11*(h[2]+h[3]-z)*sinh(k*(h[2]+h[3]-z))*exp(-I*(k*x0-omega*t0))+EC10*cosh(k*(h[2]+h[3]-z))*exp(-I*(k*x0-omega*t0))+EC20*cosh(2*k*(h[2]+h[3]-z))*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0));

eta12 := F0+F1*exp(I*(k*x0-omega*t0))+F2*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))+FC0+FC1*exp(-I*(k*x0-omega*t0))+FC2*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0));

eta22 := G0+G1*exp(I*(k*x0-omega*t0))+G2*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))+GC0+GC1*exp(-I*(k*x0-omega*t0))+GC2*exp(-(2*I)*(k*x0-omega*t0));

ДОДАТОК Б.

Програма символного виводу умови розв'язності задачі третього наближення

// розв'язки третього наближення будемо шукати у вигляді

```

phi13 := (B310+B311*z+B312*z^2)*exp(I*(k*x0-
  omega*t0))*exp(k*z)+(B320+B321*z)*exp((2*I)*(k*x0-
  omega*t0))*exp(2*k*z)+B330*exp((3*I)*(k*x0-omega*t0))*exp(3*k*z);
phi23 := (C310+C311*z+C312*z^2)*exp(I*(k*x0-omega*t0))*e1*exp(-
  k*z)+(D310+D311*z+D312*z^2)*exp(I*(k*x0-
  omega*t0))*e2*exp(k*z)+(C320+C321*z)*exp((2*I)*(k*x0-omega*t0))*e5*exp(-
  2*k*z)+(D320+D321*z)*exp((2*I)*(k*x0-
  omega*t0))*e6*exp(2*k*z)+C330*exp((3*I)*(k*x0-omega*t0))*e9*exp(-
  3*k*z)+D330*exp((3*I)*(k*x0-omega*t0))*e10*exp(3*k*z);
phi33 := E311*(h[2]+h[3]-z)*sinh(k*(h[2]+h[3]-z))*exp(I*(k*x0-
  omega*t0))+E310+E312*(h[2]+h[3]-z)^2*cosh(k*(h[2]+h[3]-z))*exp(I*(k*x0-
  omega*t0))+E320*cosh(2*k*(h[2]+h[3]-z))*exp((2*I)*(k*x0-
  omega*t0))+E321*(h[2]+h[3]-z)*sinh(2*k*(h[2]+h[3]-z))*exp((2*I)*(k*x0-
  omega*t0))+E330*cosh(3*k*(h[2]+h[3]-z))*exp((3*I)*(k*x0-omega*t0));
eta13 := F30+F31*exp(I*(k*x0-omega*t0))+F32*exp((2*I)*(k*x0-
  omega*t0))+F33*exp((3*I)*(k*x0-omega*t0));
eta23 := G30+G31*exp(I*(k*x0-omega*t0))+G32*exp((2*I)*(k*x0-
  omega*t0))+G33*exp((3*I)*(k*x0-omega*t0));

```

// знайдемо коефіцієнти B311, C311, D311, E311, B312, C312, D312, E312

```

liv1 := diff(phi13, x0, x0)+diff(phi13, z, z);
coefB := coeff(liv1, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
coefB11 := coeff(coefB, B311);
coefB12 := coeff(coefB, B312);

```

```

liv2 := diff(phi23, x0, x0)+diff(phi23, z, z);
liv21 := coeff(liv2, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
coefC := coeff(liv21, exp(-k*z))*exp(-k*z);
coefC11 := coeff(coefC, C311);
coefC12 := coeff(coefC, C312);
coefD := coeff(liv21, exp(k*z))*exp(k*z);
coefD11 := coeff(coefD, D311);
coefD12 := coeff(coefD, D312);

```

```

liv3 := diff(phi33, x0, x0)+diff(phi33, z, z);
coefE := coeff(liv3, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
coefE11 := coeff(coefE, E311);
coefE12 := collect(coefE, E312), exp);

```

```

B312 := I*omega*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))/(2*k);
C312 := I*(z1-1.*z2*exp(-k*h[2]))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1,
x1))/(4*k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]));
D312 := I*(z1+z2*exp(k*h[2]))*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))/(4*k*rho[2]*omega*cosh(k*h[2]));
E312 := -I*z2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))/(2*k*sinh(k*h[3])*rho[2]*omega);

```

```
prav1 := collect(-(diff(phi11, x1, x1))-2*(diff(phi11, x2, x0))-2*(diff(phi12, x1, x0)), exp);
prav1B := coeff(prav1, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
```

```
prav2 := collect(-(diff(phi21, x1, x1))-2*(diff(phi21, x2, x0))-2*(diff(phi22, x1, x0)), exp);
prav21 := coeff(prav2, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
prav2C := collect(collect(collect(coeff(prav21, exp(-k*z)), diff(A(x1, x2, t1, t2), x2)), diff(A(x1, x2,
t1, t2), x1, x1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1))*exp(-k*z);
prav2D := collect(collect(collect(coeff(prav21, exp(k*z)), diff(A(x1, x2, t1, t2), x2)), diff(A(x1, x2,
t1, t2), x1, x1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1))*exp(k*z);
```

```
prav3 := collect(-(diff(phi31, x1, x1))-2*(diff(phi31, x2, x0))-2*(diff(phi32, x1, x0)), exp);
prav3E := coeff(prav3, exp(I*(k*x0-omega*t0)));
```

```
B311 := simplify((-coefB12*B312+prav1B)/coefB11);
C311 := collect(collect(collect(simplify((-coefC12*C312+prav2C)/coefC11), diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2)), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1));
D311 := collect(collect(collect(simplify((-coefD12*D312+prav2D)/coefD11), diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2)), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1));
E311 := collect(collect(collect(simplify((-coefE12*E312+prav3E)/coefE11), diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2)), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1));
```

// випишемо ліві частини виразів кінематичних та динамічних умов при $\exp(I(k*x0-omega*t0))$;*

```
liv4 := unapply(diff(eta13, t0)-(diff(phi13, z)), z);
liv5 := unapply(diff(eta13, t0)-(diff(phi23, z)), z);
liv6 := unapply(diff(eta23, t0)-(diff(phi23, z)), z);
liv7 := unapply(diff(eta23, t0)-(diff(phi33, z)), z);
liv8 := unapply(rho[1]*(diff(phi13, t0))-rho[2]*(diff(phi23, t0))+(rho[1]-rho[2])*eta13-
T[1]*(diff(eta13, x0, x0)), z);
liv9 := unapply(rho[2]*(diff(phi23, t0))-rho[3]*(diff(phi33, t0))+(rho[2]-rho[3])*eta23-
T[2]*(diff(eta23, x0, x0)), z);
```

```
liv41 := coeff(liv4(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
liv51 := coeff(liv5(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
liv61 := coeff(liv6(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
liv71 := coeff(liv7(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
liv81 := coeff(liv8(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
liv91 := coeff(liv9(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
```

