

АНОТАЦІЯ

Луньова М.В. Моделювання внутрішніх хвильових процесів у шаруватих рідинах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький, 2020.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню умов поширення та взаємодії внутрішніх слабконелінійних хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» із застосуванням методу багатомасштабних розвинень.

Швидкий розвиток сучасних пакетів комп'ютерної алгебри та удосконалення асимптотичних методів, які, зазвичай, призводять до громіздкості аналітичних перетворень, посприяв можливості впритул підійти до класу нелінійних задач, які б враховували розв'язки нелінійних проблем у наближеннях вищих порядків. Тому, з урахуванням накопченого досвіду, виникла необхідність дослідити нелінійні гравітаційно-капілярні хвилі у тришаровій рідкій системі і проаналізувати їхнє поширення, модуляційну стійкість обвідних та інші характеристики системи в залежності від фізичних та геометричних параметрів.

У роботі розглянуто постановку слабконелінійної задачі поширення та взаємодії хвильових пакетів у системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». З використанням методу багатомасштабних розвинень виведено перші три лінійні наближення задачі про поширення та взаємодію хвиль вздовж поверхонь контакту в даній системі. Розв'язано задачу першого наближення та отримано дисперсійне співвідношення, яке має дві пари лінійно незалежних розв'язків. Знайдено розв'язки задачі другого наближення. Виведено умови розв'язності другого та третього наближень. На основі цих умов з урахуванням дисперсійного рівняння

отримано еволюційні рівняння обвідної внутрішнього верхнього та нижнього хвильового пакету у формі нелінійного рівняння Шредінгера.

У ході аналізу коренів дисперсійного рівняння розглянуто два граничні випадки, які підтверджують достовірність отриманих результатів. Аналіз залежності частот центру хвильового пакету від фізичних та геометричних параметрів системи з урахуванням впливу поверхневого натягу показав, що при переході системи від одного виродженого випадку до другого спостерігається якісна симетрія графіків частот центру хвильового пакету відносно значення густини середнього шару. При цьому вплив поверхневого натягу на одній із поверхонь контакту або на двох поверхнях одночасно призводить до збільшення абсолютного значення частоти центра хвильового пакета.

Досліджено залежність амплітуд хвиль-відгуків від параметрів системи. Виявлено, що при збільшенні товщини верхнього шару амплітуди хвиль-відгуків прямують до граничного значення, а при рівних стрибках густини на поверхнях контакту абсолютні значення амплітуд хвиль-відгуків співпадають. Якщо стрибок густини на нижній поверхні контакту є меншим за стрибок густини на верхній поверхні контакту, то амплітуда хвиль-відгуків, яка виникає на нижній поверхні, є більшою, ніж амплітуда хвиль-відгуків на верхній поверхні. Зміна значення хвильового числа приводить до того, що значення амплітуд хвиль-відгуків досить швидко збігаються до спільного граничного значення.

Дослідження форми відхилення поверхонь контакту у рамках задачі першого наближення показало залежність амплітуди відхилення, як верхньої так і нижньої поверхонь контакту, від зміни густини середнього шару. Проте, з наближенням значення густини середнього шару до значення густини нижнього шару цей вплив є більш вираженим на нижній поверхні контакту. Амплітуда верхньої поверхні контакту зазнає істотних змін тільки при зміні товщини верхнього шару. Відмітимо, що проведений аналіз відношення амплітуд є важливим при подальшому дослідженні енергетичних процесів в

системі, що досліджується, адже при поширенні хвиль в багат шарових гідродинамічних системах виникає явище перекачування енергії хвиль.

Аналіз форми відхилення поверхонь контакту з урахуванням наближення другого порядку виявив параметри системи, за яких виникають хвилі з загостреними гребінцями та затупленими підшвами, або хвилі з затупленим гребінцем і гострою підшовою. Також виявлені області гасіння другої гармоніки та області істотного впливу другої гармоніки на форму поверхні контакту.

Аналіз розв'язків другого наближення показав наявність областей резонансу другої гармоніки. На нижній поверхні контакту такі області були виявлені в околі кривих, де коефіцієнт другої гармоніки набуває як завгодно великих значень, а також кривих, де спостерігається виродження тришарової системи у двошарову. Це дало змогу виконати оцінку застосовності методу багатомасштабних розвинень до даної проблеми та зробити висновки про точність методу та достовірність отриманих результатів.

