ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Дмитро БОНДАРЕНКО

СЛАБОНЕЛІНІЙНІ НЕТЕРОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ ПЕРШОГО РОДУ ДЛЯ СДР

(магістрант фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук, доцент Г.В.Завізіон

Побудова конструктивних методів аналізу слабонелінійних крайових задач займає одне з центральних і принципово важливих місць в якісній теорії диференціальних рівнянь. Це обумовлено передусім важливістю практичного застосування теорії краєвих задач в самих різних галузях знань: теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії управління, ряду радіотехнічних, механічних і біологічних задач.

Специфіка такого роду крайових задач полягає в тому, що в більшості випадків їх лінійна частина є оператором, який не має оберненого, що не дозволяє безпосередньо застосовувати традиційні методи дослідження крайових задач, засновані на використанні принципу нерухомої точки. Те що лінійна частина оператора не має оберненої є наслідком того, що число m крайових умов не співпадає з порядком n операторної системи. Такого типу завдання для систем функціонально-диференціальних рівнянь являються нетеровими (чи з нетеровою лінійною частиною) і включають найбільш складні і мало досліджені як недовизначені, так і перевизначені, як некритичні, так і критичні крайові задачі.

Розглянемо слабонелінійну крайову задачу у критичному випадку першого порядку для звичайної системи диференціальних рівнянь з малим невід'ємним параметром ε та з'ясуємо необхідну і достатню умови існування її розв'язку.

Слабонелінійна крайова задача в критичному випадку першого роду має вигляд:

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon),\ lz = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{1}$$

де $A(t)$ - $(n\times n)$-вимірна матриця із $C[a,b]$; $\varphi(t)$ - n- вимірний вектор-функції із $C[a,b]$; $Z(z,t,\varepsilon)$ - нелінійна по z n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційовна по z в області породжуючого розв'язку і неперервна по t, ε; α - m-вимірний вектор-стовбець константа із m-вимірного евклідового простору R^m ($\alpha \in R^m$); $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ - нелінійний обмежений m-вимірний вектор-функціонал, неперервно дифененційовний по z і неперервний по ε в області породжуючого розв'язку.

До критичного випадку відноситься випадок, коли однорідна породжувальна задача має не тривіальний розв'язок, тобто $\operatorname{rank} Q = n_1 < n$. Тоді неоднорідна породжувальна крайова задача

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t),\ lz = \alpha \tag{2}$$

має розв'язок, коли $\varphi(t)$ задовольняє умові

$$P_{Q_d^*}(\alpha - l\bar{z}(\cdot)) = 0, \tag{3}$$

де $\bar{z}(t) = \int_a^b K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$, $(d = m - n)$ [1].

Крайова задача (2), яка отримується із крайової задачі (1) при $\varepsilon = 0$ називається породжувальною для (1).

Крайова задача (2) має r-параметричне сімейсво ($r = n - n_1$) розв'язків:

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + (G\varphi)(t) + X(t)Q^+\alpha,$$

де $(G\varphi)(t)$ -узагальнений оператор Гріна, що діє на n- вимірну вектор-функцію $\varphi(t)$ з $C[a,b]$ і визначається за формулою:

$$(G\varphi)(t) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau - X(t)Q^+ l\int_a^b K(\cdot,\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Маємо наступну необхідну умову існування розв'язку крайової задачі (1).

Теорема 1: *Нехай крайова задача (1) задовольняє вказаним вище умовам і має розв'язок* $z(t,\varepsilon)$*:* $z(\cdot,\varepsilon)\in C^1[a,b]$, $z(t,\cdot)\in C[\varepsilon]$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, *який обертається при* $\varepsilon=0$ *в породжувальний розв'язок* $z_0(t,c_0^*)$ *з константою* $c_r=c_0^*$. *Тоді вектор* $c_0^*\in R^r$ *задовольняє рівняння*

$$P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot,c_0^*),0)-l\int_a^b K(\cdot,\tau)Z(z_0(\tau,c_0^*),\tau,0)d\tau\}=0 \qquad (4)$$

А тепер розглянемо достатню умову існування розв'язку. Виконаємо в (1) заміну змінних

$$z(t,\varepsilon)=z_0(t,c_0^*)+x(t,\varepsilon), \qquad (5)$$

де $c_0^*\in R^r$ і задовольняє умову (4). Визначимо умову існування і алгоритм побудови розв'язку $x(t,\varepsilon)$, який перетворюється в нульовий розв'язок при $\varepsilon=0$, крайової задачі

$$\dot x=A(t)x+\varepsilon Z(z_0(t,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),t,\varepsilon),\ lx=\varepsilon J(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \qquad (6)$$

Представимо вектор-функцію $Z(z_0(t,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),t,\varepsilon)$ у вигляді

$$Z(z_0+x,t,\varepsilon)=f_0(t,c_0^*)+A_1(t)x+R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

де $f_0(t,c_0^*)=Z(z_0(t,c_0^*),t,0)$, $A_1(t)=A_1(t,c_0^*)=\left.\dfrac{\partial Z(z,t,0)}{\partial z}\right|_{z=z_0(t,c_0^*)}$

Нелінійна вектор-функція $R(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ належить класу $C_1[x]$, $C[t]$, $C[\varepsilon]$ в області $\|x\|\le q$, $t\in[a,b]$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. І при цьому:

$$R(0,t,0)=0,\ \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial x}=0.$$

Представимо векторний функціонал $J(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ у вигляді

$$J(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=J_0(z_0(\cdot,c_0^*))+l_1x(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),$$

де $J_0(z_0(\cdot,c_0^*))=J(z_0(\cdot,c_0^*),0)$, $l_1x(\cdot,\varepsilon)$ - лінійна частина векторного функціонала $J(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, а $R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задовольняє умову:

$$R_1(0,0)=0,\ \frac{\partial R_1(0,0)}{\partial x}=0.$$

Розглядаючи (6) як лінійну задачу з неоднорідностями $Z(z_0+x,t,\varepsilon)$ і $J(z_0(\cdot,c_0^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$, розв'язок рівняння (6) запишемо у вигляді:

$$x(t,\varepsilon)=X_r(t)c+x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

де $c=c(\varepsilon)\in R$. При цьому невідомий вектор c і невідома функція $x^{(1)}(t,\varepsilon)$ визначається з умови існування розв'язку рівняння (6) і представлена із розв'язку задачі

$$P_{Q_d^*}\{J_0(z_0(\cdot,c_0^*))+l_1x(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-l\int_a^b K(\cdot,\tau)[f_0(\tau,c_0^*)+A_1(\tau)(X_r(\tau)c+x^{(1)}(\tau,\varepsilon))+$$
$$+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau\}=0$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon(G[f_0(\tau,c_0^*)+A_1(\tau)x(\tau,\varepsilon)+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)])(t)+\varepsilon X(t)Q^+\{J_0(z_0(\cdot,c_0^*))+l_1x(\cdot,\varepsilon)+$$
$$+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}.$$

Враховуючи, що вектор константа c_0^* задовольняє умову (4), одержимо:

$$x(t,\varepsilon)=X_r(t)c+x^{(1)}(t,\varepsilon) \qquad (7)$$

$$B_0c=P_{Q_d^*}\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau\}, \qquad (8)$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon(G[f_0(\tau,c_0^*)+A_1(\tau)(X_r(\tau)c+x^{(1)}(\tau,\varepsilon))+R(x,\tau,\varepsilon)])(t)+\varepsilon X(t)Q^+\{J_0(z_0(\cdot,c_0^*))+$$
$$+l_1x(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}, \qquad (9)$$

де B_0 - $(d\times r)$-вимірна матриця вигляду

$$B_0=P_{Q_d^*}\{l_1X_r(\cdot)-l\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau\}$$

Для остаточного знаходження розв'язку $x(t,\varepsilon)$ за формулою (7) потрібно знайти вектор c, який задовольняє рівняння (8). Для цього припустимо, що

$$P_{B_0}=0 \qquad (10)$$

$$P_{B_0^*}\cdot P_{B_d^*}=0 \qquad (11)$$

Враховуючи (11), отримуємо, що рівняння (16) завжди має розв'язок. Умова (10) забезпечує єдиність розв'язку, який знаходиться за формулою:

$$c=-B_0^+P_{Q_d^*}\{l_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_1(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau\} \qquad (12)$$

Вкажемо ітераційний процес знаходження розв'язків рівнянь (7), (9), (12).

Перше наближення $x_1^{(1)}(t,\varepsilon)$ до $x(t,\varepsilon)$ є розв'язок системи:

$$\dot{x}_1=A(t)x_1+\varepsilon f(t,c_0^*),$$
$$lx_1=\varepsilon J_0(z_0(\cdot,c_0^*)) \qquad (13)$$

Тому перше наближення $x_1(t,\varepsilon)$ до шуканого розв'язку $x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (6) вважаємо рівним $x_1^{(1)}(t,\varepsilon)$. Друге наближення $x_2^{(1)}(t,\varepsilon)$ знаходимо із системи:

$$\dot{x}_2=A(t)x_2+\varepsilon\{f(t,c_0^*)+A_1(t)[X_r(t)c_1+x_1^{(1)}(t,\varepsilon)]+R(x_1(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\},$$
$$lx_2=\varepsilon\{J_0(z_0(\cdot,c_0^*))+l_1[X_r(\cdot)c_1+x_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]+R_1(x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\} \qquad (14)$$

З необхідної і достатньої умови існування розв'язку лінійної неоднорідної задачі (14) знайдемо рівняння для знаходження c_1:

$$B_0c_1+P_{Q_d^*}\{l_1x_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_1(x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)+R(x_1(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau\}=0 \qquad (15)$$

З рівняння (15) знаходимо перше наближення c_1 до вектора $c(\varepsilon)$. Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку рівняння (15) є виконання умови

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\{l_1x_1^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_1(x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon)+R(x_1(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau\}=0,$$

що забезпечується з умови (11). Таким чином друге наближення $x_2(t,\varepsilon)$ до $x(t,\varepsilon)$ запишеться так:

$$x_2(t,\varepsilon)=X_r(t)c_1+x_2^{(1)}(t,\varepsilon).$$

Третє наближення $x_3(t,\varepsilon)$ до точного розв'язку $x(t,\varepsilon)$ знаходимо з рівнянь:

$$x_3(t,\varepsilon)=X_r(t)c_2+x_3^{(1)}(t,\varepsilon),$$

де $x_3^{(1)}(t,\varepsilon)$ є розвязком рівнянь

$$\dot{x}_3=A(t)x_3+\varepsilon\{f(t,c_0^*)+A_1(t)[X_r(t)c_2+x_2^{(1)}(t,\varepsilon)]+R(x_2(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}$$
$$lx_3=\varepsilon\{J_0(z_0(\cdot,c_0^*))+l_1[X_r(\cdot)c_2+x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)]+R_1(x_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\} \qquad (16)$$

З необхідної і достатньої умови існування розв'язку крайової задачі (16) одержимо рівняння для знаходження c_2:

$$B_0c_2+P_{Q_d^*}\{l_1x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+R_1(x_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon)+R(x_2(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau\}=0 \qquad (17)$$

З рівняння (17) знаходимо друге наближення c_2 до вектора $c(\varepsilon)$:

$$c_2 = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{l_1 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(x_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(x_2(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau\}.$$

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку рівняння (17) є виконання умови

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*}\{l_1 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(x_2(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(x_2(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau\} = 0,$$

що забезпечується з умови (11).

Таким чином, якщо $P_{B_0^*} \cdot P_{B_d^*} = 0$, то і критерій розв'язуваності відповідних алгебраїчних систем на кожному кроці ітераційного процесу буде виконаний. Тому, продовжуючи ітераційний процес для знаходження розв'язку $x(t,\cdot) \in C[\varepsilon]$, отримаємо наступні рівняння:

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + x_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \text{ де } k = 0,1,2,... \tag{18}$$

$$c_k = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{l_1 x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + R_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)[A_1(\tau)x_k^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(x_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau\} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon(G\{f_0(\tau,c_0^*) + A_1(\tau)[X_r(\tau)c_k + x_k^1(\tau,\varepsilon)] + R(x(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\})(t) + \\ + \varepsilon X(t)Q^+\{J_0(z_0(\cdot,c_0^*)) + l_1[X_r(\cdot)c_k + x_k^{(1)}(\cdot,\varepsilon)] + R_1(x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\} \end{aligned} \tag{20}$$

Таким чином, справедлива наступна теорема [2].

Теорема (достатня умова). *Нехай крайова задача (1) задовольняє вказаним вище умовам, що має місце критичний випадок (*$\operatorname{rank} Q = n_1 < n$*) і відповідна крайова задача (2) при умові (3) має* r*-параметричне (*$r = n - n_1$*) сімейство породжувальних розв'язків*

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + (G\varphi)(t) + X(t)Q^+\alpha,$$

де $(G\varphi)(t) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau - X(t)Q^+ l\int_a^b K(\cdot,\tau)\varphi(\tau)d\tau$. *Тоді для кожного значення вектора* $c_1 = c_0^* \in R^r$, *який задовольняє рівняння:*

$$P_{Q_d^*}\{J(z_0(\cdot,c_0^*),0) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)Z(z_0(\tau,c_r),\tau,0)d\tau\} = 0,$$

при умові (10) і (11) краєва задача (6) має єдиний розв'язок $x(t,\cdot)$, *який обертається в нуль при* $\varepsilon = 0$. *Цей розв'язок можна визначити за допомогою збіжного ітераційного процесу за формулами (18) і (19). Крайова задача (1) має при цьому єдиний розв'язок* $z(t,\cdot)$, *який перетворюється в породжувальний* $z_0(t,c_0^*)$ *і, який знаходиться за допомогою ітераційного процесу (18), (19) і формули:*

$$z_k(t,\varepsilon) = z_0(t,c_0^*) + x_k(t,\varepsilon),\ k = 0,1,2,\dots.$$

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. – К.: Наук. думка, 1990. – 96 с.
2. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи: Монография. – К.: ІМ НАН України, 1995 – 318 с.

Олександр ІЩЕНКО, Інна ДВОРАК

ЗАСТОСУВАННЯ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

(магістрант фізико-математичного факультету,
студентка IV курсу фізико-математичного факультету)
Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент О.М. Вороний

На різних математичних змаганнях школярів протягом останніх десятиліть постійно пропонуються завдання, пов'язані з розв'язуванням функціональних рівнянь. Зазвичай при розв'язуванні таких рівнянь використовується основний спосіб розв'язування – спосіб підстановок (він описаний, наприклад в [1], [2], [3], [4]), який дає можливість розв'язування функціонального рівняння звести до розв'язування системи алгебраїчних рівнянь. Спосіб ефективний, але складний, бо автори завдань зумисне намагаються як можна більше завуалювати потрібні підстановки, а способи добору цих підстановок мають швидше евристичний, ніж логічний характер.

Відволікаючись від типу рівняння, звернемось до процедури його аналітичного розв'язування. Коли нам потрібно розв'язати складне рівняння, ми намагаємося шляхом певних «маніпуляцій» це рівняння замінити одним або кількома простішими. Зокрема, розв'язування раціонального рівняння, застосовуючи спосіб розкладання на множники многочлена, зводимо до розв'язування сукупності лінійних або квадратних рівнянь; розв'язування тригонометричних, показникових і логарифмічних рівнянь зводиться до розв'язування найпростіших рівнянь відповідного типу, розв'язання яких алгоритмізоване.

Виникає закономірне питання, чи не можна розв'язування того чи іншого функціонального рівняння звести до розв'язування простіших функціональних рівнянь, для яких або відомі розв'язки, або відомі способи розв'язування?

Дослідження показали, що в окремих випадках, при розв'язуванні функціональних рівнянь можна використовувати різницеві рівняння.