// перевірка умови не протікання на кришці

```
kryshka := unapply(diff(phi33, z), z);
kryshka(h[2]+h[3]);
```

// складемо систему при $\exp(i(k*x0-omega*t0))$ для знаходження умови розв'язності третього наближення. система складається з 9 виразів. кожен вираз – це сума коефіцієнтів при частиних похідних обвідної хвльового пакету.*

// ПЕРША КІНЕМАТИЧНА УМОВА НА НИЖНІЙ ПОВЕРХНІ КОНТАКТУ

```
p4d11 := unapply(diff(eta11, t2), z);
p4d1 := -coeff(p4d11(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
```

```
-----
p4d21 := unapply(diff(eta12, t1), z);
p4d2 := -coeff(p4d21(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
```

p4d31 := simplify(unapply((diff(eta11, x0))*(diff(phi11, x1)), z));
p4d3 := 0;

p4d41 := unapply((diff(eta11, x1))*(diff(phi11, x0)), z);
p4d4 := 0;

p4d51 := unapply(diff(eta12, x0), z);
p4d52 := unapply(diff(phi11, x0), z);
c451 := coeff(p4d51(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
c452 := coeff(p4d52(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p4d5 := collect(collect(collect(simplify(-c451*c452), exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));

p4d61 := unapply(diff(eta11, x0), z);
p4d62 := unapply(diff(phi12, x0), z);
c461 := coeff(p4d61(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c462 := coeff(p4d62(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p4d6 := collect(collect(collect(simplify(-c461*c462), exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));

p4d71 := unapply(eta11, z);
p4d72 := unapply(diff(diff(phi12, z), z), z);
c471 := coeff(p4d71(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c472 := coeff(p4d72(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p4d7 := collect(collect(collect(simplify(c471*c472), exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));

p4d81 := unapply(eta12, z);
p4d82 := unapply(diff(diff(phi11, z), z), z);
c481 := coeff(p4d81(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
c482 := F0+FC0;
c483 := coeff(p4d82(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c484 := coeff(p4d82(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
p4d8 := collect(collect(collect(simplify(c481*c483)+c482*c484, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));

p4d91 := unapply(eta11, z);
p4d92 := unapply(eta11, z);
p4d93 := unapply(diff(diff(diff(phi11, z), z), z), z);
c491 := coeff(p4d91(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c492 := coeff(p4d91(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c493 := coeff(p4d93(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c494 := coeff(p4d93(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
p4d9 := .5*(c491^2*c493+2*c491*c492*c494);

p4d101 := unapply(eta11, z);
p4d102 := unapply(diff(eta11, x0), z);
p4d103 := unapply(diff(diff(phi11, x0), z), z);
c4101 := coeff(p4d101(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c4102 := coeff(p4d101(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c4103 := coeff(p4d102(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c4104 := coeff(p4d102(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c4105 := coeff(p4d103(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c4106 := coeff(p4d103(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));

p4d10 := -c4101*c4103*c4106-c4101*c4104*c4105-c4102*c4103*c4105;

// складемо всі доданки у вираз

P4 := p4d1+p4d2+p4d3+p4d4+p4d5+p4d6+p4d7+p4d8+p4d9+p4d10-liv41;

// виокремимо частині похідні обвідної хвильового пакету

prav4AAC := coeff(coeff(P4, AC(x1, x2, t1, t2)), A(x1, x2, t1, t2)^2);

prav4At2 := coeff(P4, diff(A(x1, x2, t1, t2), t2));

prav4Ax1x1 := coeff(P4, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1));

prav4Ax2 := coeff(P4, diff(A(x1, x2, t1, t2), x2));

prav4Ax1t1 := coeff(P4, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1));

prav4At1t1 := coeff(P4, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));

// складемо вираз для першого елемента стовпчика вільних членів

l1 := prav4AAC*A(x1, x2, t1, t2)^2*AC(x1, x2, t1, t2)+prav4At2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t2))+prav4Ax1x1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))+prav4Ax2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))+prav4Ax1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1))+prav4At1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));

// ДРУГА КІНЕМАТИЧНА УМОВА НА НИЖНІЙ ПОВЕРХНІ КОНТАКТУ

p5d11 := unapply(diff(eta11, t2), z);

p5d1 := -coeff(p5d11(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));

p5d21 := unapply(diff(eta12, t1), z);

p5d2 := -coeff(p5d21(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));

p5d31 := unapply((diff(eta11, x0))*(diff(phi21, x1)), z);

p5d3 := 0;

p5d41 := unapply((diff(eta11, x1))*(diff(phi21, x0)), z);

p5d4 := 0;

p5d51 := unapply(diff(eta12, x0), z);

p5d52 := unapply(diff(phi21, x0), z);

c551 := coeff(p5d51(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));

c552 := coeff(p5d52(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));

p5d5 := collect(collect(collect(-c551*c552, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));

p5d61 := unapply(diff(eta11, x0), z);

p5d62 := unapply(diff(phi22, x0), z);

c561 := coeff(p5d61(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));

c562 := coeff(p5d62(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));

p5d6 := collect(collect(collect(-c561*c562, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));

p5d71 := unapply(eta11, z);

p5d72 := unapply(diff(diff(phi22, z), z), z);

c571 := coeff(p5d71(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));

c572 := coeff(p5d72(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));

p5d7 := collect(collect(collect(c571*c572, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));

p5d81 := unapply(eta12, z);

p5d82 := unapply(diff(diff(phi21, z), z), z);

```

c581 := coeff(p5d81(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
c582 := F0+FC0;
c583 := coeff(p5d82(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c584 := coeff(p5d82(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
p5d8 := collect(collect(collect(c581*c583+c582*c584, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));

```

```

-----
p5d91 := unapply(eta11, z);
p5d92 := unapply(eta11, z);
p5d93 := unapply(diff(diff(diff(phi21, z), z), z), z);
c591 := coeff(p5d91(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c592 := coeff(p5d91(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c593 := coeff(p5d93(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c594 := coeff(p5d93(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
p5d9 := .5*(c591^2*c593+2*c591*c592*c594);