Побудовано діаграми модуляційної стійкості для різних значень товщини верхнього шару на площині «густина шару – хвильове число», при цьому виявлено криві, які відділяють область модуляційної стійкості від нестійкості для капілярних та гравітаційних хвиль. Виявлено, що області модуляційної нестійкості істотно розширюються при збільшенні товщини верхнього шару.

Виведено вирази для оцінки потоку енергії трьох шарів рідини та сумарної енергії гідродинамічної системи «півпростір – шар – шар з твердою кришкою» у вигляді інтегралів за часовою та вертикальною просторовою змінними від добутку похідних потенціалів швидкостей за часовою та горизонтальною просторовою змінними. Було виявлено, що енергія середнього та верхнього шару тришарової гідродинамічної системи зі збільшенням значення хвильового числа має спадний характер і прямує до певного граничного значення, яке для коротких хвиль не залежить від

товщини верхнього шару. У той же час значення енергії нижнього шару зростає, а після досягнення максимуму спадає до свого граничного значення. При цьому потік енергії системи, що є сумою потоків енергії трьох шарів, також має спадний характер і достатньо швидко збігається до свого граничного значення.

Аналіз впливу геометричних параметрів системи на енергетичні характеристики виявив такі ефекти та закономірності: наявність прогресивної гравітаційної хвилі на верхній поверхні контакту призводить до зростання сумарної енергії системи до граничного значення, в той час як для капілярних хвиль сумарна енергія системи має спадний характер; для випадку гравітаційно-капілярних хвиль, за умови, що прогресивна хвиля на верхній поверхні контакту відсутня, а є лише прогресивна хвиля на нижній поверхні контакту, енергія системи зі збільшенням товщини верхнього шару має спадний характер і для гравітаційних хвиль має більше значення порівняно з капілярними хвилями.

Результати дисертаційної роботи в цілому носять теоретичний характер, у них, в значній мірі, враховані сучасні проблеми моделювання хвильових процесів, які виникають в практичній діяльності. Наявність великої кількості фізичних та геометричних параметрів системи, пов'язаних між собою, призводить до необхідності детального аналізу та інтерпретації отриманих результатів, які створюють цілісну картину хвильового процесу і у повній мірі можуть бути застосовані для вивчення хвильових процесів в океані з льодовим покриттям та з шаруватою структурою рідини, яка виникає поблизу гирла річок, а також у відкритому океані у період танення льоду. Вивчення впливу поверхневого натягу має практичне застосування у розробках нових технологій з використанням шаруватих середовищ, які не перемішуються, що має перспективу застосування у створенні інноваційних рішень для різних галузей прикладної науки.

Дисертаційну роботу було виконано в межах індивідуального плану роботи аспіранта та в рамках дослідження, здійсненого у

Центральноукраїнському державному педагогічному університеті імені Володимира Винниченка за темою «Прикладна математика у дослідженні складних систем з детермінованими та стохастичними процесами» (номер державної реєстрації 0116 U 005271).

Ключові слова: тришарова гідродинамічна система, слабконелінійна модель, хвильовий пакет, внутрішні хвилі, взаємодія хвиль, амплітуди хвиль, відношення амплітуд, енергія хвильового руху, обвідна хвильового пакету, модуляційна стійкість.

SUMMARY

Maria V. Luniova Modeling of internal wave processes in layered fluids. – Qualification scientific paper, manuscript.

The thesis for the degree of a Doctor of Philosophy in the specialty 113 Applied Mathematics.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,
Kropyvnytskyi, 2020

The thesis is devoted to the investigation of the conditions of propagation and interaction of internal weakly nonlinear wave packets in a three-layer hydrodynamic system "half-space – layer – layer with a rigid lid" using the asymptotic method of multiscale expansion.

The rapid development of modern packages of computer algebra and the improvement of asymptotic methods, which usually lead to cumbersome analytical transformations, have contributed to the possibility of coming close to the class of nonlinear problems that would take into account solutions of nonlinear problems in higher-order approximations. Therefore, taking into account the accumulated experience it is necessary to study nonlinear gravitational-capillary waves in a three-layer fluid system and analyze their propagation, modulation stability of the

envelope and other characteristics of the system depending on physical and geometric parameters.