Різницеві рівняння є частинним випадком функціональних рівнянь. До того ж розв'язування однорідних різницевих рівнянь з постійними коефіцієнтами алгоритмізоване; також алгоритмізоване розв'язування неоднорідних різницевих рівнянь з постійними коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.

Як відомо лінійне однорідне різницеве рівняння першого порядку

$$a_0 f(x+1) + a_1 f(x) = 0,$$

зі сталими коефіцієнтами a_0, a_1 має загальний розв'язок $F(x) = C \cdot r^x$, у якому C – довільна стала, r – розв'язок відповідного характеристичного рівняння $a_0 r + a_1 = 0$.

Загальний розв'язок лінійного однорідного різницевого рівняння другого порядку

$$a_0 f(x+2) + a_1 f(x+1) + a_2 f(x) = 0,$$

зі сталими коефіцієнтами a_0, a_1, a_2 залежить від коренів характеристичного рівняння

$$a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0$$

і має вигляд:

1) $F(x) = C_1 r_1^x + C_2 r_2^x$, якщо корені r_1 і r_2 - додатні й різні;

2) $F(x) = C_1 r_1^x + C_2 x r_1^x$, якщо корені r_1 і r_2 - додатні й рівні, тобто $r_1 = r_2$;

3) $F(x) = C_1 \rho^x \cos\alpha x + C_2 \rho^x \sin\alpha x$, якщо корені r_1 і r_2 - комплексні, $r_{1,2} = \rho(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)$. (У кожному з випадків C_1 і C_2 - довільні сталі числа).

Для лінійних неоднорідних різницевих рівнянь першого і другого порядку загальний розв'язок $f(x)$ є сумою їх частинного розв'язку $f_0(x)$ і загального розв'язку $F(x)$ відповідного однорідного рівняння:

$$f(x) = f_0(x) + F(x).$$

Якщо права частина $Q(x)$ неоднорідного рівняння має вигляд $Q(x)=\alpha^x P_m(x)$, де $P_m(x)$ – многочлен степеня m, то частинний розв'язок $f_0(x)$ неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів шукають у формі:

1) $f_0(x)=\alpha^x R_m(x)$, якщо α не є коренем характеристичного рівняння;

2) $f_0(x)=\alpha^x \cdot x \cdot R_m(x)$, якщо α є простим коренем характеристичного рівняння;

3) $f_0(x)=\alpha^x \cdot x^2 \cdot R_m(x)$, якщо α є кратним коренем характеристичного рівняння.

У кожному з наведених випадків $R_m(x)$ – многочлен степеня m з невизначеними коефіцієнтами.

Зазначимо, що теорію різницевих рівнянь викладено у книзі [5], с. 78 – 109.

Наведемо приклади задач, що пропонувалися учням на різних випробуваннях, які можна розв'язати за допомогою різницевих рівнянь. Зауважимо, що ці задачі розв'язувалися іншими способами, зокрема, способом підстановок.

Спочатку розглянемо задачу з вступних екзаменів до Московського державного університету ім. М.В. Ломоносова ([6], с. 40).

Задача 1. Знайти квадратичну функцію $f(x)$ таку, що

$$f(1-x)-f(2-x)=-2x+7, \forall x \in R. \tag{1}$$

Р о з в ' я з а н н я. Враховуючи умову задачі, функцію $f(x)$ будемо шукати у вигляді

$$f(x)=ax^2+bx+c. \tag{2}$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти a, b і c. Підставимо (2) у (1). Після перетворень дістанемо тотожну рівність:

$$2ax-3a-b \equiv -2x+7 \Rightarrow \begin{cases} 2a=-2, \\ -3a-b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1, \\ b=-4. \end{cases}$$

Маємо функцію $f(x)=-x^2-4x+c$, у якій коефіцієнт c залишається довільним.

Задача розв'язана. Однак виникає питання про існування інших розв'язків рівняння (1), відмінних від знайдених. Покажемо, що розв'язками рівняння є тільки знайдені квадратичні функції.

Виконаємо заміну $t=1-x \Rightarrow x=1-t$ у рівнянні (1):

$$f(t)-f(t+1)=2t+5. \tag{3}$$

Отримане рівняння є лінійним неоднорідним різницевим рівнянням першого порядку. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$-f(t+1)+f(t)=0.$$

Для цього складемо його характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$-r+1=0 \Rightarrow r=1.$$

Маємо

$$F(t)=C.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$f_0(t)=t\cdot(b_0 t+b_1). \tag{4}$$

Врахувавши (4) і (3), отримаємо:

$$t\cdot(b_0 t+b_1)-(t+1)\cdot(b_0(t+1)+b_1) \equiv 2t+5,$$

$$b_0 t^2+b_1 t-(t+1)\cdot(b_0 t+b_0+b_1) \equiv 2t+5 \Leftrightarrow b_0 t^2+b_1 t-b_0 t^2-b_0 t-b_1 t-b_0 t-b_0-b_1 \equiv 2t+5,$$

$$-2b_0 t-b_0-b_1 \equiv 2t+5 \Rightarrow \begin{cases} -2b_0=2, \\ -b_0-b_1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0=-1, \\ b_1=-4. \end{cases}$$

$$f_0(t)=t(-t-4)=-t^2-4t.$$

Тепер можна записати загальний розв'язок рівняння (3)

$$f(t)=f_0(t)+F(t)=-t^2-4t+C \Rightarrow f(x)=-x^2-4x+C.$$

Отже, розв'язком рівняння є тільки квадратичні функції $f(x)=-x^2-4x+C$, де C – довільна стала.

Задача 2. Нехай Q^+ - множина додатних раціональних чисел. Знайти всі функції $f: Q^+ \to Q^+$, які $\forall x \in Q^+$ задовольняють умови:

1) $f(x+1) = f(x) + 1$; 2) $f(x^2) = (f(x))^2$.

(IV етап XXVII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 1997 р.)

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо першу умову

$$f(x+1) = f(x) + 1 \Rightarrow f(x+1) - f(x) = 1. \quad \textbf{(5)}$$

Ця рівність з невідомою функцією f є лінійним неоднорідним різницевим рівнянням першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо для рівняння (5) відповідне однорідне рівняння

$$f(x+1) - f(x) = 0.$$

Знайдемо загальний розв'язок отриманого рівняння. Для цього складемо його характеристичне рівняння

$$r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1.$$

Отже, $F(x) = C \cdot 1^x = C$.

Частинний розв'язок рівняння (5) шукатимемо у вигляді:

$$f_0(x) = \alpha^x \cdot x \cdot R_0(x).$$

де $R_0(x)$ - многочлен нульового степеня, тому $R_0(x) = b.$ $\alpha = r = 1.$ Отримаємо:

$$f_0(x) = bx. \quad \textbf{(6)}$$

Підставимо (6) у (5):

$$b(x+1) - bx = 1,$$

$$bx + b - bx = 1 \Rightarrow b = 1.$$

Отже, $f_0(x) = x.$ За теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного різницевого рівняння зі сталими коефіцієнтами маємо

$$f(x) = x + C.$$

Розглянемо умову 2) задачі. Підставимо у рівняння $f(x^2) = (f(x))^2$ знайдену функцію $f(x)$:

$$x^2 + C = (x + C)^2,$$

$$x^2 + C = x^2 + 2Cx + C^2,$$

$$2Cx + C^2 - C = 0.$$

Отримана рівність виконуватиметься для всіх додатних раціональних значень змінної x тільки за умови, що $C = 0$. Тому єдиним розв'язком задачі є функція $f(x) = x$.

Задача 3. Знайти всі $f: X \to R, \forall x, y \in X \subset Q$ такі, що

$$f(x+y) + f(xy-1) = (f(x)+1) \cdot (f(y)+1). \quad \textbf{(7)}$$

(IV етап XLVII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 2007 р.)

Р о з в ' я з а н н я. Знайдемо спочатку $f(1)$. Підставимо у рівність (7) $y = 0$:

$$f(x) + f(-1) = (f(x)+1)(f(0)+1);$$

$$f(x) + f(-1) = f(x)f(0) + f(x) + f(0) + 1 \Leftrightarrow f(x)f(0) = f(-1) - f(0) - 1.$$

Припустимо, що $f(0) \neq 0$, тоді $f(x) = C$. З рівності (7) маємо

$$C + C = (C+1)(C+1) \Leftrightarrow 2C = C^2 + 2C + 1 \Leftrightarrow C^2 + 1 = 0.$$

Ліва частина останньої нерівності завжди додатна, тоді як права дорівнює нулю. А це неможливо. Наше припущення хибне, тому $f(0) = 0$.

Нехай $x = 0, y = 0$:

$$f(0) + f(-1) = (f(0)+1)(f(0)+1) \Leftrightarrow f(-1) = 1.$$

Покладемо $x = -1, y = 1$:

$$f(0) + f(-2) = (f(-1)+1)(f(1)+1) \Leftrightarrow f(-2) = (f(-1)+1)(f(1)+1).$$

Якщо $x = -1, y = -1$:

$$f(-2) + f(0) = (f(-1)+1)(f(-1)+1) \Leftrightarrow f(-2) = (f(-1)+1)(f(-1)+1).$$

У двох останніх рівностях ліві частини рівні, тому прирівняємо їх праві частини:

$$(f(-1)+1)(f(1)+1) = (f(-1)+1)(f(-1)+1);$$
$$f(-1)f(1)+f(-1)+f(1)+1 = (f(-1))^2+2f(-1)+1;$$
$$f(1)+1+f(1)+1 = 1+2+1 \Leftrightarrow 2f(1)=2 \Rightarrow f(1)=1.$$

Нехай $y=1$. Тоді рівність (7) запишеться так:

$$f(x+1)+f(x-1)=(f(x)+1)(f(1)+1);$$
$$f(x+1)+f(x-1)=2\cdot(f(x)+1);$$
$$f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+2 \Leftrightarrow f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=2. \qquad \textbf{(8)}$$

Останнє рівняння є лінійним неоднорідним різницевим рівнянням другого порядку. Складемо характеристичне рівняння для відповідного однорідного різницевого рівняння, знайдемо його корені і запишемо загальний розв'язок однорідного різницевого рівняння:

$$r^2-2r+1=0 \Rightarrow r_1=r_2=1, F(x)=C_1+C_2\cdot x.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $f_0(x)=ax^2$, де a – деякий коефіцієнт:

$$f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=2;$$
$$a(x+1)^2-2ax^2+a(x-1)^2 = 2;$$
$$ax^2+2ax+a-2ax^2+ax^2-2ax+a=2 \Rightarrow a=1;$$
$$f_0(x)=x^2.$$

Отже, $f(x)=C_1+C_2x+x^2$ – загальний розв'язок неоднорідного різницевого рівняння (8). Знайдемо C_1, C_2

$$f(0)=0 \Leftrightarrow C_1+C_2\cdot 0+0^2=0 \Rightarrow C_1=0;$$
$$f(1)=1 \Leftrightarrow C_1+C_2\cdot 1+1^2=1 \Rightarrow C_2=0.$$

Отже, єдиним розв'язком задачі є функція $f(x)=x^2$.

Задача 4. Знайти функцію $f: R \to R$ таку, що

$$f(x+\cos(2007y)) = f(x)+2007\cos f(y), \forall x,y \in R. \qquad \textbf{(9)}$$

(Другий турнір математичних боїв імені М.Й. Ядренка, Київ, 2007 р.)

Р о з в ' я з а н н я. Покладемо $y=0, \forall x \in R$ у рівнянні (9). Маємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку

$$f(x+1)=f(x)+2007\cos f(0) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=2007\cos f(0). \qquad \textbf{(10)}$$

Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$f(x+1)-f(x)=0,$$
$$r-1=0 \Rightarrow r=1.$$
$$F(x)=r^x\cdot C=1^x\cdot C=C.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$f_0(x)=xa. \qquad \textbf{(11)}$$

Підставимо (11) у (10):

$$(x+1)a-xa=2007\cos f(0) \Rightarrow a=2007\cos f(0),$$
$$f_0(x)=(2007\cos f(0))x.$$

Тоді загальним розв'язком рівняння (9) є функція

$$f(x)=(2007\cos f(0))x+C. \qquad \textbf{(12)}$$

З (12) встановлюємо, що $C=f(0)$. Для визначення $f(0)$ підставимо розв'язок (12) у рівняння (9) і виконаємо належні перетворення:

$$(2007\cos f(0))(x+\cos(2007y))+f(0)=(2007\cos f(0))x+f(0)+2007\cos(2007y\cos f(0)+f(0)),$$
$$(2007\cos f(0))x+(2007\cos f(0))\cos(2007y)=(2007\cos f(0))x+2007\cos(2007y\cos f(0)+f(0)),$$
$$2007\cos f(0)\cos(2007y)=2007\cos(2007y\cos f(0)+f(0)),$$
$$\cos f(0)\cos(2007y)=\cos(2007y\cos f(0)+f(0)), \forall y \in R. \qquad \textbf{(13)}$$

1) Якщо $\cos f(0) = 0$, то маємо:

$$0 = \cos(2007y \cdot 0 + f(0)) \Rightarrow \cos f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \cdot$$

$$f(x) = (2007\cos f(0))x + f(0) \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \cdot$$

2) Нехай $\cos f(0) \neq 0$. Візьмемо y таке, що

$$2007y\cos f(0) + f(0) = 0 \Rightarrow y = -\frac{f(0)}{2007\cos f(0)}. \quad \textbf{(14)}$$

Підставимо (14) у (13)

$$\cos f(0)\cos\left(2007 \cdot \frac{-f(0)}{2007\cos f(0)}\right) = \cos(0) \Leftrightarrow \cos f(0)\cos\left(\frac{f(0)}{\cos f(0)}\right) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos f(0) = 1, \\ \cos\dfrac{f(0)}{\cos f(0)} = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos f(0) = -1, \\ \cos\dfrac{f(0)}{\cos f(0)} = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

З першої системи маємо $\cos f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = 2\pi n, n \in Z$. З другої системи

$$\cos(-f(0)) = -1 \Leftrightarrow \cos f(0) = -1 \Rightarrow f(0) = (2l+1)\pi, l \in Z.$$

Тому $f(x) = 2007x + 2\pi n, n \in Z$, і $f(x) = -2007x + (2l+1)\pi, l \in Z$.

Отже, розв'язками рівняння є функції

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \; f(x) = 2007x + 2\pi n, n \in Z, \; f(x) = -2007x + (2l+1)\pi, l \in Z \cdot$$

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Вороной А.Н. О применении последовательностей к решению функциональных уравнений // Математика в школе (РФ), 1997, №2, С. 76-79.
2. Вороний О.М., Писанко Г.В. Функціональні рівняння з вільними змінними // У світі математики, 2003, т. 9, в. 1. – С. 18-28.
3. Недокіс В.А. Розв'язування найпростіших функціональних рівнянь методом підстановок // У світі математики, 2002, т. 8. в.4. – С. 33-39.
4. Пенцак Є. Я., Юрчишин А. С. Функційні рівняння. – Львів: ЛДУ, 1998. – 111 с.
5. Лихтарников Л. М. Элементарное введение в функциональные уравнения. – Санкт-Петербург: Лань, 1997.– 156 с.
6. Фалин Г., Фалин А. Функциональные уравнения и неравенства // Квант, 2006, №5, С. 39-45.