```

```

-----
p5d101 := unapply(eta11, z);
p5d102 := unapply(diff(eta11, x0), z);
p5d103 := unapply(diff(diff(phi21, x0), z), z);
c5101 := coeff(p5d101(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c5102 := coeff(p5d101(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c5103 := coeff(p5d102(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c5104 := coeff(p5d102(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c5105 := coeff(p5d103(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c5106 := coeff(p5d103(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p5d10 := -c5101*c5103*c5106-c5101*c5104*c5105-c5102*c5103*c5105;

```

// складемо всі доданки у вираз

```
P5 := p5d1+p5d2+p5d3+p5d4+p5d5+p5d6+p5d7+p5d8+p5d9+p5d10-liv51;
```

// виокремимо частині похідні обвідної хвильового пакету

```

prav5AAC := coeff(coeff(P5, AC(x1, x2, t1, t2)), A(x1, x2, t1, t2)^2);
prav5At2 := coeff(P5, diff(A(x1, x2, t1, t2), t2));
prav5Ax1x1 := coeff(P5, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1));
prav5Ax2 := coeff(P5, diff(A(x1, x2, t1, t2), x2));
prav5Ax1t1 := coeff(P5, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1));
prav5At1t1 := coeff(P5, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));

```

// складемо вираз для другого елемента стовпчика вільних членів

```

l2 := prav5AAC*A(x1, x2, t1, t2)^2*AC(x1, x2, t1, t2)+prav5At2*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
t2))+prav5Ax1x1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))+prav5Ax2*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2))+prav5Ax1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1))+prav5At1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));

```

// ПЕРША КІНЕМАТИЧНА УМОВА НА ВЕРХНІЙ ПОВЕРХНІ КОНТАКТУ

```

p6d11 := unapply(diff(eta21, t2), z);
p6d1 := -coeff(p6d11(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));

```

```

-----
p6d21 := unapply(diff(eta22, t1), z);
p6d2 := collect(collect(collect(simplify(-coeff(p6d21(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)))), exp),
diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1)), diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));

```

```

-----
p6d31 := unapply((diff(eta21, x0))*(diff(phi21, x1)), z);

```

```

p6d3 := 0;
-----
p6d41 := unapply((diff(eta21, x1))*(diff(phi21, x0)), z);
p6d4 := 0;
-----
p6d51 := unapply(diff(eta22, x0), z);
p6d52 := unapply(diff(phi21, x0), z);
c651 := coeff(p6d51(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
c652 := coeff(p6d52(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p6d5 := collect(collect(collect(-c651*c652, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));
-----
p6d61 := unapply(diff(eta21, x0), z);
p6d62 := unapply(diff(phi22, x0), z);
c661 := coeff(p6d61(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c662 := coeff(p6d62(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p6d6 := collect(collect(collect(-c661*c662, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));
-----
p6d71 := unapply(eta21, z);
p6d72 := unapply(diff(diff(phi22, z), z), z);
c671 := coeff(p6d71(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c672 := coeff(p6d72(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p6d7 := collect(collect(collect(c671*c672, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));
-----
p6d81 := unapply(eta22, z);
p6d82 := unapply(diff(diff(phi21, z), z), z);
c681 := coeff(p6d81(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
c682 := G0+GC0;
c683 := coeff(p6d82(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c684 := coeff(p6d82(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
p6d8 := collect(collect(collect(c681*c683+c682*c684, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));
-----
p6d91 := unapply(eta21, z);
p6d92 := unapply(eta21, z);
p6d93 := unapply(diff(diff(diff(phi21, z), z), z), z);
c691 := coeff(p6d91(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c692 := coeff(p6d91(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c693 := coeff(p6d93(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c694 := coeff(p6d93(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
p6d9 := .5*(c691^2*c693+2*c691*c692*c694);
-----
p6d101 := unapply(eta21, z);
p6d102 := unapply(diff(eta21, x0), z);
p6d103 := unapply(diff(diff(phi21, x0), z), z);
c6101 := coeff(p6d101(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c6102 := coeff(p6d101(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c6103 := coeff(p6d102(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c6104 := coeff(p6d102(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c6105 := coeff(p6d103(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c6106 := coeff(p6d103(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p6d10 := -c6101*c6103*c6106-c6101*c6104*c6105-c6102*c6103*c6105;
-----

```

// складемо всі доданки у вираз

P6 := p6d1+p6d2+p6d3+p6d4+p6d5+p6d6+p6d7+p6d8+p6d9+p6d10-liv61;

// виокремимо частині похідні обвідної хвильового пакету

prav6AAC := coeff(coeff(P6, AC(x1, x2, t1, t2)), A(x1, x2, t1, t2)^2);

prav6At2 := coeff(P6, diff(A(x1, x2, t1, t2), t2));

prav6Ax1x1 := coeff(P6, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1));

prav6Ax2 := coeff(P6, diff(A(x1, x2, t1, t2), x2));

prav6Ax1t1 := coeff(P6, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1));

prav6At1t1 := coeff(P6, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));

// складемо вираз для третього елемента стовпчика вільних членів

l3 := prav6AAC*A(x1, x2, t1, t2)^2*AC(x1, x2, t1, t2)+prav6At2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t2))+prav6Ax1x1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))+prav6Ax2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))+prav6Ax1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1))+prav6At1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));

// ДРУГА КІНЕМАТИЧНА УМОВА НА ВЕРХНІЙ ПОВЕРХНІ КОНТАКТУ

p7d11 := unapply(diff(eta21, t2), z);

p7d1 := -coeff(p7d11(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));

p7d21 := unapply(diff(eta22, t1), z);

p7d2 := -coeff(p7d21(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));

p7d31 := unapply((diff(eta21, x0))*(diff(phi31, x1)), z);

p7d3 := 0;

p7d41 := unapply((diff(eta21, x1))*(diff(phi31, x1)), z);

p7d4 := -coeff(p7d41(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));

p7d51 := unapply(diff(eta22, x0), z);

p7d52 := unapply(diff(phi31, x0), z);

c751 := coeff(p7d51(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));

c752 := coeff(p7d52(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));

p7d5 := collect(collect(collect(-c751*c752, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));

p7d61 := unapply(diff(eta21, x0), z);

p7d62 := unapply(diff(phi32, x0), z);

c761 := coeff(p7d61(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));

c762 := coeff(p7d62(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));

p7d6 := collect(collect(collect(-c761*c762, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));

p7d71 := unapply(eta21, z);

p7d72 := unapply(diff(diff(phi32, z), z), z);

c771 := coeff(p7d71(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));

c772 := coeff(p7d72(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));

p7d7 := collect(collect(collect(c771*c772, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));

p7d81 := unapply(eta22, z);

p7d82 := unapply(diff(diff(phi31, z), z), z);

c781 := coeff(p7d81(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));

c782 := G0+GC0;