The thesis deals with the formulation of a weakly nonlinear problem of propagation and interaction of wave packets in the system "half-space – layer – layer with a rigid lid". Using the method of multiscale expansion to the third order, the first three linear approximations of the problem of propagation and interaction of waves along the contact surfaces in the system are obtained. The problem of the first approximation is solved and a dispersion relation is obtained, which has two pairs of linearly independent solutions. The solutions of the second approximation problem are found. The conditions for the solvability of the second and third approximations are derived. Taking into account these conditions and the dispersion equation, two evolution equations of the envelopes of internal upper and lower wave-packets are obtained in the form of a nonlinear Schrödinger equation.

As a result of the analysis of the roots of the dispersion equation, two limit cases are founded, which confirm the reliability of the obtained results. Taking into account the effect of surface tension, the analysis of the dependence of the frequencies of the center of the wave-packet up to the physical and geometric parameters of the system is completed. The transition of the system from the first degenerate case to the second one leads to a qualitative symmetry of graphs of the frequencies of the center of the wave-packet via to the value of the density of the middle layer. The effect of the surface tension on one of the contact surfaces or on two surfaces simultaneously leads to an increase of the absolute value of the frequency of the center of the wave-packet.

The response waves' amplitudes dependence on the system parameters is investigated. It is found that with increasing thickness of the upper layer, the amplitudes of the response waves limit to the fixed value. In the case of the equal jumps in density on the contact surfaces, the absolute values of the amplitudes of the response waves coincide. If the density jump on the lower contact surface is less than the density jump on the upper contact surface, then the response wave amplitude on the lower surface are larger than the response wave amplitude on the

upper surface. Changing the wave number value leads to the fact that the values of the amplitudes of the response waves quickly approach to a common limit value.

The study of the form of the elevation of the contact surfaces in the framework of the solution of the first approximation problem had showed the dependence of the amplitude of the elevation of both, the upper and lower, contact surfaces on the density of the middle layer. However, as the middle layer density approaches the lower layer density, this effect is more pronounced on the lower contact surface. The amplitude of the upper contact surface changes only when the thickness of the upper layer changes. Note that the analysis of the ratio of amplitudes is important in the further study of energy processes in the system, because the phenomenon of pumping energy waves occurs in case of the propagation of waves in multilayered hydrodynamic systems.

Taking into account the second-order approximation, the analysis of the form of the elevation of the contact surfaces have revealed the parameters of system where waves with sharpened combs and blunted soles are formed or waves with blunted combs and sharpened soles are formed. Also, the areas of second harmonic damping and areas of significant influence of the second harmonic on the form of the contact surface are investigated.

Analysis of the solutions of the second approximation have revealed the presence of regions of resonance of the second harmonic. On the lower contact surface, such the areas were found around the curves, where the coefficient of the second harmonic acquires any arbitrarily large values, as well as curves, where the degeneration of the three-layer system into the two-layer one is observed. This made it possible to evaluate the applicability of the multiscale expansion method to this problem and to draw a conclusion about accuracy of the method and the reliability of the results.

Diagrams of modulation stability for different values of the thickness of the upper layer on the plane "layer density – wave number" were constructed, and curves that separate the region of modulation stability from instability for capillary

and gravitational waves were found. It is revealed that the areas of modulation instability substantially expand with increasing of the upper layer thickness.

The expressions for quantitative and qualitative estimation of energy of three layers of fluid and total energy of the hydrodynamic system "half-space – layer – layer with a rigid lid" in the form of integrals on time and vertical space variables from the product of velocity potentials derivations on time and horizontal space variables are derived. It was found that the energy of the middle and upper layer of the three-layer hydrodynamic system with increasing value of the wave number has a descending nature and tends to a fixed limit value, which for short waves does not depend on the thickness of the top layer. At the same time, the energy value of the lower layer increases to a fixed value, and after reaching the maximum it falls to its limit value. In this case, the energy of the system, which is equal to the sum of the energies of the three layers, also has a decreasing nature and quickly tends to its limit value.