Марина КАНДИБА

ТЕСТОВА СКЛАДОВА ПЕДАГОГІЧНОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК СТУДЕНТІВ З ТЕМИ «МНОГОЧЛЕНИ ВІД ДЕКІЛЬКОХ НЕВІДОМИХ»

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник — кандидат фізико-математичних наук, доцент Л.В. Ізюмченко

Тема «Многочлени від декількох невідомих» вивчається у педагогічних, технічних ВНЗ у розділі «Многочлени» і є дуже важливою для розв'язування рівнянь вищих порядків. Дана тема включає такі пункти: кратне трансцендентне розширення $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ області цілісності К; степінь многочлена; розкладання многочлена над полем в добуток незвідних множників і його єдиність; поле $P(x_1, x_2, ... x_n)$ раціональних дробів; лексикографічне впорядкування членів многочлена; вищий член добутку многочленів; симетричні многочлени; основна теорема про симетричні многочлени і наслідок з неї; результант двох многочленів; виключення змінної з системи двох рівнянь з двома змінними.

Тести – це завдання, що складаються з низки запитань і декількох варіантів відповіді на них для вибору в кожному випадку одного вірного. З їх допомогою можна отримати, наприклад, інформацію про рівень засвоєння елементів знань, про сформованість знань, умінь і навичок студентів, про вміння застосування цих знань в різних ситуаціях. Переваги використання тестових завдань полягають у високій інформативності; чіткій стандартизації процедури оцінювання, що створює однакові умови для всіх студентів і зменшує вплив на результат сторонніх факторів; простоті і доступності у використанні; однозначності системи обробки та інтерпретації одержаних кількісних показників; репрезентативності завдань [1]. Недоліки полягають у тому, що в результаті своєї роботи студент представляє лише номери відповіді, тут викладач не бачить хід розв'язання — розумова діяльність студента і результат може бути лише імовірнісною. Гарантії наявності в студента знань немає. До недоліків тестів також відносять можливість вгадування. Якщо, наприклад, тестове завдання містить лише дві відповіді, одна з яких правильна, то половину відповідей на такі тестові завдання можна вгадати.

Тестові завдання розрізняють по типах (відкриті, закриті), формах (доповнення, вільного викладу, альтернативних відповідей, множинного вибору, відновлення відповідності, відновлення послідовності) і видах (вербальні (питання, твердження і завдання, висловлення), стандартизовані, індивідуально-орієнтовані, невербальні (картинки, слайди, схеми (без словесного опису)), статичні, динамічні, фіксовані, змінні, випадкові, із зворотним зв'язком (вміст і форма поточного тестового завдання залежать від відповідей студента на попереднє запитання).

Тестове завдання направлене на перевірку певного елементу вмісту і повинне відповідати ряду вимог [2]. Структура тестового завдання наступна: стандартна інструкція по виконанню завдання; основний вміст завдання, де формулюється проблема, питання, завдання, які повинен розв'язати студент; «еталонна» відповідь і правила для оцінки його виконання.

Завдання закритого типу з вибором правильних відповідей передбачають вибір правильної відповіді із запропонованих варіантів. Завдання такої форми складається з інструкції, основної частини і варіантів відповідей. Інструкція для такої форми завдань рекомендує, що повинен зробити студент для правильного виконання завдання. Наприклад, ОБВЕДІТЬ НОМЕР (БУКВУ) ПРАВИЛЬНОЇ ВІДПОВІДІ.

Основний текст завдання формулюється у вигляді твердження, інколи у формі запитання, може включати графік, малюнок, формули, діаграми і ін. Далі слідують варіанти відповідей, де правильним є найчастіше лише один. Останні варіанти відповідей, неправильні, але правдоподібні, тобто схожі на правильних, називаються **дистракторами** (від англ. Distract – відволікати). Найбільшу небезпеку представляють неправильні відповіді, які вводять в оману кращих студентів. Саме звідси з'являються невалідні завдання, в яких слабкі відповідають вірно, а сильні помиляються. Оптимальною кількістю альтернативних відповідей є 4-5. Якщо дистракторів менше (відповідно менше варіантів відповідей), то збільшується ймовірність вгадування. Збільшення варіантів відповідей може привести до створення некоректного завдання. Як правило, важко знайти більше 4-5 цікавих, оригінальних альтернативних варіантів, а також правдоподібних дистракторів, які будуть однаково привабливі для вибору. Збільшення числа відповідей веде також до перевантаженості тестових завдань і всього тесту, відповідно студентам буде потрібно набагато більше часу для його виконання. Оскільки час виконання строго фіксується, то доведеться скоротити кількість завдань і відповідно зменшиться об'єм контрольованого матеріалу.

Вимоги до завдань з вибором відповідей

1) Інструкція, основний текст завдання і варіанти відповідей мають бути добре зрозумілими студентам.

2) Текст завдання повинен формулюватися чітко, по можливості коротко, а також бути вільним від двозначності.

3) У основний текст завдання включається максимальна кількість інформації, що відноситься до проблеми. У варіантах відповідей не використовуються слова, що повторюються, і вирази, вони поміщаються в основний текст завдання.

4) Основний текст завдання і відповіді формулюються з дотриманням правил граматики і повинні поєднуватися між собою граматично.

5) У тексті завдання виключається подвійне заперечення.

6) Серед варіантів відповіді повинна існувати лише одна правильна або найбільш правильна відповідь.

7) Варіанти відповідей мають бути короткими, мати приблизно однакову довжину.

8) У відповідях не рекомендується вживати слова «все», «жодного», «ніколи», «завжди» і вирази «всі перераховані», «жоден з перерахованих», оскільки вони можуть сприяти вгадуванню правильної відповіді.

9) Дистрактори мають бути однаково привабливі для студентів, які не знають правильної відповіді. Дистрактори одного завдання мають бути пов'язані з вмістом тестованого розділу.

10) Тестове завдання складається так, щоб ні його основний текст, ні варіанти відповідей не були ключем для інших завдань.

11) При складанні групи завдань, що відносяться до одного тексту, графіка, схеми, необхідно забезпечити незалежність завдань один від одного, аби правильність виконання одного завдання не залежала від правильності виконання іншого.

12) Не рекомендується включати завдання, виконання яких ґрунтується на суб'єктивній думці студента.

Різновидом завдань закритого типу вважаються **завдання альтернативних відповідей** (завдання з двома відповідями). У такому завданні лише два варіанти відповідей (так – ні, правильно – неправильно). При складанні такого завдання формулювати основний текст треба так, щоб не виникало можливості двозначної відповіді (і «так», і «ні»). Наприклад:

1. **Чи є многочлен** $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$ **елементарним симетричним многочленом?** а) так; б) ні.

У деяких випадках в закритих завданнях передбачається **не одна, а декілька правильних відповідей**. Такі завдання ставлять перед студентом складніше завдання, ніж традиційні завдання закритого типу. Студент повинен не лише вибрати правильну відповідь, але і самостійно визначити кількість правильних відповідей. Зазвичай ці завдання рекомендується використовувати в поточному контролі для перевірки класифікаційних і фактичних знань, але не виключено використання подібних завдань у підсумковому контролі [2]. Включення завдань з вибором декількох правильних відповідей супроводжується спеціальною інструкцією (наприклад, ОБВЕДІТЬ НОМЕРИ ВСІХ ПРАВИЛЬНИХ ВІДПОВІДЕЙ). При цьому необхідно заздалегідь розробити систему оцінювання завдання. Завдання з вибором відповідей мають як переваги, так і недоліки. Безперечною перевагою таких завдань є: чіткість оцінювання відповідей, можливість комп'ютерної перевірки без залучення експертів, невелика кількість часу на виконання завдання. Недоліки: присутній ефект вгадування (але можливі шляхи запобігання, по-перше, подовження тесту, по-друге, використання корекції на здогадку, при порушенні умов проведення тестування можливе списування. Не бажано використовувати ці форми завдань в поточному контролі. Найголовніший недолік завдань з вибором відповідей – неможливість з їх допомогою оцінити сферу творчих здібностей студентів. Подібні завдання в основному використовуються для перевірки знань фактичного матеріалу і репродуктивного рівня умінь.

2. Оберіть серед вказаних многочленів симетричні:

а) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$**;**

б) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$;

в) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$**;**

г) $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 3x_1x_2x_3$.

Завдання на встановлення відповідності – це такі завдання, коли студент повинен визначити відповідності між елементами. Завдання на встановлення відповідності використовуються для перевірки класифікаційних, систематичних і фактичних знань, тобто розуміння зв'язків між різними предметами, явищами, законами, формулами, класами і ін. Інструкція до таких завдань має вигляд: ВСТАНОВІТЬ ВІДПОВІДНІСТЬ. Далі пропонується два списки елементів. Зліва – елементи, які задають постановку проблеми, кодуються за допомогою цифр, справа – елементи, які треба вибрати за принципом відповідності, кодуються буквами українського алфавіту.

Відповідь студентом вписується в рядок відповідей, який має вигляд

Відповіді: 1____, 2____, 3____, 4_____

Завдання буде складнішим, якщо другу колонку зробити довшою, оскільки знижується відсоток вгадування.

3. Встановіть відповідність між симетричними многочленами і їх записом через елементарні симетричні многочлени [1]:

1) $x^3 + y^3$	**а)** $\sigma_1^4 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2\sigma_2$
2) $(x+y)(x+z)(y+z)$	**б)** $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$
3) $x^4 + y^4$	**в)** $\sigma_1^{\,3} - 3\sigma_1\sigma_2$
4) $x^3y + x^3z + y^3x + y^3z + z^3x + z^3y$	**г)** $\sigma_1^{\,2}\sigma_2 - 2\sigma_2^{\,2} - \sigma_1\sigma_3$

Вимоги до завдань на встановлення відповідностей:

1) Елементи двох колонок мають бути вибрані на одній основі для включення однорідного матеріалу в кожне завдання тесту;

2) Рекомендується поміщати в текст завдання назви кожного стовпця (узагальнене визначення колонок);

3) Бажано, аби правий список містив декілька дистракторів, які мають бути рівномірно правдоподібні.

4) Якщо завдання не передбачає чіткої відповідності, тобто одному елементу лівого списку відповідає лише один елемент правого списку, то в інструкції до завдання обов'язково вказується про наявність дистракторів і про те, скільки разів можуть використовуватися елементи другого списку.

5) У зв'язку з особливістю сприйняття число елементів одного списку не повинне перевищувати 10.

6) Усі завдання необхідно розташовувати на одній сторінці, не допускаючи перенесення окремих елементів.

Тестові завдання **на встановлення правильної послідовності** призначені для перевірки знань послідовності певних дій, процесів, алгоритмів виконання, послідовності подій в часі і ін. Завдання передбачає, що студент повинен встановити правильний порядок запропонованих елементів: дій, подій і ін., зв'язаних певним завданням. Порядок вказується за допомогою цифр в спеціально відведеному місці. Інструкція до завдання на встановлення правильної послідовності має наступний вигляд: ВСТАНОВІТЬ ПРАВИЛЬНУ ПОСЛІДОВНІСТЬ.

Відмінною особливістю завдань відкритого типу є те, що в процесі їх виконання студент сам записує правильну відповідь (слово, вираз, число, формулу і так далі). Розрізняють дві форми завдань відкритого типу: завдання на доповнення і завдання з вільно конструйованими відповідями (завдання з вільною розгорнутою відповіддю).

Завдання на доповнення передбачають, що відповідь формулюється самим студентом: це може бути формула, числовий вираз, слово і ін. Завдання на доповнення передбачає коротку відповідь. Завдання на доповнення супроводжується інструкцією: ДОПОВНІТЬ. Далі слідує основна частина завдання, де формулюється проблема і робиться пропуск на місці елементу, знання якого перевіряється.

Завдання з вільними розгорнутими відповідями передбачають представлення відповіді в розгорнутому вигляді, тобто повного розв’язання задачі з поясненнями. Студент викладає відповідь у вільній формі.

Завдання з вільною розгорнутою відповіддю схожі на традиційні письмові контрольні завдання. Вони дозволяють перевірити і оцінити різні рівні пізнавальної діяльності студентів. Тут перевіряється не лише знання фактичного матеріалу, але і уміння виражати свої думки, логічність, оригінальність вираження (гуманітарна сфера), перевіряються способи розв'язання навчальних завдань, процес виконання. Цілісність тесту утворює взаємозв'язок відповідей студентів на завдання тесту, наявність загального вимірюваного чинника, що впливає на якість знань. Рівень і структура знань виявляються при аналізі відповідей кожного студента на всі завдання тесту. Чим більше правильних відповідей, тим вище індивідуальний тестовий бал студента. Один і той же рівень знань може бути отриманий за рахунок відповідей на різні завдання. Ці бали швидше за все отримані за рахунок правильних відповідей на перших десять, порівняно легких завдань. Якщо ж виявляється протилежна картина, коли студент правильно відповідає на важкі завдання і неправильно – на легкі, то це протирічить логіці тесту і тому такий профіль знань можна назвати інвертованим. Він зустрічається рідко, і найчастіше, унаслідок помилковості тесту, в якому завдання розташовані з порушеннями вимоги зростаючої складності. За умови, що тест зроблений правильно, кожен профіль свідчить про структуру знань. Цю структуру можна назвати елементарною (оскільки є ще факторні структури, які виявляються за допомогою методів факторного аналізу).

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Ізюмченко Л.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. Многочлени: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2009. – 50 с.

2. Майоров А.Н. Теория и практика создания тестов для системы образования.–Москва: Интеллект-центр, 2002. – 300 с.

Марина КАНДИБА

ІСТОРІЯ КИЇВСЬКОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – доктор техн. наук, канд. фіз.-мат. наук, професор З.Ю.Філер

Одним із принципів освіти є історизм, зокрема у навчанні математики. За його допомогою досягаються: підвищення інтересу учнів до математики, розширення розумового кругозору, підвищення загальної культури, гуманізація навчання (ідеї через долі їх творців), патріотичне та інтернаціональне виховання. Майбутній учитель повинен оволодіти періодизацією розвитку математики, знати найбільш видатних діячів у галузі математики у світі й рідній країні, мати навички систематичної роботи з історико-математичною літературою [1].

Кінець XV ст. вважається початком відродження духовного і наукового життя України. Це, перш за все, позначилося в появі цілого ряду переведених творів науково природничого, богословського і морально-етичного жанрів.

Юрій Михайлович Котермак – учений, освітній діяч, поет, перший український автор наукової книги, ректор Болонського університету, в історію якого він увійшов під ім'ям «Джорджо та Леополі», - Юрія з Львова, відомий нам під ім'ям Юрія з Дрогобича. **Юрій Дрогобич** представляв Україну у західноєвропейських вчених кругах як учений-енциклопедист, освітній і культурний діяч, фахівець у галузі астрономії, математики, доктор медицини, поет, ректор університету Болоньї, представник раннього гуманізму. Наукові твори Юрія Дрогобича були відомі в Італії, Франції, Угорщині, Германії.

Історія Київської математичної школи представлена такими яскравими представниками як Київський університет, Київський політехнічний інститут, Київське фізико-математичне товариство, Інститут математики НАН.

Розвиток математики в найбільшому українському університеті — Київському — до цих пір недостатньо вивчений. У літературі є короткі, іноді не цілком точні, відомості про окремих київських математиків, про історію будівництва споруди університету, але не оцінений на належному рівні внесок в розвиток математики України.

Викладання математики і дослідження по математиці в **Київському університеті** мають багату історію. Роботи професорів, викладачів і вихованців Київського університету залишили глибокий слід в історії вітчизняної математики.

Історію розвитку університету умовно можна поділити на чотири періоди, які мають спільні риси, але кожний з них мав свої особливості. Перший період — історія заснування і розвиток з 1834-1861 рр., другий — 1862-1895 рр., третій — розвиток у XX ст. І останній — розвиток на сучасному етапі.