c783 := coeff(p7d82(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));

```
c784 := coeff(p7d82(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
p7d8 := collect(collect(collect(c781*c783+c782*c784, exp), A(x1, x2, t1, t2)), AC(x1, x2, t1, t2));
```

```
-----
p7d91 := unapply(eta21, z);
p7d92 := unapply(eta21, z);
p7d93 := unapply(diff(diff(diff(phi31, z), z), z), z);
c791 := coeff(p7d91(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c792 := coeff(p7d91(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c793 := coeff(p7d93(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c794 := coeff(p7d93(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
p7d9 := .5*(c791^2*c793+2*c791*c792*c794);
```

```
-----
p7d101 := unapply(eta21, z);
p7d102 := unapply(diff(eta21, x0), z);
p7d103 := unapply(diff(diff(phi31, x0), z), z);
c7101 := coeff(p7d101(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c7102 := coeff(p7d101(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c7103 := coeff(p7d102(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c7104 := coeff(p7d102(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c7105 := coeff(p7d103(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c7106 := coeff(p7d103(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p7d10 := -c7101*c7103*c7106-c7101*c7104*c7105-c7102*c7103*c7105;
```

// складемо всі доданки у вираз

```
P7 := p7d1+p7d2+p7d3+p7d4+p7d5+p7d6+p7d7+p7d8+p7d9+p7d10-liv71;
```

// виокремимо частині похідні обвідної хвильового пакету

```
prav7AAC := coeff(coeff(P7, AC(x1, x2, t1, t2)), A(x1, x2, t1, t2)^2);
prav7At2 := coeff(P7, diff(A(x1, x2, t1, t2), t2));
prav7Ax1x1 := coeff(P7, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1));
prav7Ax2 := coeff(P7, diff(A(x1, x2, t1, t2), x2));
prav7Ax1t1 := coeff(P7, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1));
prav7At1t1 := coeff(P7, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));
```

// складемо вираз для четвертого елемента стовпчика вільних членів

```
l4 := prav7AAC*A(x1, x2, t1, t2)^2*AC(x1, x2, t1, t2)+prav7At2*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
t2))+prav7Ax1x1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))+prav7Ax2*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2))+prav7Ax1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1))+prav7At1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));
```

// ДИНАМІЧНА УМОВА НА НИЖНІЙ ПОВЕРХНІ КОНТАКТУ

```
p8d11 := unapply(-rho[1]*(diff(phi11, t2)), z);
p8d1 := coeff(p8d11(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
```

```
-----
p8d21 := unapply(-rho[1]*(diff(phi12, t1)), z);
p8d2 := coeff(p8d21(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
```

```
-----
p8d31 := unapply(eta12, z);
p8d32 := unapply(diff(phi11, z, t0), z);
c831 := F0+FC0;
c832 := coeff(p8d32(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c833 := coeff(p8d31(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
```

```

c834 := coeff(p8d32(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p8d3 := collect(-rho[1]*(c831*c832+c833*c834), exp);
-----
p8d41 := unapply(eta11*(diff(diff(phi11, z), t1)), z);
p8d4 := 0;
-----
p8d51 := unapply(eta11, z);
p8d52 := unapply(diff(phi11, z, z, t0), z);
c851 := coeff(p8d51(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c852 := coeff(p8d51(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c853 := coeff(p8d52(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c854 := coeff(p8d52(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p8d5 := -.5*rho[1]*(c851^2*c854+2*c851*c853*c852);
-----
p8d61 := unapply(diff(phi21, t2), z);
p8d6 := rho[2]*coeff(p8d61(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
-----
p8d71 := unapply(diff(phi22, t1), z);
p8d7 := collect(rho[2]*coeff(p8d71(0), exp(I*(k*x0-omega*t0))), exp);
-----
p8d81 := unapply(eta12, z);
p8d82 := unapply(diff(phi21, z, t0), z);
c881 := F0+FC0;
c882 := coeff(p8d82(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c883 := coeff(p8d81(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
c884 := coeff(p8d82(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p8d8 := collect(simplify(rho[2]*(c881*c882+c883*c884)), exp);
-----
p8d91 := unapply(eta11*(diff(phi21, z, t1)), z);
p8d9 := 0;
-----
p8d101 := unapply(eta11, z);
p8d102 := unapply(diff(phi21, z, z, t0), z);
c8101 := coeff(p8d101(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8102 := coeff(p8d101(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8103 := coeff(p8d102(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8104 := coeff(p8d102(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p8d10 := .5*rho[2]*(c8101^2*c8104+2*c8101*c8103*c8102);
-----
p8d111 := unapply(eta11, z);
p8d112 := unapply(diff(phi12, z, t0), z);
c8111 := coeff(p8d111(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8112 := coeff(p8d112(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p8d11 := simplify(-rho[1]*c8111*c8112);
-----
p8d121 := unapply((diff(phi11, x0))*(diff(phi11, x1)), z);
p8d12 := 0;
-----
p8d131 := unapply(diff(phi11, x0), z);
p8d132 := unapply(diff(phi12, x0), z);
c8131 := coeff(p8d131(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8132 := coeff(p8d132(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));

```

```

p8d13 := simplify(-rho[1]*c8131*c8132);
-----
p8d141 := unapply(eta11, z);
p8d142 := unapply(diff(phi11, x0), z);
p8d143 := unapply(diff(phi11, z, x0), z);
c8141 := coeff(p8d141(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8142 := coeff(p8d141(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8143 := coeff(p8d142(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8144 := coeff(p8d142(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8145 := coeff(p8d143(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8146 := coeff(p8d143(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p8d14 := -rho[1]*(c8141*c8144*c8145+c8141*c8143*c8146+c8142*c8143*c8145);
-----
p8d151 := unapply(diff(phi11, z), z);
p8d152 := unapply(diff(phi12, z), z);
c8151 := coeff(p8d151(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8152 := coeff(p8d152(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p8d15 := simplify(-rho[1]*c8151*c8152);
-----
p8d161 := unapply(eta11, z);
p8d162 := unapply(diff(phi11, z), z);
p8d163 := unapply(diff(phi11, z, z), z);
c8161 := coeff(p8d161(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8162 := coeff(p8d161(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8163 := coeff(p8d162(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8164 := coeff(p8d162(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8165 := coeff(p8d163(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8166 := coeff(p8d163(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p8d16 := -rho[1]*(c8161*c8164*c8165+c8161*c8163*c8166+c8162*c8163*c8165);
-----
p8d171 := unapply(eta11, z);
p8d172 := unapply(diff(phi22, z, t0), z);
c8171 := coeff(p8d171(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8172 := coeff(p8d172(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p8d17 := collect(simplify(rho[2]*c8171*c8172), exp);
-----
p8d181 := unapply((diff(phi21, x0))*(diff(phi21, x1)), z);
p8d18 := 0;
-----
p8d191 := unapply(diff(phi21, x0), z);
p8d192 := unapply(diff(phi22, x0), z);
c8191 := coeff(p8d191(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8192 := coeff(p8d192(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p8d19 := collect(simplify(rho[2]*c8191*c8192), exp);
-----
p8d201 := unapply(eta11, z);
p8d202 := unapply(diff(phi21, x0), z);
p8d203 := unapply(diff(phi21, z, x0), z);
c8201 := coeff(p8d201(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8202 := coeff(p8d201(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8203 := coeff(p8d202(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8204 := coeff(p8d202(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));