The analysis of the influence of the geometrical parameters of the system on the energy characteristics revealed the following effects and regularities: the presence of the progressive gravitational wave on the upper contact surface leads to an increase of the total energy of the system to the limit value, while the total energy of the system for capillary waves has a decreasing nature; in the case of gravitational-capillary waves, if the progressive wave on the upper contact surface is not taken into account and the progressive wave on the lower contact surface is taken into account, then the energy of the system has a decreasing nature with increasing thickness of the upper layer and, also, gravitational waves energy is larger than capillary waves energy.

In general, the results of the investigation have a theoretical nature. To a large extent, it takes into account the modern problems of wave processes modeling that arise in practical activity. The presence of a large number of interconnected physical and geometric parameters of the system leads to the need for detailed analysis and interpretation of the results. It creates a holistic picture of the wave process and, to the fullest extent, can be applied to study wave processes in an ice-

covered ocean and with a layered fluid structure that occurs near the mouth of rivers and in the open ocean during ice melt. The study of the influence of surface tension has practical application in the development of new technologies using layered media that do not mixed, which has the potential to be used in creating innovative solutions for various fields of applied science.

The thesis was performed within the framework of the individual postgraduate work plan and within the framework of the research "Applied mathematics in the study of complex systems with deterministic and stochastic processes" (state registration number 0116 U 005271) conducted at Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University.

Key words: three-layer hydrodynamic system, weakly nonlinear model, wave-packet, internal waves, interaction of waves, wave amplitudes, amplitude ratio, wave motion energy, envelope of wave-packet, modulation stability.

Список публікацій здобувача

Основні наукові результати дисертації

1. Avramenko O., Lunyova M., Naradovyi V. Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. Vol. 5, Issue 5 (89). P. 58–66.
doi: 10.15587/1729-4061.2017.111941
2. Avramenko O., Lunyova M. Analysis of energy of internal waves in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 2, Issue 5 (92). P. 26–33. doi: 10.15587/1729-4061.2018.128641.
3. Авраменко О.В., Луньова М.В. Наратовий В.В., Селезов І.Т. Умови поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідро-динамічній системі з твердою кришкою. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2017. – 60, № 4. – С. 137–151.
Теж саме: Avramenko O.V., Naradovyi V.V., Lunyova M.V., Selezov I.T.

Conditions of Wave Propagation in a Semiinfinite Three-Layer Hydrodynamic System with Rigid Lid. // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – 247 (1). – P. 173-190. doi: 10.1007/s10958-020-04795

4. Авраменко О.В., Луньова М.В. Аналіз форми хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». // . Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2019. – 62, № 3. – С. 127-142.
5. Авраменко О., Луньова М. Модуляційна стійкість хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2019. – Вип. 1. – С. 30-35.

Тези наукових доповідей

6. Авраменко О.В., Луньова М.В. Візуалізація поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою. // XII Всеукраїнська студентська наукова конференція “Сучасні проблеми фізико-математичних наук та методики їх викладання”: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2017. – С. 3-4.
7. Луньова М.В. Моделювання поширення хвиль у напівнескінченній тришаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою. // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях / Под редакцией профессора Жолткевича Г.Н. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2017. – С. 22-23.
8. Луньова М.В., Богданов В.І. Аналіз енергії хвильового руху тришарової гідродинамічної системи. Вироджені випадки. // XIII Всеукраїнська студентська наукова конференція “Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання”: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2018. – С. 188-190.

9. Авраменко О.В., Луньова М.В. Еволюційні рівняння для обвідних хвильових пакетів у напівнескінченній тришаровій рідині. // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях: Збірка матеріалів XIV міжнародної наукової конференції для молодих вчених / Під ред. проф. Жолткевича Г.М. – Х.: ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2019. – С. 42-43.
10. Авраменко О.В., Луньова М.В. Аналіз умов хвилеутворення в тришаровій гідродинамічній системі «півпростір – шар – шар з твердою кришкою». // XV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання»: матеріали конференції. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2019. – С. 3.

**Статті у наукових виданнях України, що додатково
відображають результати дисертації**

11. Гринько А.Р., Луньова М.В. Використання математичного пакету Maple для аналізу енергії хвиль у тришаровій гідродинамічній системі. // Наукові записки молодих учених. 2018. – № 1. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1421>