Університет був заснований указом Миколи І 8 листопада 1833 як Київський Імператорський університет імені святого Володимира, на базі, закритих після Польского повстання 1830—1831 років, Віленського університету, і Кременецького ліцею. Це був другий університет на території Малоросії після Харьківського Імператорського, відкритого в 1804 році (і шостий університет Російської імперії). Успішному розвитку математичної думки на Україні в значній мірі сприяла науково-педагогічна діяльність російських математиків в університетах України. Так з вихованців-математиків і механіків Московського університету в Київському університеті працювали І. І. Рахманінов, П. М. Покровський, астроном М. Ф. Хандріков, з Петербургу прибули А. Н. Тихомандрицький, Г. К. Суслов, Д. О. Граве. У свою чергу математики — вихованці Київського університету працювали у вищих школах Москви, Петербургу, Казані і інших міст, а по книгах М. Г. Ващенко-Захарченко, В. П. Єрмакова, Б. Я. Букрєєва і інших вихованців Київського університету навчалися студенти багатьох російських університетів.

Яскравим моментом у розвитку і становленні математики в Київському університеті є виникнення відомої **Київської математичної школи**. Витоки діяльності цієї школи можна угледіти ще в початку 90-х рр. XIX ст.; але особливо важливу роль зіграв тут прихід в 1902 р. в Київський університет Д. О. Граве, який блискуче використовував традиції, що вже склалися на фізико-математичному факультеті, і прагнення молоді до знань.

Граве Дмитро Олександрович (25.8.1863 р.-19.12.1939 р., математик, фундатор вітчизняної алгебраїчної школи, академік Академії наук УРСР (1919), почесний член АН СРСР (1929)). Закінчив Санкт-Петербурзький університет (1885). Викладав вищу математику в Інституті інженерів шляхів сполучення та на Вищих жіночих курсах. У 1896 р. захистив дисертацію на ступінь доктора математики "Про основні завдання математичної теорії побудови географічних карт". Працював професором Харківського (1897), а потім Київського (1899) університетів. У 1934–1939 очолював Інститут математики АН УРСР. Створив у Києві наукову алгебраїчну школу. Розв'язав проблему знаходження всіх незалежних від закону дії сил інтегралів системи диференціальних рівнянь для задачі трьох тіл, а також основної задачі картографічної проекції, знайшов деякі класи рівнянь 5-го ст., що розв'язуються в радикалах. Працював також у галузі прикладної математики та механіки. Його учнями були Б. Делоне, М. Чеботарьов, О. Шмідт та ін. Основні праці: «Трактат з алгебраїчного аналізу» (т. 1–2, 1938), «Вибрані праці» (опубл. 1968) та ін. Граве поставив перед своїми учнями нові, серйозніші завдання. Створення цієї школи і є чи не найголовніший результат діяльності університету. Розквіт Київської школи алгебри і теорії чисел припадає на 1910—1917 рр.

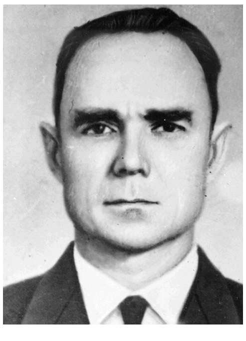
Висока наукова культура була характерна для учасників Київської школи. Тільки завдяки цьому вони змогли отримати результати першорядної ваги. Так, учень Граве і Єрмакова В. П. Вельмін узагальнив дослідження учнів Гільберта по теорії обчислень восьмого степеня в полях алгебри і досяг подальшого успіху у вивченні квадратичного закону взаємності в довільній квадратичній області. Студент Є. І. Жилінський дав вельми важливу теорему, що відноситься до теорії поля чисел алгебри і ряд інших. О. Ю.

Шмідт дав оригінальне і простіше доведення теореми Ремаку, написав книгу «Абстрактна теорія груп», де вперше в математичній літературі був даний виклад теорії груп без умови їх скінченності і отримав ряд нових результатів. Б. Н. Делоне дав нове доведення теореми Фробеніуса, нове доведення знаменитої теореми Кронекера про абелеві рівняння, отримав перші глибокі результати в теорії невизначених рівнянь третього степеня з двома невідомими. Чеботарьов знайшов арифметичну теорему монодромії, дав доведення теореми Дедекінда - Фробеніуса і отримав інші результати.

Київська школа в своєму розвитку продовжувала традиції знаменитої Петербурзької школи. Її вихованці вже за радянських часів внесли дуже великий внесок до подальшого розвитку математичної науки, а найвидатніші її учні — О. Ю. Шмідт, Б. Н. Делоне і Н. Г. Чеботарьов (навчався в Єлисаветградській гімназії) стали академіками, засновниками нових шкіл алгебри в найбільших наукових центрах України і Росії.

Велика роль у розвитку науки та популяризації математичних знань в нашій країні належала математичним товариствам. Найстаріше з них в Російській імперії — Моськовське — почало свою діяльність в 1866 р. Наступним було засновано Харківське математичне товариство (1879 р.), а у 1889 р.— **Київське фізико-математичне товариство**. Згодом з'явились такі ж товариства у Петербурзі, Казані й інших університетських містах.

До організації фізико-математичного товариства київські математики входили до складу товариства природознавців, відіграючи видатну роль в його діяльності. У 1889 р. М. П. Авенаріус, Б. Я. Букрєєв, М. Е. Ващенко-Захарченко, В. П. Єрмаков, І. І. Рахманінов, П. Е. Ромер, Г. К. Суслов, М. Ф. Хандріков, Н. Н. Шиллер, Е. К. Шпачинський організували в Києві фізико-математичне товариство. Членами товариства були учені, викладачі університету і реальних училищ, магістранти і студенти. До 1904 рр. головою товариства був Н. Н. Шиллер, потім Г. К. Суслов. На засіданнях обговорювалися наукові теми як загального, так і спеціального характеру. Розглядалися також і методичні питання. За 28 років існування Київське фізико-математичне суспільство налічувало в своєму складі більш ніж 350 членів. На його 462 засіданнях обговорювалася безліч наукових питань з математики, фізики, механіки і суміжних дисциплін. Значне місце в програмі товариства займали алгебра і теорія чисел, яким присвячувалася велика частина повідомлень і доповідей. На засіданнях товариства з доповідями виступали також М. Я. Сонін, М. Є. Жуковський, А. Г. Столєтов і інші учені. У товаристві дуже серйозна увага приділялася викладанню елементарної математики і це сприяло зародженню і зміцненню відомої київської школи методики математики, до якої належали члени суспільства: У. П. Єрмаков, П. А. Долгущин, Н. У. Оглоблін, К. М. Щербина, М. А. Астряб, До. Ф. Лебедінцев, М. Г. Попруженко та інші. На засіданнях товариства неодноразово піднімалося питання про введення в курс середньої школи так званих елементів вищої математики, наприклад функціональній залежності у зв'язку з ученням про нескінченно малі, і поняттям про координати. Товариство організовувало читання популярних курсів публічних лекцій. Іноді читалися цикли лекцій, об'єднаних загальною великою темою. Члени товариства активно брали участь в з'їздах російських природодослідників і лікарів, а також у міжнародних з'їздах і конгресах (Граве, Суслов, Покровський, Пфейффер, Воронець, Белянкін і ін.). Діяльність товариства сприяла зародженню та зміцненню широко відомої Київської математичної школи. З різних причин і довгий час київська математична спільнота не мала власного математичного осередку. Київське математичне товариство було знову формально організовано лише у 1987 році (насправді підпорядковувалось бюро відділення математики АН УРСР). Першим президентом був академік Корнєйчук Микола Павлович, ученим секретарем — професор Кратко Мирослав Львович. З 1993 р. президентом був професор Горбачук Мирослав Львович, віце-президентом — професор Ядренко Михайло Йосипович, ученим секретарем — професор Турбін Анатолій Федорович (пізніше — професор Левіщенко Сергій Сергійович). Київське математичне товариство перестало фактично існувати ще до початку 21 століття. Ідея про поновлення роботи в осередку київських математиків та математиків з Києва виникла на початку 2006 року. Була проведена велика організаційна робота (створення веб сторінок, інформаційні повідомлення, семінари, колоквіуми, математичні та організаційні засідання), і 24 березня 2008 року була зареєстрована нова Громадська організація "Київське математичне товариство". Ніякої фінансової діяльності протягом підготовки та утворення Громадської організації не проводилось. На даний час ГО "Київське математичне товариство" не має власних банківських реквізитів теж [2].



Корнєйчук Микола Павлович (учений-математик, академік НАН України (1997), лауреат Державної премії СРСР (1973), Державної премії України (1994), Заслужений діяч науки і техніки України (2000)) народився 22 січня 1920 року в селянській сім’ї в с. Бобрик Петриківського району Гомельської області (Білорусь). У 1938 р. закінчив Гомельський індустріально-педагогічний технікум і працював вчителем математики в м. Турів Гомельської області. В 1940–1949 рр.

Корнєйчук М.П. служив у лавах Радянської Армії, воював на фронтах Великої Вітчизняної війни, був двічі поранений. У 1955 р. з відзнакою закінчив (заочно) фізико-математичний факультет Дніпропетровського університету, де працював до 1974 року спочатку асистентом, заступником декана, а з 1963 року – зав. кафедрою. З 1974 року і до кінця свого життя працював зав. відділом теорії наближення ІМ НАНУ. На всіх вищезгаданих посадах розкрився його талант видатного вченого-математика. Корнєйчук М.П. автор понад 140 наукових праць, в т.ч. 10 монографій, більшість яких були опубліковані англійською, іспанською та китайською мовами. Монографія „Точные константы в теории аппроксимации" в 1991 році як особливо актуальна була опублікована видавництвом Кембриджського університету (США). Корнєйчук М.П. підготував понад 40 докторів і кандидатів наук, створив активну школу з розв'язання екстремальних задач теорії функцій. Його наукові праці стосуються екстремальних задач теорії наближення, проблем оптимізації і сплайн-аппроксимації. Він був головою Спеціалізованої ради по захисту докторських дисертацій, заступником головного редактора „Українського математичного журналу".

Інститут математики (ІМ) НАН України створений у 1934 році на базі комісій прикладної математики, чистої математики, математичної статистики та кафедри математичної фізики, що входили до фізико-математичного відділу Всеукраїнської академії наук. Першим директором Інституту був математик-алгебраїст зі світовим ім'ям, академік Дмитро Олександрович Граве, потім М. О. Лаврентьєв (1939 - 1941 рр.) та Г. В. Пфейффер (1941 - 1944 рр.). У 1945 році Інститут математики знову очолив М. О. Лаврентьєв, пізніше — О. Ю. Ішлінський (1948 - 1955 рр.) та Б. В. Гнєденко (1955 - 1958 рр.), в 1958 — 1988 роках директором Інституту математики був Ю. О. Митропольський, а з 1988 року інститут очолює А. М. Самойленко.

Митропольський Юрій Олексійович — вчений у галузі математичної фізики, теорії нелінійних коливань і нелінійних диференціальних рівнянь. Академік НАНУ (1961), заслужений діяч науки УРСР

(1967), лауреат Державної премії України в галузі науки й техніки (1996), Герой України (2007) народився 3.01.1917, в с. Чернишівка Шишацького р-ну Полтавської обл. У 1938 р. вступив до Київського державного університету ім. Т. Г. Шевченка. Від 1943 р. і до Перемоги воював на фронті; був командиром загону артилерійської розвідки. Після демобілізації він працює науковим співробітником Інституту будівельної механіки АН УРСР (тепер Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України) під керівництвом академіка М. М. Боголюбова. З 1950 р. працює в ІМ НАНУ, з яким пов'язана вся його подальша наукова діяльність. Упродовж 1953–2001 рр. Юрій Олексійович керував відділом математичної фізики і теорії нелінійних коливань, протягом 1958–1987 рр. був директором інституту. Очолював Міжнародний математичний центр НАН України, був почесним директором Інституту, головним редактором журналу "Нелінійні коливання" та "Українського математичного журналу", членом редколегії "Журнала математической физики, анализа, геометрии". Понад 30 років учений був академіком-секретарем Відділення математики НАН України.

За 60-річну наукову діяльність Юрій Олексійович отримав фундаментальні результати в галузі асимптотичних методів нелінійної механіки, якісних методів теорії диференціальних рівнянь, у дослідженні динаміки коливних процесів у нелінійних системах. Він створив алгоритм побудови асимптотичного розкладання нелінійних диференціальних рівнянь, що описують нестаціонарні коливальні процеси, розробив метод вивчення одночастотних процесів у коливальних системах з багатьма степенями свободи. Учений досліджував системи нелінійних диференціальних рівнянь, що описують коливальні процеси у гіроскопічних та сильно нелінійних системах, розвинув теорію інтегральних многовидів і метод усереднення. Ю. О. Митропольський створив науковий колектив, який примножує традиції школи нелінійної механіки академіків М. М. Крилова та М. М. Боголюбова.

Наукову роботу вчений успішно поєднував з педагогічною. Майже 40 років Юрій Олексійович читав

лекції на механіко-математичному факультеті рідного університету. Він є автором понад 750 наукових праць. Серед його учнів — 25 докторів і 100 кандидатів фізико-математичних наук.

Анатолій Михайлович Самойленко — засновник наукової школи з теорії багаточастотних коливань та теорії імпульсних систем, що визнана математичними центрами світу, академік Національної академії наук України (1995), заслужений діяч науки і техніки України (1998), двічі лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки (1985, 1996). Він народився 2 січня 1938 року в с. Потіївка Радомишльського району Житомирської області. В 1960 році закінчив механіко-математичний факультет Київського держуніверситету ім. Т. Г. Шевченка за спеціальністю "математика", а в 1963 — аспірантуру

Інституту математики АН УРСР. Наукова та науково-педагогічна діяльність Анатолія Михайловича проходила в ІМ НАНУ та Київському національному університеті імені Тараса Шевченка. З 1988 року А. М. Самойленко є директором академічного інституту, з 2006 року — академіком-секретарем Відділення математики НАН України. В 1978 р. його було обрано членом-кореспондентом, а в 1995 р. — дійсним членом НАНУ. З 2002 р. є дійсним членом Європейської АН. А. М. Самойленко — автор біля 400 наукових праць, серед яких 30 монографій та 15 навчальних посібників. Більшість його робіт переведено за кордоном. Міжнародне визнання його досліджень підтверджують загальновизнані в світовій математичній літературі терміни: "чисельно-аналітичний метод Самойленка", "функція Гріна — Самойленка" та інші. Серед його учнів — 20 докторів та 72 кандидатів фізико-математичних наук, які успішно працюють у багатьох математичних центрах ряду країн. Він є членом Українського та Американського математичних товариств, членом редакційних колегій українських та зарубіжних журналів [4].

Наукова діяльність Інституту зосереджена на подальшому розвитку математичних наук за такими напрямами: теорія нелінійних коливань, математична фізика, теорія звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, теорія нелінійних рівнянь та теорія динамічних систем, теорія ймовірностей та математична статистика, теорія функцій, комплексний аналіз, розробка методів функціонального та нелінійного аналізу, дослідження алгебраїчних та топологічних структур, аналітична механіка та динаміка спеціальних механічних систем, розробка чисельних методів дослідження механічних і фізичних проблем. Наукові здобутки вчених Інституту широковідомі в світі. Про їх визнання свідчать хоча б такі загальновживані математичні терміни, як «порядок Шарковського», «функція Гріна-Самойленка», «топологія Скорохода». З 13 відомих математичних шкіл, які працюють в Україні, в Інституті математики розвиваються і працюють 9. Як провідна установа України з найважливіших досліджень у галузі математичних наук Інститут здійснює роботу з координації наукових досліджень з математики в Україні. Маючи потужній науковий потенціал — близько 80 докторів та 80 кандидатів наук, активно працюючі аспірантуру та докторантуру, Інститут систематично поповнює висококваліфікованими кадрами провідні освітні та наукові заклади України [3].