```



```

c8205 := coeff(p8d203(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8206 := coeff(p8d203(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p8d20 := rho[2]*(c8201*c8204*c8205+c8201*c8203*c8206+c8202*c8203*c8205);

```

```

-----
p8d211 := unapply(diff(phi21, z), z);
p8d212 := unapply(diff(phi22, z), z);
c8211 := coeff(p8d211(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8212 := coeff(p8d212(0), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p8d21 := collect(simplify(rho[2]*c8211*c8212), exp);

```

```

-----
p8d221 := unapply(eta11, z);
p8d222 := unapply(diff(phi21, z), z);
p8d223 := unapply(diff(phi21, z, z), z);
c8221 := coeff(p8d221(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8222 := coeff(p8d221(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8223 := coeff(p8d222(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8224 := coeff(p8d222(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8225 := coeff(p8d223(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8226 := coeff(p8d223(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p8d22 := rho[2]*(c8221*c8224*c8225+c8221*c8223*c8226+c8222*c8223*c8225);

```

```

-----
p8d231 := unapply(diff(eta11, x1, x1), z);
p8d23 := T[1]*coeff(p8d231(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));

```

```

-----
p8d241 := unapply(diff(eta12, x0, x1), z);
p8d24 := 2*T[1]*coeff(p8d251(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));

```

```

-----
p8d251 := unapply(diff(eta11, x0, x2), z);
p8d25 := 2*T[1]*coeff(p8d251(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));

```

```

-----
p8d261 := unapply(diff(eta11, x0), z);
p8d262 := unapply(diff(eta11, x0), z);
p8d263 := unapply(diff(diff(eta11, x0), x0), z);
c8261 := coeff(p8d261(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8262 := coeff(p8d261(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8263 := coeff(p8d262(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8264 := coeff(p8d262(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c8265 := coeff(p8d263(0), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c8266 := coeff(p8d263(0), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p8d26 := -1.5*T[1]*(c8261*c8264*c8265+c8261*c8263*c8266+c8262*c8263*c8265);

```

// складемо всі доданки у вираз

```

P8 := p8d18+p8d25+p8d23+p8d21+p8d19+p8d22+p8d10+p8d1+p8d2+p8d3+p8d4+p8d5+p8d6
      +p8d7 +p8d8+p8d9+p8d11+p8d12+p8d13+p8d14+p8d15+p8d16-
      liv81+p8d24+p8d17+p8d26+p8d20;

```

// виокремимо частині похідні обвідної хвильового пакету

```

prav8AAC := coeff(coeff(P8, AC(x1, x2, t1, t2)), A(x1, x2, t1, t2)^2);
prav8At2 := coeff(P8, diff(A(x1, x2, t1, t2), t2));
prav8Ax1x1 := coeff(P8, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1));
prav8Ax2 := coeff(P8, diff(A(x1, x2, t1, t2), x2));

```

```

prav8Ax1t1 := coeff(P8, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1));
prav8At1t1 := coeff(P8, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));

// складемо вираз для n'ятого елемента стовпчика вільних членів
l5 := prav8AAC*A(x1, x2, t1, t2)^2*AC(x1, x2, t1, t2)+prav8At2*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
t2))+prav8Ax1x1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))+prav8Ax2*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
x2))+prav8Ax1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1))+prav8At1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));

// ДИНАМІЧНА УМОВА НА ВЕРХНІЙ ПОВЕРХНІ КОНТАКТУ
p9d11 := unapply(-rho[2]*(diff(phi21, t2)), z);
p9d1 := coeff(p9d11(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
-----
p9d21 := unapply(-rho[2]*(diff(phi22, t1)), z);
p9d2 := collect(simplify(coeff(p9d21(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)))), exp);
-----
p9d31 := unapply(eta22, z);
p9d32 := unapply(diff(phi21, z, t0), z);
c931 := G0+GC0;
c932 := coeff(p9d32(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c933 := coeff(p9d31(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
c934 := coeff(p9d32(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p9d3 := -rho[2]*(simplify(c931*c932)+c933*c934);
-----
p9d41 := unapply(eta21*(diff(phi21, z, t1)), z);
p9d4 := 0;
-----
p9d51 := unapply(eta21, z);
p9d52 := unapply(diff(phi21, z, z, t0), z);
c951 := coeff(p9d51(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c952 := coeff(p9d51(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c953 := coeff(p9d52(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c954 := coeff(p9d52(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p9d5 := -.5*rho[2]*(c951^2*c954+2*c951*c953*c952);
-----
p9d61 := unapply(diff(phi31, t2), z);
p9d6 := rho[3]*coeff(p9d61(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
-----
p9d71 := unapply(diff(phi32, t1), z);
p9d7 := rho[3]*coeff(p9d71(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
-----
p9d81 := unapply(eta22, z);
p9d82 := unapply(diff(phi31, z, t0), z);
c981 := G0+GC0;
c982 := coeff(p9d82(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c983 := coeff(p9d81(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
c984 := coeff(p9d82(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p9d8 := rho[3]*(c981*c982+simplify(c983*c984));
-----
p9d91 := unapply(eta21*(diff(phi31, z, t1)), z);
p9d9 := 0;
-----
p9d101 := unapply(eta21, z);

