Відповіді до Вступної олімпіади 2021
(дистанційний тур)

Задача 1. Б

Задача 2. В

Задача 3. В

Задача 4. Д

Задача 5. Б

Задача 6. Розв'яжіть нерівність: $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \geq 4$.

Розв’язання:

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases}$

Заміна:

$\log_2 x = t \to x = 2^t$

$x^{log_2 x} = (2^t)^t = 2^{t^2}$

$2^{t^2} + 2^{t^2} \geq 4$

$2 \cdot 2^{t^2} \geq 4 \Big| \div 2$

$2^{t^2} \geq 2$

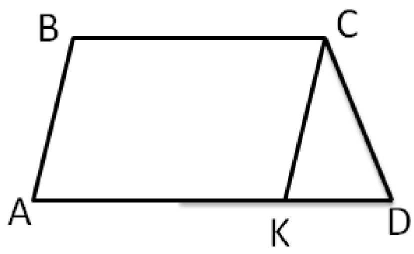
$t^2 \geq 1$

$|t| \geq 1$

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x \geq 1 \\ \log_2 x \leq -1 \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{c} x \geq 2 \\ 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Відповідь: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [2 + \infty)$

Задача 7.. Чи існує трапеція, основи якої дорівнюють 9 см і 11 см, а бічні сторони 8 см і 6 см? Відповідь обґрунтуйте.



Нехай $ABCD$ – дана трапеція. $AD = 11$ см, $AB = 8$ см, $BC = 9$ см, $CD = 6$ см

Побудуємо на основі AD точку K так, що $CK||AB$. Тоді $ABCK$ – паралелограм. $DK = AD - AK = AD - BC = 11 - 9 = 2$(см)

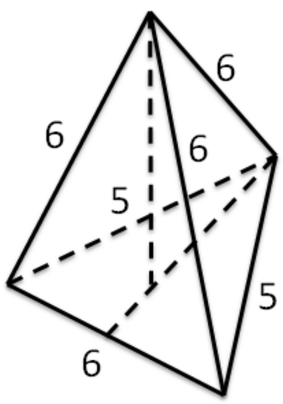
В $\triangle CDK$: $CK = AB = 8$ см, $CD = 6$ см, $DK = 2$ см.

За нерівністю трикутника: $CK < DK + CD \rightarrow 8 < 2 + 6.$

Нерівність не виконується.

Відповідь: Такої трапеції не існує.

Задача 8. Основою трикутної піраміди є трикутник зі сторонами 6 см, 5см і 5 см. Знайдіть висоту піраміди, якщо кожне її бічне ребро дорівнює 6 см



Розв'язання:

Оскільки всі бічні ребра однакові, то висота проектується в центр описаного кола.

В основі – рівнобедрений трикутник (сторони 6, 5, 5)

$h_{\text{осн.}} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см)

$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ (см)^2

$$R = \frac{abc}{4S}; R = \frac{5 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 12} = \frac{25}{8} \text{(см)}$$

$$h_{\text{осн.}} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{25}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{(6 \cdot 8)^2 - 25^2}{8^2}} = \frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{8} \text{(см)}$$

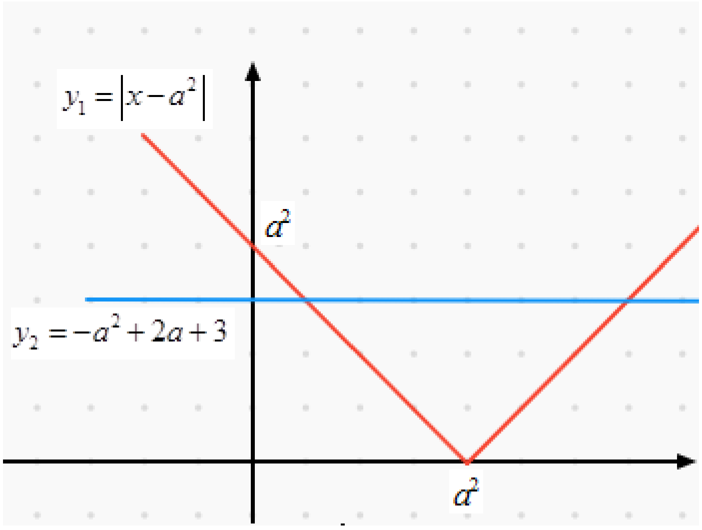
Відповідь: $\frac{\sqrt{23 \cdot 73}}{8}$ (см)

Задача 9. При яких значеннях параметра a корені рівняння $\left|x - a^2\right| = -a^2 + 2a + 3$ мають однакові знаки?

Примітка. Оскільки сталася технічна помилка при наборі, котра змінила зміст умови, тому бали за виконання цього завдання отримали всі автоматично.

Розв’язання. Застосуємо графічний спосіб. Розглянемо наступні функції $y_1 = |x - a^2|$ та $y_2 = -a^2 + 2a + 3$.

Нескладно побудувати їх графіки



Отже, щоб знайти розв’язок нашої задачі треба розв’язати систему

$$\begin{cases} -a^2 + 2a + 3 < a^2, \\ -a^2 + 2a + 3 > 0. \end{cases}$$

Звідки нескладно отримати, що $a \in \left(-1; \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; 3\right)$.

Задача 10. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ такі, що $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2 = 1$. Довести, що $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{10} a_1 \geq -1$.

Розв’язання. Найбільш простим способом довести дану нерівність буде використання нерівності Коші-Буняковського

$$|a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{10} a_1| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + \ldots + a_{10}^2 + a_1^2} = 1.$$

Звідки слідує, що $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{10} a_1 \geq -1$.

Ясно, що дану нерівність можна розв’язати іншими способами.