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Філер З.Ю. Навчально – методичний комплекс дисципліни "історія математики"(машинопис).
2. Добровольський В. О. З історії вітчизняного природознавства.- Київ: Наукова думка, 1964. – 150 с.
3. Добровольский В.О. Дмитрий Александрович Граве.-Київ: Наукова думка 1968. – 113 с.
4. Математическая жизнь в СССР. Корнейчук Николай Павлович (к шестидесителетию со дня рождения)/ В. Л. Великий, А. А. Женсыкбаев, В. П. Моторный, С. М. Никольский и другие. // Успехи математических наук, №2(218). – С. 209-213.

Євгенія КУЛЬКОВА

ВИКОРИСТАННЯ РІЗНИХ ПІДХОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОНКУРСНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

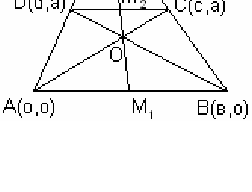
(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доцент Л.В. Ізюмченко

Навчання в старшій школі має здійснюватися на основі розширення і поглиблення знань і, головне, умінь та способів діяльності, надбаних раніше [1]. Не менш важливим, ніж вміння визначати спільне, систематизувати отримані результати, є вміння знаходити різні шляхи розв'язування однієї і тієї ж задачі. Це дає можливість поглянути на задачу з різних сторін, а також оцінити переваги та недоліки кожного методу в конкретній задачі. Різномаїття ідей та способів розв'язання сприяють підвищенню інтересу до математики і розвивають геометричну інтуїцію в учнів [2].

Розв'язуючи задачу декількома способами, ми розкриваємо можливості різних способів міркувань, що приводять до одного і того ж результату, взаємозв'язок і спільність понять. При цьому, окрім пошуку оптимального рішення, відбувається ефективний самоконтроль і перевірка [3].

Проілюструємо використання різних способів на прикладі розв'язання двох задач.



Задача №1. Показати, що пряма, яка з'єднує точку перетину діагоналей трапеції з точкою перетину бічних сторін, ділить основи трапеції навпіл.

Дано: трапецію $ABCD$, $AD \cap CB = E$, $DB \cap AC = O$, $O \in EM_1$, $AB \cap EO = M_1$.

Довести: $DM_2 = M_2C$, $AM_1 = M_1B$.

І спосіб. Скористаємося координатним методом.

Введемо систему координат і визначимо координати відповідних точок: нехай $A(0;0)$ – початок координат, а пряма $AB \in Ox$. Тоді точки матимуть такі координати: $B(b;0)$, $D(d;a)$, $C(c;a)$. Рівняння прямих:

$(AD): \frac{x}{d} = \frac{y}{a}$; $(CB): \frac{x-c}{b-c} = \frac{y-a}{-a}$; точка їхнього перетину

$$E = (AD)\cap(CB): \begin{cases} ax - dy = 0, \\ -ax + ac - yb + yc + ab - ac = 0. \end{cases}$$

Додамо рівняння почленно: $-dy + ac - by + cy + ab - ac = 0$, $y(c-b-d) = -ab$.

Тоді $x = \frac{db}{d+b-c}$. $E\left(\frac{db}{d+b-c}; \frac{ab}{d+b-c}\right)$.

$(AC): \frac{x}{c} = \frac{y}{a}$; $(BD): \frac{x-b}{b-b} = \frac{y}{a}$; $O = (AC)\cap(BD): \begin{cases} ax - cy = 0, \\ ax - ab - yd + yb = 0. \end{cases}$

Помножимо перше з рівнянь на (-1) і додамо до другого: $y(c-d+b) = ab$, $y = \frac{ba}{c-d+b}$.

Тоді $x = \frac{c}{a}y = \frac{cb}{c-d+b}$. $O\left(\frac{cb}{c-d+b}; \frac{ab}{c-d+b}\right)$.

$M_1(M_2)$ – середина $[AB]([CD])$: $M_1\left(\frac{b}{2};0\right), M_2\left(\frac{c+d}{2};a\right)$.

$$(M_1M_2): \frac{x-\frac{b}{2}}{\frac{c+d}{2}-\frac{b}{2}} = \frac{y}{a}, 2xa - ba = y(c+d-b).$$

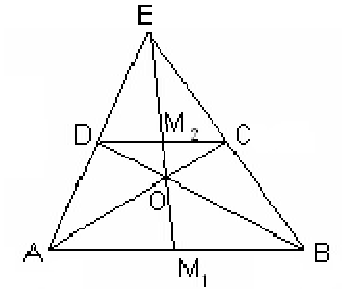
Покажемо, що E і O належать (M_1M_2): $E: 2\frac{db}{d+b-c}a - ba = \frac{ab}{d+b-c}(c+d-b)$,

$2dba - ba(d+b-c) = ab(c+d-b) \Rightarrow 2adb = 2adb$.

$O: 2\frac{cb}{c-d+b}a - ba = \frac{ab}{c-d+b}(c+d-b)$,

$2cba - ba(c-d+b) = ab(c+d-b) \Rightarrow 2bac = 2bac$. Отже E і O належать (M_1M_2) і задачу доведено.

Цю задачу зустрічаємо в шкільному підручнику Погорєлова О.В. «Геометрія 9 клас» в темі «Подібність фігур». Покажемо, як можна розв'язати цю задачу за допомогою подібності трикутників.



II спосіб. 1. Розглянемо пару трикутників: ΔAOM_1 та ΔCOM_2:

$$\left.\begin{array}{l} \angle AOM_1 = \angle COM_2 \\ \angle OAM_1 = \angle OAM_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOM_1 \sim \Delta COM_2.$$

Аналогічно $\Delta BOM_1 \sim \Delta DOM_2$. Тому

$$\frac{AM_1}{M_2C} = \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{M_1B}{DM_2} = p \to \left| \begin{array}{l} AM_1 = p \cdot M_2C \\ M_1B = p \cdot DM_2 \end{array}\right.$$

2. Розглянемо ΔEAM_1 та ΔEDM_2:

$$\left.\begin{array}{l}\angle EDM_2 = \angle EAM_1 \\ \angle EM_2D = \angle EM_1A\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta EAM_1 \sim \Delta EDM_2 .$$

Аналогічно $\Delta EBM_1 \sim \Delta ECM_2$. Тому

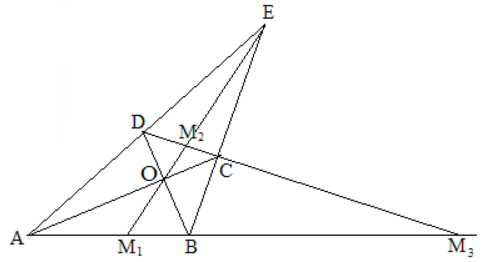
$$\frac{AM_1}{DM_2} = \frac{EM_1}{EM_2} = \frac{M_1B}{M_2C} = q \to \left| \begin{array}{l} AM_1 = q \cdot DM_2 \\ M_1B = q \cdot M_2C \end{array}\right.$$

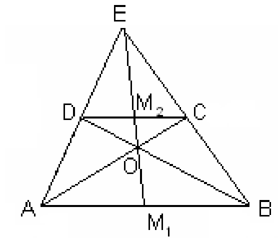
3. $AM_1 \cdot M_1B = pq \cdot M_2C^2 = pq \cdot DM_2{}^2 \Rightarrow DM_2 = M_2C$,

$$DM_2 \cdot M_2C = \frac{AM_1}{q} \cdot \frac{AM_1}{p} = \frac{M_1B}{p} \cdot \frac{M_1B}{q} \Rightarrow AM_1 = M_1B .$$

Задачу доведено.

Варто розглянути метод розв'язання цієї задачі при вивченні курсу «Проективна геометрія» в ВНЗ: розв'язання спрощується, маємо третій спосіб розв'язання цієї задачі:



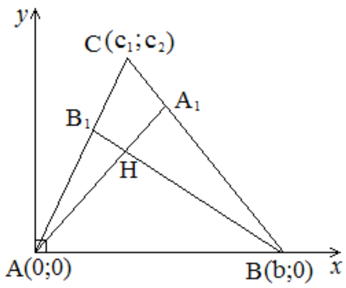


$DOCE$ – повний чотирививершинник, протилежні сторони якого (DE) і (CO); (DO) і (EC); (DC) і (OE), діагональні точки, відповідно, A, B та M_2. Нехай точки M_1 та M_3 – точки перетину діагоналі AB з сторонами чотиривершинника, що проходять через третю діагональну точку O. Тоді точки A, B, M_1, M_3 утворюють гармонійну четвірку точок і $(AB, M_1M_3) = -1$.

У нас $DC \| AB$, тому M_3 – нескінченно віддалена точка, $(AB, M_3) = -1$, а тому $(AB, M_1) = 1$, тобто точка M_1 – середина $[AB]$, аналогічно отримаємо, що і M_2 – середина $[DC]$.

Розв'язання задач елементарної геометрії у курсі вищої математики сприяє більш глибокому розумінню студентами взаємозв'язків у математиці.

Задача №2. Довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.



І спосіб (метод координат).

Виберемо початок координат у точці A, вісь Ox спрямуємо вздовж AB, тоді координати вершин трикутника: $A(0;0)$, $B(b;0)$, $b \neq 0$, $C(c_1;c_2)$, $c_2 \neq 0$. Нехай BB_1, AA_1 – висоти. Доведемо, що CH належить третій висоті.

Складемо рівняння висот (AA_1) і (BB_1) та знайдемо координати точки $H(x;y)$. Оскільки

$AH \perp CB; \overrightarrow{AH} = (x;y), \overrightarrow{BC} = (c_1 - b; c_2)$, то $\left(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = 0$, а тоді рівняння $(AA_1): (c_1 - b)x + c_2 y = 0$.

Аналогічно отримаємо рівняння (BB_1):

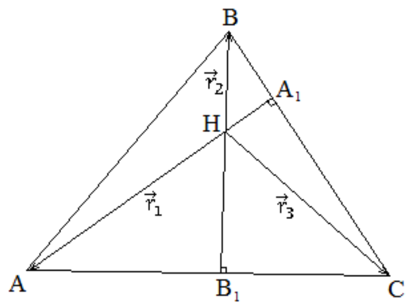
$\overrightarrow{BH} = (x - b; y), \overrightarrow{AC} = (c_1; c_2)$; $\left(\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = 0$, а тому $(BB_1): (c_1 - b)x + c_2 y = 0$.

Точка $H = (AA_1) \cap (BB_1): \begin{cases} (c_1 - b)x + c_2 y = 0, \\ c_1(x - b) + c_2 y = 0. \end{cases}$

Віднімемо від першого рівняння друге, матимемо $c_1x - bx - c_1x + bc_1 = 0 \Leftrightarrow -bx + bc_1 = 0 \Leftrightarrow -b(x - c_1) = 0$. Оскільки $b \neq 0$, отримаємо $x = c_1$. Так як абсциси точок C і H співпадають, то $(CH) \perp (OX)$, $(CH) \perp (AB)$ і CH належить висоті, яку проведено до прямої (AB), а отже точка H є точкою перетину трьох висот трикутника.

II спосіб. Використаємо елементи векторної алгебри. Такий метод дозволяє поглянути на задачу зовсім з іншої сторони.

Нехай H – точка перетину двох висот $H = (AA_1) \cap (BB_1)$.



Позначимо $\overrightarrow{HA} = \vec{r_1}$, $\overrightarrow{HB} = \vec{r_2}$, $\overrightarrow{HC} = \vec{r_3}$. Тоді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB} = \vec{r_3} - \vec{r_2}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} = \vec{r_3} - \vec{r_1}$. Оскільки (BB_1) – висота ΔABC, то $(BH) \perp (AC)$ і скалярний добуток $\left(\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = 0$; аналогічно (AA_1) – висота ΔABC, і $(AH) \perp (BC)$ та $\left(\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = 0$, маємо дві умови, що виконуються одночасно:

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = 0 \\ \left(\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{r_2} \cdot \left(\vec{r_3} - \vec{r_1}\right) = 0 \\ \vec{r_1} \cdot \left(\vec{r_3} - \vec{r_2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\vec{r_2} \cdot \vec{r_3}\right) - \left(\vec{r_2} \cdot \vec{r_1}\right) = 0 \\ \left(\vec{r_1} \cdot \vec{r_3}\right) - \left(\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\vec{r_2} \cdot \vec{r_3}\right) - \left(\vec{r_1} \cdot \vec{r_3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{r_2} - \vec{r_1}\right) \cdot \vec{r_3} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}\right) = 0,$$

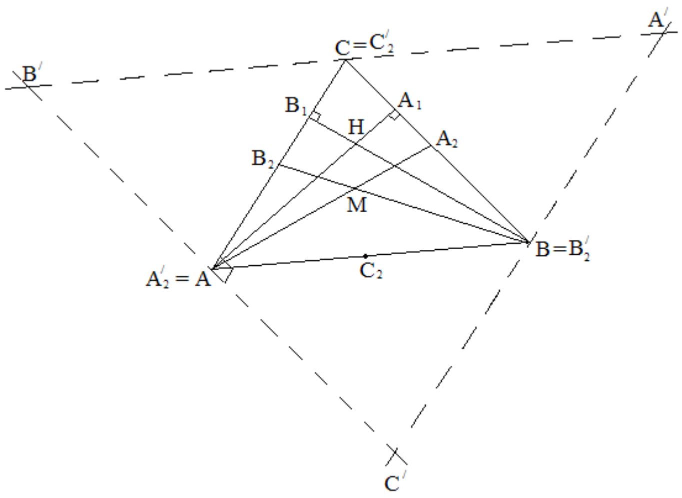
а це означає, що CH належить висоті, яку проведено до прямої (AB), а тому точка H є точкою перетину трьох висот трикутника (ортоцентром).

III спосіб. Доцільним для цієї задачі є метод перетворень.

Побудуємо точку перетину медіан в трикутнику ABC (т. M).

$AM : MA_2 = 2:1$.

Виконаємо гомотетію з центром в т. M і $k = -2$. При гомотетії пряма переходить в паралельну їй пряму.



$C_2 \in AB \| A'B', C_2' \in A'B'$.

$Hom_M^{k=-2}(ABC) = A'B'C'$.

$$\left.\begin{aligned} AA_1 \perp CB \\ CB \| C'B' \end{aligned}\right\} \Rightarrow AA_1 \perp C'B',$$

A_2 – середина відрізка CB, тому A_2' – середина відрізка $C'B'$. Оскільки $A_2' = A$, то A – середина відрізка $C'B'$. З того, що $AA_1 \perp C'B'$ і A – середина відрізка $C'B'$ випливає те, що AA_1 – серединний перпендикуляр до $C'B'$.

Аналогічно: BB_1 – серединний перпендикуляр до $A'C'$.

$AA_1 \cap BB_1 = H$, тому H – центр описаного кола навколо трикутника $A'B'C'$. З чого випливає, що H лежить також і на серединному перпендикулярі до $A'B'$. З чого слідує, що $HC \perp A'B'$ і $A'B' \| AB$, тому $HC \perp AB$.

Проілюстроване на прикладах використання кількох методів для розв’язання однієї задачі дає можливість побачити всю її багатогранність, всі наявні закономірності. Це дозволяє учням вдосконалювати свої вміння, проводити аналіз та порівняння методів, оцінювати можливості кожного з них. Ще однією невід’ємною перевагою застосування декількох методів є самоконтроль, який дає можливість учневі самостійно знаходити свої помилки та аналізувати їх.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Ізюмченко Л.В., Ріжняк Р.Я. Використання елементів системно-діяльнісного навчання у процесі інтенсивної математичної підготовки обдарованих учнів //Наукові записки. – Випуск 68. – Серія: Математичні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ м.В. Винниченка, 2009. – С. 78-85.