```

```

p9d102 := unapply(diff(phi31, z, z, t0), z);
c9101 := coeff(p9d101(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9102 := coeff(p9d101(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9103 := coeff(p9d102(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9104 := coeff(p9d102(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p9d10 := .5*rho[3]*(c9101^2*c9104+2*c9101*c9103*c9102);
-----
p9d111 := unapply(eta21, z);
p9d112 := unapply(diff(phi22, z, t0), z);
c9111 := coeff(p9d111(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9112 := coeff(p9d112(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p9d11 := collect(simplify(-rho[2]*c9111*c9112), exp);
-----
p9d121 := unapply((diff(phi21, x0))*(diff(phi21, x1)), z);
p9d12 := 0;
-----
p9d131 := unapply(diff(phi21, x0), z);
p9d132 := unapply(diff(phi22, x0), z);
c9131 := coeff(p9d131(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9132 := coeff(p9d132(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p9d13 := collect(simplify(-rho[2]*c9131*c9132), exp);
-----
p9d141 := unapply(eta21, z);
p9d142 := unapply(diff(phi21, x0), z);
p9d143 := unapply(diff(phi21, z, x0), z);
c9141 := coeff(p9d141(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9142 := coeff(p9d141(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9143 := coeff(p9d142(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9144 := coeff(p9d142(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9145 := coeff(p9d143(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9146 := coeff(p9d143(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p9d14 := -rho[2]*(c9141*c9144*c9145+c9141*c9143*c9146+c9142*c9143*c9145);
-----
p9d151 := unapply(diff(phi21, z), z);
p9d152 := unapply(diff(phi22, z), z);
c9151 := coeff(p9d151(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9152 := coeff(p9d152(h[2]), exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p9d15 := collect(simplify(-rho[2]*c9151*c9152), exp);
-----
p9d161 := unapply(eta21, z);
p9d162 := unapply(diff(phi21, z), z);
p9d163 := unapply(diff(phi21, z, z), z);
c9161 := coeff(p9d161(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9162 := coeff(p9d161(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9163 := coeff(p9d162(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9164 := coeff(p9d162(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9165 := coeff(p9d163(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9166 := coeff(p9d163(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p9d16 := -rho[2]*(c9161*c9164*c9165+c9161*c9163*c9166+c9162*c9163*c9165);
-----
p9d171 := unapply(eta21, z);
p9d172 := unapply(diff(phi32, z, t0), z);

```

```

c9171 := coeff(p9d171(h[2], exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9172 := coeff(p9d172(h[2], exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p9d17 := simplify(rho[3]*c9171*c9172);
-----
p9d181 := unapply((diff(phi31, x0))*(diff(phi31, x1)), z);
p9d18 := 0;
-----
p9d191 := unapply(diff(phi31, x0), z);
p9d192 := unapply(diff(phi32, x0), z);
c9191 := coeff(p9d191(h[2], exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9192 := coeff(p9d192(h[2], exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p9d19 := simplify(rho[3]*c9191*c9192);
-----
p9d201 := unapply(eta21, z);
p9d202 := unapply(diff(phi31, x0), z);
p9d203 := unapply(diff(phi31, z, x0), z);
c9201 := coeff(p9d201(h[2], exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9202 := coeff(p9d201(h[2], exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9203 := coeff(p9d202(h[2], exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9204 := coeff(p9d202(h[2], exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9205 := coeff(p9d203(h[2], exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9206 := coeff(p9d203(h[2], exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p9d20 := rho[3]*(c9201*c9204*c9205+c9201*c9203*c9206+c9202*c9203*c9205);
-----
p9d211 := unapply(diff(phi31, z), z);
p9d212 := unapply(diff(phi32, z), z);
c9211 := coeff(p9d211(h[2], exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9212 := coeff(p9d212(h[2], exp((2*I)*(k*x0-omega*t0)));
p9d21 := simplify(rho[3]*c9211*c9212);
-----
p9d221 := unapply(eta21, z);
p9d222 := unapply(diff(phi31, z), z);
p9d223 := unapply(diff(phi31, z, z), z);
c9221 := coeff(p9d221(h[2], exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9222 := coeff(p9d221(h[2], exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9223 := coeff(p9d222(h[2], exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9224 := coeff(p9d222(h[2], exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9225 := coeff(p9d223(h[2], exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9226 := coeff(p9d223(h[2], exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p9d22 := rho[3]*(c9221*c9224*c9225+c9221*c9223*c9226+c9222*c9223*c9225);
-----
p9d231 := unapply(diff(eta21, x1, x1), z);
p9d23 := T[2]*coeff(p9d231(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
-----
p9d241 := unapply(diff(eta22, x0, x1), z);
p9d24 := 2*T[2]*coeff(p9d241(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
-----
p9d251 := unapply(diff(eta21, x0, x2), z);
p9d25 := 2*T[2]*coeff(p9d251(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
-----
p9d261 := unapply(diff(eta21, x0), z);
p9d262 := unapply(diff(eta21, x0), z);

```

```

p9d263 := unapply(diff(diff(eta21, x0), x0), z);
c9261 := coeff(p9d261(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9262 := coeff(p9d261(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9263 := coeff(p9d262(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9264 := coeff(p9d262(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
c9265 := coeff(p9d263(h[2]), exp(I*(k*x0-omega*t0)));
c9266 := coeff(p9d263(h[2]), exp(-I*(k*x0-omega*t0)));
p9d26 := -1.5*T[2]*(c9261*c9264*c9265+c9261*c9263*c9266+c9262*c9263*c9265);

```

// складемо всі доданки у вираз

```

P9 := p9d24+p9d1+p9d2+p9d3+p9d4+p9d5+p9d6+p9d7+p9d8+p9d9+p9d10+p9d11+p9d12+
      p9d13+p9d14+p9d15+p9d16+p9d17+p9d18+p9d19+liv91+p9d21+p9d26+p9d25+p9d23+
      p9d22+p9d20;

```

// виокремимо частині похідні обвідної хвильового пакету

```

prav9AAC := coeff(coeff(P9, AC(x1, x2, t1, t2)), A(x1, x2, t1, t2)^2);
prav9At2 := coeff(P9, diff(A(x1, x2, t1, t2), t2));
prav9Ax1x1 := coeff(P9, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1));
prav9Ax2 := coeff(P9, diff(A(x1, x2, t1, t2), x2));
prav9Ax1t1 := coeff(P9, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1));
prav9At1t1 := coeff(P9, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));

```

// складемо вираз для n'ятого елемента стовпчика вільних членів

```

l6 := prav9AAC*A(x1, x2, t1, t2)^2*AC(x1, x2, t1, t2)+prav9At2*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
      t2))+prav9Ax1x1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))+prav9Ax2*(diff(A(x1, x2, t1, t2),
      x2))+prav9Ax1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1))+prav9At1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1));

```

// складаємо стовпчики вільних членів

```

V6 := Matrix([[l1], [l2], [l3], [l4], [l5], [l6]]);