2. Зеленяк О.П. Решение планиметрических задач: практические советы // Математика в школах України. – 2007. – №8(164). – С. 2-11.

3. Зеленяк О. П. Решение планиметрических задач: разнообразие способов // Математика в школах України. – 2007. – №27 (183). – С. 4-12.

Віталій ЛАВРЕНЮК

ХАРКІВСЬКА ШКОЛА МАТЕМАТИКИ

(магістрант фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – доктор техн. наук, канд. фіз.-мат. наук, професор З.Ю.Філер

Місто Харків завжди розглядалося світовим математичним співтовариством як один з провідних центрів математичних досліджень Росії (до 1917 р.), Радянського Союзу (з 1917 по 1991 рр..) та незалежної України (після 1991 р.). Так, у численних документах, що опубліковані Американським математичним об’єднанням у зв'язку з організацією та розподілом грантів об’єднанням в країнах колишнього Радянського Союзу, Харків фігурує як третій за значимістю (після Москви і С.-Петербурга) центр.

Заснований на початку XIX століття, Харківський університет пройшов довгу і складну дорогу, вніс свій внесок до історії вищої освіти, науки і культури країни. З іменами його вихованців і професорів пов'язані сторінки історії вітчизняної науки і культури, становлення фундаментальних наукових ідей, шкіл і напрямів.

Університет ще з початку XIX століття вважається колискою розвитку математичної науки в Україні. Університет дав потужний імпульс перетворенню Харкова на крупний науковий і культурний центр, академічну столицю України, що по праву займає вищі щаблі всеукраїнських рейтингів серед класичних університетів і добре відомий за межами України [1].

Університет є одним з найбільших наукових центрів України. У ньому представлені практично всі напрямки сучасної фундаментальної науки. Харківський національний університет (ХНУ) ім. В.Каразіна 29 січня відсвяткував *205-річчя* з дня заснування.

Харківські математичні традиції сягають середини XIX століття, коли в 1879 р. було засновано Харківське математичне товариство – одне з найстаріших в Росії, і пов'язані з такими всесвітньо відомими іменами, як М. В. Остроградський, О. М. Ляпунов, В. А. Стєклов, С. Н. Бернштейн, Н. І. Ахієзер. Ці традиції втілилися в наш час у міжнародне визнання математичних шкіл [6].

Ми можемо зауважити, що коли говоримо про місто з певними культурними та науковими традиціями в тій чи іншій області, то, звичайно ж, розуміємо, що ці традиції не можуть виникати на порожньому місці. Як правило, вони створюються кількома видатними людьми, яскравими талантами, які збирають навколо себе учнів і послідовників. Таким чином формується те, що називається "науковими школами". І ось вони-то, школи, і визначають насправді обличчя інтелектуального центру. Харківський університет сприяв утворенню сильної харківської математичної школи.

Установча грамота і Статут Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна були затверджені 17 листопада 1804 року. Урочисте відкриття університету відбулося 29 січня 1805 року. Тоді він носив назву Харківський Імператорський університет.

Головна заслуга в заснуванні Харківського Університету належить «Українському Ломоносову» Василю Назаровичу Каразіну. У ті часи Харків був незначним містом, і лише виняткова енергія дозволила Каразіну реалізувати свою ідею. Він переконав місцевих жителів робити пожертвування, що і створило матеріальну базу університету. З відкриттям і діяльністю університету тісно і нерозривно пов'язаний розвиток математичних наук. Ця подія дала поштовх для становлення Харкова осередком тогочасної вищої освіти. На відділенні фізичних та математичних наук протягом трьох років університетського курсу студентам читали чисту математику, що включала арифметику, алгебру, геометрію і тригонометрію, аналітичну геометрію і вищу алгебру, диференціальне та інтегральне числення [5].

Першим професором чистої математики Харківського університету був Тимофій Федорович Осиповський. З березня 1800 р. він починає свою діяльність професора фізико-математичних наук у Петербурзькому педагогічному інституті. Йому "призначено було навчати по 12 годин на тиждень"; навчальних посібників не було, і Осиповський працює над своїм курсом математики, який свого часу користувався великою популярністю і витримав три видання. В кінці 1802 р. В. Н. Каразін пропонує Осиповському зайняти кафедру в Харківському університеті.

Осиповський склав у двох томах курс чистої математики. Твір цей визнано класичним. Курс математики Осиповського може бути поставлено поряд з кращими іноземними виданнями того часу.

В період Осиповського курс геометрії читався на високому рівні, його власний підручник був перекладений і введений в дії в зарубіжних країнах. Але на жаль після його звільнення останній 4-ий том його праць так і не був виданий, залишившись в рукописах.

Осиповський в деяких розділах алгебри випередив зарубіжних математиків на цілі десятиліття. Зокрема, спосіб, відомий в алгебрі під назвою «метод Горнера», був відкритий Осиповським за 17 років до Горнера. Сам Горнер повідомив про нього в 1819 р., тоді як Осиповський опублікував своє повідомлення в 1802 р.

Він гаряче підтримував молодь, намагався полегшити становище студентів. Але реакційно настроєні професори домоглися його звільнення.

Ще одним професором математики і ректором Харківського університету (1780 - 1789) був Павловський Андрій Федорович. Він здобув освіту у щойно відкритому Харківському університеті на фізико-математичному факультеті під керівництвом математика Осиповського. Павловський читав алгебру, елементарну і вищу геометрію, плоску і сферичну тригонометрію, конічні перерізи, диференціальне та інтегральне числення, теорію аналітичних функцій, спершу керуючись курсом Осиповського, а потім з власних записів. Нині при Харківському університеті існує премія імені А.Ф. Павловського.

Прекрасно читаючи лекції, Павловський з великою увагою ставився до студентів, заохочуючи їх до наукових занять. Він виявив видатний талант до математики у свого учня Михайла Остроградського і зумів зацікавити його цією наукою. І Осиповський, і Павловський брали участь у долі молодого Остроградського [2].

Михайло Васильович Остроградський був самим талановитим і відомим учнем Осиповського і Павловського. Він ніколи не викладав у Харківському університеті, а тільки вчився в ньому, навчався в основному за курсом Осиповського, про який Остроградський до кінця життя зберіг вдячні спогади.

У 1816-1820 рр. навчався в Харківському університеті, 1822-1828 рр. вдосконалював свої знання у College de France у Парижі. Працював переважно у Франції та Росії. З 1828 р. професор вищих шкіл у Петербурзі, учень Лапласа, Ампера. Член Петербурзької АН (з 1830, у віці 29 років), Паризької (з 1856 р.), Римської й Туринської Академії наук. Автор 40 праць з математичного аналізу, математичної фізики, теоретичної механіки, написаних переважно французькою мовою. Остроградський встановив формулу перетворення інтеграла по об'єму в інтеграл по поверхні, названу його ім'ям:

$$\iiint_V div\vec{F}dv = \iint_S \vec{F}ds ,$$

де $\vec{F}$ – векторне поле.

Михайло Васильович Остроградський довів цю рівність у 1831 році [4].

Новий період в математичному житті Харківського університету, що настав в 1885 р., був пов'язаний з іменами Олександра Михайловича Ляпунова (1857—1918) і Володимира Андрійовича Стєклова (1863—

1926). У 1885 р., коли Олександр Михайлович Ляпунов переїхав до Харкова з Петербурга, де незадовго перед тим захистив дисертацію на звання магістра прикладної математики, йому було всього 28 років. Перші два роки життя в Харкові О. М. Ляпунов займався головним чином підготовкою курсів механіки для студентів. Потім він приступив до так званого якісного вивчення диференціальних рівнянь, мета якого полягала в знаходженні можливо повнішої картини розташування траєкторій по вигляду рівнянь, без їх розв'язання. Роботи О. М. Ляпунова були присвячені постановці і повному розв'язанню важливої задачі про стійкість. Його докторська дисертація «Загальна задача про стійкість руху», захищена в Москві і видана в 1892 р. Харківським математичним товариством, принесла йому всесвітнє визнання. Ця праця мала величезне значення завдяки важливим додаткам розроблених в ній методів, зокрема в теорії коливань і радіотехніці. У 1902 році він був запрошений на роботу в Петербурзьку Академію наук, де присвятив себе проблемі теорії фігур, рівноваги рідини, що оберталася. За статутом академії він повинен був переїхати жити до Петербурга. До тематики харківського періоду О. М. Ляпунов більше не повертався.

Після О. М. Ляпунова кафедру прикладної математики в Харківському університеті очолив його учень В. А. Стєклов. Перші його роботи були присвячені одному новому випадку задачі про рух твердого тіла в рідині і деяким іншим задачам механіки, що допускають ефективне розв'язання. Надалі під впливом свого вчителя В. А. Стєклов займається загальними проблемами математичної фізики. Тепер його ім'я носить Математичний інститут ім. В. А. Стєклова Російської Академії наук [3].

На зміну Ляпунову та Стєклову в Харківський університет прийшов Сергій Натанович Бернштейн (1880-1968). Математик, проф. Харківського ун-ту, член-кореспондент Всесоюзної академії наук, дійсний член Української Акад. наук. У 1907-33 рр. він викладав у Харківському університеті.

Основні роботи відносяться до теорії диференціальних рівнянь, теорії функцій і теорії ймовірностей. Він знайшов умови аналітичності розв'язків рівнянь 2-го порядку еліптичного і параболічного типів, ним розроблені нові методи розв'язання граничних задач для нелінійних рівнянь еліптичного типу. Продовжуючи і розвиваючи ідеї Чебишова про наближення функцій многочленами, Бернштейн і його учні створили нову галузь теорії функцій — конструктивну теорію функцій. У теорії ймовірностей Бернштейн розробив першу (1917) аксіоматику, продовжив і в деякому відношенні завершив дослідження петербурзької школи Чебишова — Маркова по граничних теоремах, розробив теорію слабозалежних величин, досліджував стохастичні диференційні рівняння і вказав на ряд застосувань ймовірнісних методів у фізиці, статистиці і біології [3].

Професор кадедри математики КДПУ Юрій Іванович Волков розвинув пошуки С.Н. Бернштейна в теорії наближень функцій.

Наум Ілліч Ахієзер (1901-1980) – український математик, Доктор фізико-математичних наук (1936), професор (1941), член-кореспондент АН УРСР (1934).

Н. І. Ахієзеру належать видатні заслуги у створенні харківської математичної школи. Він був блискучим математиком, фахівцем в галузі конструктивної теорії функцій; його успіхи були відзначені званням члена-кореспондента АН УРСР і премією імені Чебишова АН СРСР, Н.І. володів широким кругозором, не втомлювався формувати математичні колективи в ХПІ і у Харківському університеті. Більше того, він далекоглядно робив новаторські кроки по вихованню нового покоління математиків (організація знаменитої 27-ої математичної школи, Заочної юнацької математичної школи при ХДУ).

Протягом 25 років Ахієзер був головою Харківського математичного товариства і редагував його журнал, керував різними математичними семінарами, які залучали талановиту молодь і вчених. Талант педагога і лекторська майстерність принесли йому визнання в харківських вузах.

З 1956 року і до кінця життя Наум Ілліч працював у Харківському державному університеті. Ахієзер підготував і опублікував понад 150 наукових праць, в тому числі 10 монографій, 9 з яких перекладено і видано в багатьох країнах світу.

У вересні 2001 року в Харківському національному університеті ім.В.Н.Каразіна і Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.І. Вєркіна відбулася міжнародна наукова конференція, присвячена 100-річчю від дня народження цього видатного математика під назвою "Теорія функцій і математична фізика " [3].

Віктор Павлович Петренко (1936-1936) – професор, доктор фізико - математичних наук, аналітик, невтомний пошуковець у галузі математичного аналізу. Петренко народився в місті Помічній. Після закінчення школи з золотою медаллю пішов на навчання до Кіровоградського державного педагогічного інституту (КДПУ) ім. О.С.Пушкіна (нині Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка). Університет він закінчив з відзнакою.

В.П.Петренко є важливою постаттю в історії Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка. Він став другим випускником цього вузу, який отримав згодом учений ступінь доктора фізико - математичних наук. Першим був Л.О. Дундученко, випускник КДПІ 1951 р.

В університеті В.П. Петренко вів велику наукову роботу. Багато його учнів захистили кандидатські дисертації. Його учнями були кандидати фізико - математичних наук М.А. Гірник, Т.Б. Лимзіна, В.І. Крутінь та інші. Також у В.П. Петренка були аспіранти з Кореї, Пакистану, багатьох республік колишнього Радянського Союзу.

З 1974 по 1983 роки Віктор Павлович був *завідуючим кафедрою математичного аналізу* Харківського університету.

Він є автором понад 500 наукових праць, серед них такі, як: "Рост мероморфных функций" (1978 р.), "Целые кривые" та інші, в яких автор розглядає основні елементи теорії росту мероморфних функцій, зв'язок між теорією росту, і класичною теорією розподілу значень. Талановитий аналітик і невтомний пошуковець в галузі математичного аналізу присвятив усе своє наукове життя теорії мероморфних функцій. Праці В. П. Петренка є значним внеском у теорію аналітичних функцій, визнані не лише в нас, а й за кордоном (США, Німеччина, Індія, Фінляндія).

Одним з випускників ХНУ (1957 р.) був професор кафедри прикладної математики статистики та економіки КДПУ Філер Залмен Юхимович.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Харьков-история-Университета им. В. Н. Каразина <http://tvoj.kharkov.ua/history/hst.php?r=11>
2. Рыбалка И.К., Черняков М. В. Харьковский государственный университет 1805-1980: Исторический очерк .-Харьков: Вища школа,1980. – 159 с.
3. Бородин А.И. Выдающиеся математики. Биогр. словарь - справочник. – К: Рад. шк.,1987. – 653 с.
4. М.В.Остроградський до 200 річчя з дня народження. Ред.: А.Самойленка., 2001. – 127 с.
5. Історія Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна <http://www.univer.kharkov.ua/ua/general/history>
6. Страницы истории Харькоского государственного университета <http://www.univer.omsk.su/omsk/Sci/HkGS/hkgs1.htm>

Яна ОМЕЛЬЧУК

ВЕКТОРНІ МІРИ

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – канд. фіз. мат. наук, доцент В.О. Романов

Стаття присвячена неперервним векторним мірам, їх застосуванням до квазіінваріантних, диференційовних та аналітичних мір, до згорткових операторів та до диференціальних рівнянь.

Актуальність обраної теми полягає в тому, що дослідження властивостей векторних мір важливі не тільки для виявлення структурно-логічних зв'язків усередині теорії диференційованості, але і для застосувань в задачах нескінченного аналізу, теорії наближень і в диференціальних рівняннях. Викладений матеріал може бути використаний як основа для спецкурсів (розрахованих на магістрантів та студентів старших курсів).

Основна проблема полягає в деталізації викладу теми, написанні роботи зрозумілою та доступною мовою для магістрантів, студентів старших курсів та викладачів, які цікавляться теорією міри та функціональним аналізом.

Робота корисна магістрантам, студентам старших курсів та викладачам, які цікавляться теорією міри та функціональним аналізом.

Огляд досліджень векторних диференційованих мір

У 1971 році в теоремі 1.1.1 роботи [1] С.В. Фоміна, О.Г. Смолянова і В.І. Авербуха було встановлено, що при диференціюванні скалярних мір по напіврефлексивному підпростору природним чином виникають векторні міри, а тому вже в рамках самої теорії диференціювання з'явилася необхідність дослідження диференціальних властивостей векторних мір.