```

// запишемо умову розв'язності задачі третього наближення у вигляді матриці, що залежить від коефіцієнтів B310, C310, D310, E310, G31 та стовпчика вільних членів V6

```

M6 := Matrix([[coeff(liv41, B310), coeff(liv41, C310), coeff(liv41, D310), coeff(liv41, E310),
      V6[1, 1], coeff(liv41, G31)], [coeff(liv51, B310), coeff(liv51, C310), coeff(liv51, D310),
      coeff(liv51, E310), V6[2, 1], coeff(liv51, G31)], [coeff(liv61, B310), coeff(liv61, C310),
      coeff(liv61, D310), coeff(liv61, E310), V6[3, 1], coeff(liv61, G31)], [coeff(liv71, B310),
      coeff(liv71, C310), coeff(liv71, D310), coeff(liv71, E310), V6[4, 1], coeff(liv71, G31)],
      [coeff(liv81, B310), coeff(liv81, C310), coeff(liv81, D310), coeff(liv81, E310), V6[5, 1],
      coeff(liv81, G31)], [coeff(liv91, B310), coeff(liv91, C310), coeff(liv91, D310), coeff(liv91,
      E310), V6[6, 1], coeff(liv91, G31)]]);

```

// знайдемо визначник матриці M6

```

detM6 := evalf(collect(collect(collect(collect(Determinant(M6), l1), l2), l3), l4),
      l5), l6));

```

// задамо значення невідомих змінних

```

l1 := l1; l2 := l2; l3 := l3; l4 := l4; l5 := l5; l6 := l6;
e1 := exp(k*h[2]);
e2 := exp(-k*h[2]);

```

```

e3 := exp(k*(h[2]+h[3]));
e4 := exp(-k*(h[2]+h[3]));
e5 := exp(2*k*h[2]);
e6 := exp(-2*k*h[2]);
e7 := exp(2*k*(h[2]+h[3]));
e8 := exp(-2*k*(h[2]+h[3]));
e9 := exp(3*k*h[2]);
e10 := exp(-3*k*h[2]);
e11 := exp(3*k*(h[2]+h[3]));
e12 := exp(-3*k*(h[2]+h[3]));
z1 := rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-T[1]*k^3;
z2 := omega^2*cosh(k*h[2])*rho[2]+(rho[1]*omega^2-k*rho[1]+k*rho[2]-
T[1]*k^3)*sinh(k*h[2]);

```

// виведемо коефіцієнти при частинних похідних

```

At2 := unapply(coeff(detM6, diff(A(x1, x2, t1, t2), t2)), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2],
h[3], k, omega);
Ax2 := unapply(coeff(detM6, diff(A(x1, x2, t1, t2), x2)), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2],
h[3], k, omega);
Ax1x1 := unapply(coeff(detM6, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1)), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2],
h[2], h[3], k, omega);
At1t1 := unapply(coeff(detM6, diff(A(x1, x2, t1, t2), t1, t1)), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2],
h[3], k, omega);
Ax1t1 := unapply(coeff(detM6, diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, t1)), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2],
h[2], h[3], k, omega);
AAC := unapply(coeff(coeff(detM6, AC(x1, x2, t1, t2)), A(x1, x2, t1, t2)^2), rho[1], rho[2], rho[3],
T[1], T[2], h[2], h[3], k, omega);

```

// умова розв'язності буде мати вигляд

```

UR := At2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), t2))+Ax2*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x2))+At1t1*(diff(A(x1, x2, t1,
t2), t1, t1))+Ax1x1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1, x1))+Ax1t1*(diff(A(x1, x2, t1, t2), x1,
t1))+AAC*A(x1, x2, t1, t2)^2*AC(x1, x2, t1, t2);

```

// виконаємо перевірку відповідно до рівняння (3.6) на сторінці 94

```

PR1 := unapply(Ax2(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k, omega)/At2(rho[1], rho[2],
rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k, omega), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k,
omega);
PR2 := unapply((Ax1x1(r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3, kk, omega)-Ax1t1(r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3,
kk, omega)*evalf(difw1(r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3, kk))+At1t1(r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3,
kk, omega)*evalf(difw1(r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3, kk))^2)/At2(r1, r2, r3, T1, T2, hh2,
hh3, kk, omega), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k, omega);

```

// задамо частоту центру хвильових пакетів ω_1 і ω_2 та їх частинні похідні

```

a := unapply(rho[3]*coth(k*h[3])*rho[1]+rho[2]*coth(k*h[2])*rho[1]+
rho[3]*coth(k*h[3])*coth(k*h[2])*rho[2]+rho[2]^2, rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2],
h[3], k);
b := unapply(-rho[3]*coth(k*h[3])*T[1]*k^3-rho[2]*coth(k*h[2])*T[1]*k^3-
rho[3]*coth(k*h[3])*k*rho[1]+rho[3]*coth(k*h[3])*k*rho[2]+coth(k*h[2])*k*rho[2]^2-
rho[2]*coth(k*h[2])*k*rho[1]-(rho[1]+rho[2]*coth(k*h[2]))*(k*rho[2]-
k*rho[3]+T[2]*k^3), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k);
c := unapply(-(-T[1]*k^3-k*rho[1]+k*rho[2])*(k*rho[2]-k*rho[3]+T[2]*k^3), rho[1], rho[2],
rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k);

```

```

w[1] := unapply(sqrt((-b(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)-sqrt(b(rho[1], rho[2],
rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)^2-4*a(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3],
k)*c(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)))/(2*a(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2],
h[2], h[3], k))), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k);
w[2] := unapply(sqrt((-b(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)+sqrt(b(rho[1], rho[2],
rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)^2-4*a(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3],
k)*c(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k)))/(2*a(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2],
h[2], h[3], k))), rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k);
difw1 := unapply(diff(w[1](rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k), k), rho[1], rho[2],
rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k);
difw2 := unapply(diff(difw1(rho[1], rho[2], rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k), k), rho[1], rho[2],
rho[3], T[1], T[2], h[2], h[3], k);

```

// задамо параметри системи

```
r1 := 1; r2 := .9; r3 := .8; T1 := 0; T2 := 0; hh2 := 1; hh3 := 1; kk := 1;
```

```
omega := evalf(w[1](r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3, kk));
```

```
evalf(difw1(r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3, kk)); evalf(PR1(r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3, kk, omega));
```

```
0.1520184666
```

```
0.1520184667
```

```
-(0.5*I)*evalf(difw2(r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3, kk)); evalf(PR2(r1, r2, r3, T1, T2, hh2, hh3, kk,
omega));
```

```
0.03172674085I
```

```
0.03172675971I
```

ДОДАТОК В.