В 1992 і 1995 роках В.О. Романовим досліджені граничні переходи щодо різних видів збіжності з нескінченно диференційовними і аналітичними векторними мірами. Такі граничні переходи представляють інтерес для завдань наближення інтегральних операторів.

У 2000 році А.В. Углановим отримані застосування диференційованих векторних мір до інтегровності по гладких поверхнях.

У 2002 році в роботі [2] В.О. Романовим доведено, що для векторних мір визначення варіаційної, напіваріаційної і поточкової диференційовності попарно нееквівалентні.

У тому ж 2002 року В.О. Романовим доведені теореми про розв'язання задачі Коші для диференційовних векторних мір, з трьома видами збіжності в початковій умові – по варіації, відносно напівваріації і на системі вимірних множин.

У 2005 році в роботі [7] В.О. Романовим сформульовані теореми про згортки з диференційовними векторними мірами. Такі згортки корисні при побудові рішень диференціальних рівнянь.

Верхня грань скінченної сім'ї неперервних мір

Нехай X – банахів простір.

Означення 1. Система підмножин простору X називається **сигма- алгеброю,** якщо вона містить сам простір, разом з кожною послідовністю своїх множин містить їх об'єднання та переріз і якщо вона містить різницю кожних двох своїх множин.

Означення 2. Сигма-алгеброю **борелевських підмножин** простору X називається мінімальна сигма-алгебра, яка містить всі замкнені підмножини простору X.

Означення 3. Функція m з числовими значеннями, яка визначена на сигма-алгебрі борелевських множин, називається **мірою** , якщо вона має властивість зчисленної адитивності, тобто якщо для кожної послідовності попарно неперерізних борелевських множин A_n виконується рівність $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} m\left(A_n\right)$.

Означення 4. **Значенням варіації** міри m на борелевській множині A називається число, яке позначається через $\nu(m)(A)$і яке дорівнює верхній грані сум $\sum_n \left|m\left(A_n\right)\right|$, причому верхня грань береться за всіма скінченними системами неперерізних борелевських підмножин A_n множини A.

Означення 5. Значення варіації міри m на усьому просторі X називається **повною варіацією** і позначається через *Var m*.

Означення 6. **Зсувом** міри m на вектор h називається міра m_h, значення якої на кожній борелевській множині A задається формулою $m_h(A) = m(A+h)$.

Далі вважаємо, що скалярні міри m, які розглядаються, мають скінченну повну варіацію.

Означення 7. Міра m називається **неперервною** за напрямом h, якщо $\lim_{t\to 0} Var\left(m_{th}-m\right)=0$. Міра m називається неперервною за підпростором H простору X (H-неперервною), якщо вона є неперервною за кожним напрямом цього підпростору.

Означення 8. Міра m називається **верхнею гранню** даної сім'ї мір, якщо вона мажорує кожну міру цієї сім'ї і якщо m не перевищує кожної іншої мажорантної міри.

Теорема 1. [3, с.64]. Верхня грань скінченної сім'ї H-неперервних мір H-неперервна.

Доведення. Достатньо розглянути випадок верхньої грані двох H-неперервних мір m_1 та m_2. Розглянемо також систему із скінченної кількості неперерізних борелевських множин A_n. Значення міри m = $\sup\{m_1,m_2\}$ на множині A_n можна задавати як верхню грань сум $(m_1(E_n) + m_2(F_n))$, яка береться за всіма парами неперерізних борелевських множин E_n та F_n, об'єднання яких співпадає з A_n. Зафіксуємо довільний вектор h простору H. Тоді для довільного дійсного t виконуються співвідношення

$$\sum_n \left|\left(m_{th}-m\right)\left(A_n\right)\right| = \sum_n \left|\sup\left(m_1\left(E_n+th\right)+m_2\left(F_n+th\right)\right)-\sup\left(m_1\left(E_n\right)+m_2\left(F_n\right)\right)\right| \le$$

$$\le \sum_n \left(\sup\left|m_1\left(E_n+th\right)-m_1\left(E_n\right)\right|\right)+\sum_n (\sup\left|m_2(F_n+th)-m_2(F_n)\right|).$$

З диз'юнктності системи множин A_n випливає диз'юнктність систем множин E_n та F_n ,а тому права частина нерівності не перевищує суми повних варіацій мір $((m_1)_{th} – m_1)$ та $((m_2)t_h – m_2)$. Після переходу в лівій частині нерівності до верхньої грані за множиною всіх систем із скінченної кількості неперерізних борелевських множин A_n одержимо, що $Var(m_{th} – m)$ теж не перевищує вказаної суми, яка є сумою двох нескінченно малих, коли t прямує до нуля. Звідси випливає твердження теореми.

Формула для повної напівваріації

Нехай X та У – два банахових простори.

Означення 9. Під **У-значною мірою** m в просторі X розуміємо функцію множини, яка визначена на всіх борелевських множинах простору X, приймає значення в просторі У та має властивість зчисленної адитивності, тобто для кожної послідовності неперерізних борелевських множин $A_n \subset X$ виконується рівність $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$, де послідовність частинних сум збігається за нормою простору У.

Означення 10. **Значенням варіації** векторної міри m на борелевській множині A називається число, яке позначається через $\nu(\mu)(A)$ і яке дорівнює верхній грані сум $\sum_{\mathrm{n}} \left\|m(A_n)\right\|$, причому верхня грань береться за всіма скінченними системами неперерізних борелевських підмножин A множини A.

Означення 11. **Значенням напівваріації** векторної міри m на борелсвській множині A називається число, яке позначається через $\|m\|(A)$ і яке дорівнює верхній грані величин $\left\|\sum_n \alpha_n m(A_n)\right\|$, причому верхня грань береться за всіма скінченними системами неперерізних борелевських підмножин A_n множини A та за всіма наборами скалярів α_n, модуль яких не перевищує 1.

Означення 12. Значення варіації та напівваріації на усьому просторі X називається **повною варіацією** та повною напівваріацією і позначається відповідно через Var m та ||m||.

Далі вважаємо, що Var m < ∞. Нехай h $\in$ X.

Означення 13. Векторна міра m називається **варіаційно неперервною** за напрямом h, якщо $\lim_{t\to 0} Var(m_{th} - m) = 0$.

Означення 14. Векторна міра m називається **напівваріаційно неперервною** за напрямом h, якщо $\lim_{t\to 0}\|m_{th} - m\| = 0$.

Означення 15. Векторна міра m називається **поточково неперервною** за напрямом h, якщо для кожної борелевської множини A $\lim_{t\to 0}(m_{th} - m)(A) = 0$.

Векторну міру називаємо **H – неперевною** (де H$\subset$X – лінійний підпростір), якщо вона є неперервною за кожним напрямом h$\in$H.

Теорема 2 [4, с.310]. Нехай m – векторна міра в банаховому просторі. Тоді || m || = sup || m(A)-m(B) ||, де верхня грань береться за всіма парами неперерізних борелевських множин A та B.

Доведення. Розглянемо рівність $\|m\| = \sup_{\{E_n\}}(\sup_{|\alpha_n|\le 1}\left\|\sum_n \alpha_n m(E_n)\right\|)$, де зовнішня верхня грань береться за всіма системами із скінченної кількості неперерізних вимірних множин, а внутрішня – за всіма наборами скалярів α_n, модуль яких не перевищує 1. Вираз під знаком норми є лінійним відносно скалярів, а тому досягає свого екстремуму в одній з вершин відповідного скінченновимірного куба. Тому можна вважати, що $|\alpha_n| = 1$. Далі розіб'ємо доданки $\alpha_n m_n(E_n)$ на дві частини: на доданки, для яких $\alpha_n=1$, та на доданки, для яких $\alpha_n= -1$. Тоді вираз під знаком норми можна записати у вигляді m(A)-m(B), де множина A є об'єднанням тих множин E_n, для яких α_n=1, а множина B є об'єднанням решти множин E_n. Теорема доведена.

Диференційовні міри та властивість Радона-Нікодима

Теорема 3 [2, с.533]. Нехай банахів простір У має властивість Радона-Нікодима, m – У-значна поточково диференційовна за напрямом h міра в сепарабельному банаховому просторі X. Тоді міра m є і вараційно диференційовною за напрямом h.

Доведення. Поточково диференційовна міра m є поточково неперервною, а тому як відомо її варіація $\nu(m)$ неперервна за напрямом h. Диференціал d_hm є абсолютно неперервним відносно міри $\nu(m)$, а тому є добутком деякої У-значної інтегровної за Бохнером функції на міру $\nu(m)$. Тоді диференціал d_hm є варіаційно неперервним за напрямом h, а тому прямує до нуля вираз в правій частині нерівності $Var(\frac{1}{t}(m_{th} - m) - d_h m) \le \sup_{|S|\le|t|} Var((d_h m)_{sh} - d_h m)$ (коли) $t \to 0$. Тоді вираз в лівій чатині нерівності теж прямує до нуля, а тому векторна міра є варіаційно h-диференційовною. Теорема доведена.

Задачі Коші для мір

Розглянемо задачу Коші для скалярних мір.

Приклад 1. Нехай A – лінійний оператор, для якого всі вектори e_n даного ортонормованого базису нескінченновимірного сепарабельного гільбертова простору X є власними і мають додатні власні значення λ_n, оператор A^2 має скінченний слід, p_t- сім'я гауссівських мір з корреляційними операторами A^4t, де параметр t пробігає множину додатних чисел, H – образ оператора A, а скалярна міра m є H-неперервною. Тоді згортка m_t=m*p_t є розв'язком задачі Коші для диференціального рівняння $\frac{\partial}{\partial t}(m_t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4 d_{e_n}^2(m_t)$ з початковою умовою, яка полягає в тому, що для кожної борелевської множини E виконується рівність $\lim_{t\to+0} m_t(E) = m(E)$.

Доведення. Оскільки виконується рівність $\frac{\partial}{\partial t}(m*p_t) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4 d_{e_n}^2 (m*p_t) = m*(\frac{\partial}{\partial t}p_t - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4 d_{e_n}^2 p_t)$, а з роботи [8] випливає, що гауссівські міри p_t є розв'язками даного рівняння, то наша згортка теж є розв'язком рівняння. Залишається перевірити, що для нашої згортки виконується і початкова умова задачі Коші.

Гауссівські міри p_t зосереджені на підпросторі H. Введемо тепер на підпросторі H нову метрику за формулою $d(x,y) = \sup\{Var(m_{\alpha y} - m_{\alpha x}) : |\alpha| \le 1\}$. Згідно з теоремою (56) [5, с. 41], для введеної метрики довільна куля B_ε радіуса ε з центром в нулі є поглинаючою множиною. Тоді можна обгрунтувати, що $\lim_{t\to+0} p_t(H \setminus B_\varepsilon) = 0$.

Далі скористаємось рівністю $(m*p_t - m)(E) = \int_H [m(E-x) - m(E)]dp_t(x)$. Розіб'ємо множину інтегрування H на кулю B_ε та її доповнення. Модуль інтеграла за самою кулею не перевищує ε, а модуль інтеграла за її доповненням не перевищує добутку сталої 2Var m на величину $p_t(H \setminus B_\varepsilon)$, яка прямує до нуля, коли $t \to +0$.

Звідси випливає, що для нашої згортки початкова умова виконується. Теорема доведена.

Теорема єдиності

Приклад 2. [6, с. 80], Нехай підпростір H та гауссівські міри p_t задаються так само, як в прикладі 1, а У-значна міра m є поточково, напівваріаційно або варіаційно H-неперервною. Тоді серед нескінченно диференційовних за всіма базисними напрямами У – значних мір не існує інших розв'язків (крім згортки $m*p_t$) розглянутих відповідно в теоремах (73, 74, 75) [5, с. 55-56], задач Коші.

Доведення. Кожний нескінченно диференційовний розв'язок задачі Коші є У-значною мірою, яка однозначно визначається композиціями з функціоналами, що належать спряженому до У простору. Ці композиції є нескінченно диференційовними скалярними мірами, які однозначно визначаються скінченновимірними проекціями, що є добутками сумовних нескінченно диференційовних функцій (щільностей) на відповідні міри Лебега.

Тоді Задачу Коші для У-значної міри можна звести до сім'ї задач Коші для щільностей, тобто до сім'ї задач Коші для звичайних функцій. Оскільки для цих останніх не існує двох різних нескінченно диференційовних розв'язків, то для вихідної задачі Коші (для У-значних мір) також не існує двох різних нескінченно диференційовних розв'язків. Теорема доведена.

Висновки

Розглянуто векторні міри, їх неперервність та диференційованість, деякі властивості та нерівності векторних мір.

Отримані застосування неперервних мір до згорткових операторів, застосування векторних мір всіх цих типів неперервності до побудови розв'язків задачі Коші з різними видами збіжності в початковій умові.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. Дифференцируемые меры// Труды Моск. матем. о-ва. – 1971. – Том 24. – С. 133-174.

2. Романов В. А. О неэквивалентности различных определений дифференцируемости для векторных мер// Математические заметки. – 2002. – Том 72, №4. – С.528-534.

3. Романов В. А. О разложении меры в линейном пространстве в сумму H-непeрывной и вполне H-разрывной мер // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика, механика. – 1976. – Том 31, №4. – С. 63-66.

4. Романов В. А. О неэквивалентности трех определений непрерывных направлений для векторных мер // Математические заметки. – 1995. – Том 57, №2. – С.310-312.

5. Романов В.О. Неперервні міри. – Кіровоград: РВВ КДПУ, 2004. –63 с.

6. Романов В. О. Різні види неперервності початкової умови в задачі Коші для векторних мір // Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету. Серія фіз.-мат. наук. – 2002. – Випуск 43. – С.79-82.

7. Романов В.А. Свертки с дифференцируемыми мерами // Математика, економіка, інформатика: актуальні проблеми та методика викладання: Матеріали обласної наук.-практ. Конференції (10-12 березня 2005 р.) – Кіровоград, 2005. – С. 23-25.

8. Угланов А. В. Уравнение теплопроводности для мер в оснащенном гильбертовом пространстве // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Матем., мех. – 1971. – Том 26, №1. – С.52-60.

Інна ПОТАПОВА

МІРА ТА ІНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доцент В.О.Романов

Теорія міри та інтегрування є важливим розділом загальної теорії математичних функцій, що бере початок з робіт А. Лебега (1906) з теорії інтеграла та знаходить місце і в працях сучасних вчених. Наприклад, Толстов Георгій Павлович, інженер-полковник, доктор фізико-математичних наук, професор, великий фахівець в галузі теорії функцій, заслужений діяч науки РРФСР багато років приділив вивченню міри та інтеграла і свої наукові досягнення виклав у книзі «Міра та інтеграл»[4].

Цей розділ займається вивченням природи основних операцій математичного аналізу.

Дана тема актуальна в наш час, тому що міра та інтеграл Лебега широко застосовується у функціональному аналізі, теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів, теорії масового обслуговування, в теоретичній фізиці, квантовій механіці, квантовій теорії поля та ін.[1].

Наведемо деякі з найголовніших означень та теорем до теми «Міра та інтеграл Лебега». Вони є досить складними, тому що студенти вперше зустрічають такі поняття як абсолютно збіжні числові ряди, сигма-кільця, які самі по собі не є простими. Тому за мету ми ставимо підібрати такі приклади, які б найкраще дозволяли розкрити дану тему на відносно доступному рівні для певної категорії читачів, а саме студентам 2-3 курсів.

<u>Означення 1</u>. Мірою інтервалу називається його довжина. Міру відрізка, а також міру напіввідрізка теж задамо як його довжину.

<u>Означення 2.</u> Мірою відкритої обмеженої множини G на прямій називається число, яке позначається через m(G) і яке дорівнює сумі ряду, доданками якого є довжини неперерізних інтервалів, що є компонентами множини G.