Список публікацій здобувача

Основні наукові результати дисертації

1. Avramenko O., Lunyova M., Naradovyi V. Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. Vol. 5, Issue 5 (89). P. 58–66. doi: 10.15587/1729-4061.2017.111941
2. Avramenko O., Lunyova M. Analysis of energy of internal waves in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 2, Issue 5 (92). P. 26–33. doi: 10.15587/1729-4061.2018.128641.
3. Авраменко О.В., Луньова М.В. Наратовий В.В., Селезов І.Т. Умови поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідро-динамічній системі з твердою кришкою. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2017. – 60, № 4. – С. 137–151.
Теж саме: Avramenko O.V., Naradovyi V.V., Lunyova M.V., Selezov I.T. Conditions of Wave Propagation in a Semiinfinite Three-Layer Hydrodynamic System with Rigid Lid. // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – 247 (1). – P. 173-190. doi: 10.1007/s10958-020-04795
4. Авраменко О.В., Луньова М.В. Аналіз форми хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2019. – 62, № 3. – С. 127-142.
5. Авраменко О., Луньова М. Модуляційна стійкість хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2019. – Вип. 1. – С. 30-35.

Тези наукових доповідей

6. Авраменко О.В., Луньова М.В. Візуалізація поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою. // XII Всеукраїнська студентська наукова конференція “Сучасні проблеми

- фізико-математичних наук та методики їх викладання”: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2017. – С. 3-4.
7. Луньова М.В. Моделирование поширения хвиль у напівнескінченній тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою. // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях / Под редакцией профессора Жолткевича Г.Н. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2017. – С. 22-23.
 8. Луньова М.В., Богданов В.І. Аналіз енергії хвильового руху тришарової гідродинамічної системи. Вироджені випадки. // XIII Всеукраїнська студентська наукова конференція “Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання”: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2018. – С. 188-190.
 9. Авраменко О.В., Луньова М.В. Еволюційні рівняння для обвідних хвильових пакетів у напівнескінченній тришаровій рідині. // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: Збірка матеріалів XIV міжнародної наукової конференції для молодих вчених / Під ред. проф. Жолткевича Г.М. – Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2019. – с. 42-43.
 10. Авраменко О.В., Луньова М.В. Аналіз умов хвилеутворення в тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». // XV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання»: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2019. – С. 3.

**Статті у наукових виданнях України, що додатково
відображають результати дисертації**

11. Гринько А.Р., Луньова М.В. Використання математичного пакету Maple для аналізу енергії хвиль у тришаровій гідродинамічній системі. // Наукові записки молодих учених. 2018. – № 1. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1421>

ДОДАТОК Г.

Акти про впровадження результатів дисертації



ЦЕНТРАЛЬНОУКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

вул. Шевченка, 1, м. Кропивницький, 25006, тел. (0522) 32-08-89, факс (0522) 32-08-89
E-mail: mails@kspu.kr.ua, код ЄДРПОУ 02125415

05 лютого 2020 р. № 326/чч-н
На № _____ від _____

АКТ

про впровадження результатів дисертації здобувача ступеня доктора філософії
зі спеціальності 113 Прикладна математика
Луньової Марії Валентинівни
за темою «Моделювання внутрішніх хвильових процесів у шаруватих рідинах»
у Центральноукраїнському державному педагогічному
університеті імені Володимира Винниченка

Результати наукового дослідження здобувача ступеня доктора філософії зі спеціальності 113 Прикладна математика Луньової М.В. на тему: «Моделювання внутрішніх хвильових процесів у шаруватих рідинах» відповідно до затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 06.03.2019 р. №167 «Про проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії» містять наукову новизну, теоретичне та практичне значення і можуть бути використані в різних областях природознавства від фізики й прикладної математики до біології. Ці дослідження дозволяють не тільки моделювати реальні фізичні хвильові процеси, а також застосувати їх для виконання чисельно-аналітичних досліджень.

Дисертаційна робота виконана в межах індивідуального плану роботи аспіранта та в рамках дослідження, яке здійснене у Центральноукраїнському державному педагогічному університеті імені Володимира Винниченка за темою «Прикладна математика у дослідженні складних систем з детермінованими та стохастичними процесами» (номер державної реєстрації 0116 У 005271). Елемент дисертаційного дослідження Луньової М.В. використовуються кафедрою прикладної математики, статистики та економіки ЦДПУ ім. В. Винниченка при розробці тематики кваліфікаційних робіт та проведенні аудиторних занять з курсів «Теорія систем та математичне моделювання», «Практикум з символічних обчислень», «Сучасні проблеми прикладної математики» при підготовки фахівців за спеціальностями 112 Статистика та 122 Комп'ютерні науки.

Результати дисертаційної дослідження здобувача ступеня доктора філософії зі спеціальності 113 Прикладна математика Луньової М.В. на тему: «Моделювання внутрішніх хвильових процесів у шаруватих рідинах» заслухано та обговорено на засіданні кафедри прикладної математики, статистики та економіки Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка (протокол № 2 від 24.09.2020 р.).

Проректор з наукової роботи



Сергій МИХИДА





Міністерство освіти і науки України

НІЖИНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИКОЛИ ГОГОЛЯ

вул. Графська, 2, м. Ніжин, Чернігівська обл., 16602

тел.: (04631) 7-19-67, факс: (04631) 2-53-09

e-mail: ndu@ndu.edu.ua, код ЄДРПОУ 02125668

09.12.2020 № 01-14/1001

На № _____ від _____

АКТ

про впровадження у Ніжинському державному університеті імені Миколи Гоголя результатів дисертації здобувача ступеня доктора філософії зі спеціальності 113 Прикладна математика **Луньової Марії Валентинівни** за темою «Моделювання внутрішніх хвильових процесів у шаруватих рідинах»

Дисертаційне дослідження Луньової Марії Валентинівни «Моделювання внутрішніх хвильових процесів у шаруватих рідинах» на здобуття ступеня доктора філософії зі спеціальності 113 Прикладна математика містить істотну наукову новизну, теоретичне та практичне значення, а його результати можуть бути використані в різних галузях прикладної математики. Назване дослідження відповідає постанові Кабінету Міністрів України від 06.03.2019 р. №167 «Про проведення експерименту з присудження ступеня доктора філософії».

Елементи даного дослідження застосовані у побудові математичних моделей та розробці методів дослідження багатовимірних детермінованих і стохастичних систем в рамках виконання науково-дослідної роботи «Методи дослідження багатовимірних детермінованих і стохастичних систем» по кафедрі інформаційних технологій і аналізу даних. Матеріали дисертації Луньової М.В. використовуються також при викладанні дисциплін «Моделювання систем», «Методи обчислень», «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», «Комп'ютерне моделювання складних систем» студентам спеціальності 122 Комп'ютерні науки першого (бакалаврського) та другого (магістерського) рівня вищої освіти.

Ректор університету



О.Г. Самойленко