Теорема 1. Міра m на системі всіх відкритих множин прямої має властивість зчисленної адитивності, тобто якщо відкрита обмежена множина G є об'єднанням зчисленної сім'ї неперерізних відкритих множин G_n, то m(G)=$\sum_{n=1}^{\infty} m(G_n)$ [3].

Доведення. Для обмеженої множини G довжини інтервалів, з яких вона складається, утворюють збіжний ряд. Оскільки залишок збіжного ряду прямує до нуля і оскільки інтервали можна наблизити відрізками, то для кожного $\varepsilon \succ 0$ існує така замкнена множина F , яка міститься в множині G і для якої $m(F) \succ m(G) - \varepsilon$. Відкриті множини G_n утворюють покриття множини F. За теоремою Гейне-Бореля-Лебега з цього покриття можна виділити скінченне підпокриття $\{G_1,...,G_p\}$. Тоді $m(G\ ) - \varepsilon \prec m(F) \le m(G_1) + ... + m(G_p) \prec \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n)$, а тому з довільності числа ε випливає, що $m(G\ ) \le \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n)$. З іншої сторони, кожна з частинних сум ряду не перевищує числа m(G), а тому і повна сума ряду теж не повинна бути більшою цього числа. Таким чином, отримана нестрога нерівність перетворюється у рівність. Теорема доведена.

<u>Означення 3.</u> Система множин P називається півкільцем, якщо вона містить порожню множину і якщо виконуються дві умови:

1) переріз кожних двох множин системи P теж є множиною системи P.

2) якщо множина A та A_1 містяться в системі P, причому множина A_1 є підмножиною множини A, то множину A можна зобразити як об'єднання кількох неперерізних множин системи P, однією з яких є множина A_1.

<u>Означення 4.</u> Система множин P називається кільцем, якщо вона замкнена відносно операцій перерізу та симетричної різниці кожних двох множин.

<u>Означення 5.</u> Функція m з числовими значеннями, яка визначена на системі P деяких підмножин множини X, називається мірою (на системі P), якщо вона має властивість зчисленної адитивності, тобто якщо для кожної множини A системи P, яка є об'єднанням зчисленної сім'ї неперерізних множин A_n системи P, виконується рівність $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$.

Теорема 2. Якщо міра m задана на півкільці P, то її можна, причому єдиним способом, продовжити до міри, визначеної на кільці, яке породжується півкільцем P.

Доведення: Розглянемо систему всіх таких множин A, які можна зобразити як об'єднання скінченної кількості неперерізних множин P_j півкільця P. Система всіх таких множин A є кільцем. Зрозуміло, що таке кільце є мінімальним серед тих, які містять дане півкільце.

Задамо значення m на множині A як суму значень міри на тих неперерізних множинах P_j півкільця, об'єднанням яких є множина A. В результаті отримаємо продовження міри з півкільця на кільце. Єдиність цього продовження забезпечується тим, що значення міри на множинах півкільця відомі з самого початку, а також тим, що для неперерізних множин міра їх об'єднання повинна дорівнювати сумі мір цих множин. Теорема доведена.

Нехай P – деяке півкільце підмножин множини X, m – міра з невід'ємними значеннями на цьому півкільці.

<u>Означення 6</u>. Обмежена множина B називається вимірною (за Лебегом) якщо для кожного $\varepsilon \succ 0$ існує така елементарна множина A, що $\mu^*(B\Delta A) \prec \varepsilon$, де символ «Δ»означає симетричну різницю.

<u>Означення 7.</u> Функція множини μ^*, яка розглядається лише на вимірних множинах, називається мірою Лебега і позначається через μ .

Зрозуміло, що система вимірних множин включає в себе підкільце P і що на підкільці P міра μ співпадає з мірою m.

Теорема 3. На системі вимірних множин міра Лебега має властивість зчисленної адитивності, тобто для кожної зчисленної сім'ї неперерізних вимірних множин B_n, об'єднання яких є обмеженою множиною, є вірною рівність $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$.

Доведення: 1) Нехай ε - додатне число. Наблизимо з точністю до ε /2 (з точки зору симетричної різниці) множини B_1 та B_2 елементарними множинами A_1 та A_2. Позначимо через A об'єднання цих елементарних множин. Тоді множина A теж є елементарною, причому вона наближає множину $B_1 \bigcup B_2$ з точністю до ε . Таким чином, з довільною точністю множину $B_1 \bigcup B_2$ можна наблизити елементарною множиною, а тому об'єднання двох вимірних множин теж є вимірною множиною. Зрозуміло, що це твердження є вірним для довільної скінченної кількості вимірних множин.

2)Оскільки $A_1 \bigcap A_2 \subset (B_1 \Delta A_1) \bigcup (B_2 \Delta A_2)$, то $\mu(A_1 \bigcap A_2) \prec \varepsilon$. Тому з рівності $\mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A) + \mu(A_1 \bigcap A_2)$ випливає, що $\left|\mu(A) - \mu(A_1) - \mu(A_2)\right| \prec \varepsilon$. Таким чином,

$$\left|\mu(B_1 \bigcup B_2) - \mu(B_1) - \mu(B_2)\right| \le \left|\mu(B_1 \bigcup B_2) - \mu(A)\right| + \left|\mu(A) - \mu(A_1) - \mu(A_2)\right| +$$
$$+ \left|\mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(B_1) - \mu(B_2)\right| \prec 3\varepsilon.$$

3)Оскільки для кожного натурального числа p є вірним включення $\bigcup_{n=1}^{p} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ є збіжним, а тому його залишок прямує до нуля. Таким чином, існує p, для якого $\sum_{n=p+1}^{\infty} \mu(B_n) \prec \varepsilon$. Оскільки об'єднання перших p множин B_n можна з точністю до ε наблизити деякою елементарною множиною, то з урахуванням останньої нерівності (про залишок ряду) одержуємо, що ця елементарна множина наближає об'єднання всіх множин B_n з точністю до 2ε . Оскільки додатне число ε можна взяти довільним, то множина $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ є вимірною.

4) Для кожного натурального числа p розглянемо рівність $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{p} B_n) + \mu(\bigcup_{n=p+1}^{\infty} B_n)$. Перший доданок правої частини дорівнює $\sum_{n=1}^{p} \mu(B_n)$, а другий доданок прямує до нуля, коли $p \to \infty$. Тому при переході до границі отримається властивість зчисленної адитивності. Теорема доведена.

Означення 8. Функція називається простою, якщо вона вимірна і приймає не більш, ніж зчисленну кількість значень.

Означення 9. Проста функція f , яка приймає свої значення y_n на множинах $A_n \subset X$, називається інтегрованою за Лебегом (сумовною) на вимірній множині B, якщо є абсолютно збіжним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n * \mu(A_n \cap B)$. Сума цього ряду називається інтегралом Лебега від функції f по множині B та позначається через $\int_B f(x)d\mu(x)$.

Означення 10. Функція називається інтегровною за Лебегом (сумовною), якщо існує така послідовність (f_n) простих сумовних функцій, яка збігається до функції f рівномірно. При цьому інтегралом Лебега від функції f називається границя послідовності інтегралів від функцій f_n.

Теорема 4. Означення 10 є коректним в тому розумінні, що: 1) границя послідовності інтегралів від сумовних простих функцій f_n, які збігаються рівномірно до f, існує;

2) ця границя не залежить від вибору послідовності простих функцій f_n.

Доведення:

1)Із нерівності $\left|\int_B f_n(x)d\mu(x) - \int_B f_k(x)d\mu(x)\right| \le \mu(B) * \sup_{x\in B} \left|f_n(x) - f_k(x)\right|$ та рівномірної збіжності послідовності (f_n) випливає фундаментальність, а тому і збіжність послідовності інтегралів від функції f_n.

2) Нехай (g_n) – ще одна послідовність простих інтегрованих функцій, яка рівномірно збігається до f. Тоді для «мішаної» послідовності, складеної по черзі з функцій (f_n) та (g_n), границя інтегралів теж існує, а тому границя інтегралів від функцій g_n дорівнює границі інтегралів від функцій f_n.

Для введення теми «Міра та інтеграл Лебега» необхідними є такі поняття, як півкільце, кільце, сигма-кільце, відкриті та замкнені множини. Тому доречно було б запропонувати студентам низку прикладів, пов'язаних саме з цими поняттями.

Приклад 1. Нехай відкрита множина $E \subset [a;b]$. Довести, що $F = [a;b] \setminus E$ замкнута множина [2, 183с.].

Доведення: Потрібно довести, що F містить всі свої граничні точки. З означення різниці множин слідує, що $\forall x \in [a;b]$ або $x \in E$, або $x \in F$. Нехай x - гранична точка множини F, тобто в будь-якому околі точки x є точки множини F, відмінні від x. Очевидно, $x \in [a;b]$. Доведемо, що $x \in G$. Від супротивного. Тоді $x \in E$ і, так як, E – відкрита множина, то існує окіл точки x, що повністю належить E. Звідси випливає, що в цьому околі точки x немає жодної точки з множини F, але це суперечить тому, що x – гранична точка множини F. Отримана суперечність доводить, що $x \in F$ і, отже, F – замкнута множина

Приклад 2. Довести, що система всіх відкритих множин числової прямої не є навіть півкільцем множини.

Доведення: Для того щоб довести, що система множин не є півкільцем множини, потрібно показати що не виконується хоча б одна із аксіом півкільця.

Оскільки переріз двох відкритих множин знову є відкритою множиною, тому перша аксіома виконується. Наприклад: (3;5)$\cap$(4;6)=(4;5). Хоча виконується перша аксіома півкільця, це ще не означає, що наша система відкритих множин є півкільцем, оскільки для півкільця множин необхідне виконання ще і другої аксіоми. Покажемо, що друга аксіома не виконується. Візьмемо A=(0;3), A_1=(1;2) і $A_1 \subset$A. Спробуємо зобразити A як об`єднання кількох неперерізних множин нашої системи, однією з яких є множина A_1. A=(0;3)=(0;1]$\cup$(1;2) $\cup$ [2;3). Але ж, (0;1] і [2;3) не є відкритими множинами. Отже, ми довели, що система всіх відкритих множин числової прямої не є навіть півкільцем множини.

Приклад 3. Довести, що система всіх не більш, ніж зчисленних підмножин числової прямої є не лише кільцем, а також σ -кільцем.

Доведення: Для того, щоб довести , що система всіх не більш, ніж зчисленних підмножин числової прямої є кільцем, потрібно перевірити замкненість даної системи відносно операцій перерізу та симетричної різниці. Візьмемо А – не більш, ніж зчисленна і В – не більш, ніж зчисленна. Тоді, $A \cap B$ - частина А, а отже, тим паче, не більш ніж зчисленна. Що стосується симетричної різниці, то $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, (А\В) – частина А, отже не більш, ніж зчисленна, аналогічно (В\А). Об`єднання двох не більш, ніж зчисленних множин –також не більш, ніж зчисленна множина. Для $\sigma$ - кільця перевіряється ще одна умова – замкненість відносно операції об`єднання зчисленної послідовності своїх множин. В нашому випадку об`єднання зчисленної послідовності не більш, ніж зчисленних множин знову є не більш, ніж зчисленна множина. Отже, ми довели, що всіх не більш, ніж зчисленних підмножин числової прямої є не лише кільцем, а також σ -кільцем.

Приклад 4. Довести, що кожна зчисленна множина на числовій прямій має нульову міру Лебега.

Доведення: Міра окремої точки дорівнює нулю. Нашу множину можна записати як об'єднання зчисленної кількості одноточкових . Тоді, за властивістю зчисленних множин, міра Лебега нашої множини дорівнює сумі ряда, доданками якого є нулі.

Приклад 5. Функція f задається рівністю:

$$f(x)=\begin{cases} 5, якщо \quad x \in [0;1] \cap Q; \\ 6, якщо \quad x \in [0;1] \setminus Q; \\ 7, якщо \quad x \in (1;2] \cap Q; \\ 8, якщо \quad x \in (1;2] \setminus Q. \end{cases}$$

Знайти інтеграл Лебега на відрізку [0;2].

Розв'язання:

Дана функція приймає лише чотири значення. Звідси випливає, що функція проста, тому згідно з означенням інтеграл Лебега від простої функції буде дорівнювати сумі чотирьох доданків, а кожний з доданків – це добуток значення нашої функції на міру тієї множини, на якій відповідне значення приймається.

Тому:

$$\int_{[0;2]} f(x)dx = 5 * \mu([0;1] \cap Q) + 6 * \mu([0;1] \setminus Q) + 7 * \mu((1;2] \cap Q) + 8 * \mu((1;2] \setminus Q) =$$

$$= 5*0 + 6*1 + 7*0 + 8*1 = 14$$

Перша і третя множина зчисленні, їх міра Лебега дорівнює нулю;

друга і четверта – вилучається множина Q, яка є зчисленною, отже вилучаються множини нульової міри. Оскільки вилучення не впливає, то буде міра відрізка.

Багато розділів із теми «Міра та інтеграл Лебега» вже розглянуто мною на даний момент, підібрано ряд прикладів з яких доречно було б починати вивчення теми, а також декілька прикладів на закріплення основних понять. Що стосується подальших досліджень, заплановано більш широко розглянути інтеграл Лебега, його властивості та граничні теореми з відповідно підібраними прикладами.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Баскаков А.Г. О теории меры и интеграле // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №5. – С 118-121.
2. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. – М.:Физматлит. – 2001. – 480 с.
3. Романов В.А. Функціональний аналіз. – Кіровоград: РВЦ КДПУ. – 2003. – 40 с.
4. Толстов Г.П. Мера и интеграл – М.:Наука, 1976. – 392 с.

Єлизавета ЧАБАН

РІВНЯННЯ ЛІУВУЛЛЯ ЗІ СТАБІЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ПОВОРОТУ

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук В.О. Болілий

«Малый множитель при старшей производной породил большую теорию» [1].

Теорія сингулярно збурених диференціальних рівнянь (СЗДР) – одна з найбільш поширених гілок диференціальних рівнянь, яка має широке застосування в різних галузях науки і техніки. Зміст епіграфа вже є вагомим аргументом на користь вивчення цієї галузі теорії диференціальних рівнянь [1]. СЗДР умовно поділяються на два великі класи: рівняння з стабільним та рівняння з нестабільним спектром виродженого оператора. Дослідження СЗДР з стабільним спектром в основному завершено. Основним джерелом розвитку СЗДР з нестабільним спектром виродженого оператора є рівняння Ліувілля вигляду

$$y''(x,\lambda)+[\lambda^2 r(x)+p(x)]y(x,\lambda)=h(x), \tag{1}$$

яке досліджується при великих значеннях параметра [1-6]. Ще в 1837 р. Ліувілль та Грін показали, [2-5], що у випадку, коли $r(x)>0$, загальний розв'язок однорідного рівняння (1) у нульовому наближенні має вигляд

$$y^{+}(x,\lambda)\cong[r(x)]^{-1/4}\cdot[C_1\cos\{\lambda\varphi_1(x)\}+C_2\sin\{\lambda\varphi_1(x)\}], \tag{2}$$

коли $r(x)<0$, то маємо нульове наближення

$$y^{-}(x,\lambda)\cong[-r(x)]^{-1/4}\cdot[C_3\exp\{\lambda\varphi_2(x)\}+C_4\exp\{-\lambda\varphi_2(x)\}], \tag{3}$$

де

$$\varphi_1(x)=\int\sqrt{r(x)}dx\,,\ \varphi_2(x)=\int\sqrt{-r(x)}dx\,. \tag{4}$$

Тут регуляризуючі функції $\varphi_i(x)$, визначені формулами (4) є відповідно розв'язками диференціальних рівнянь $[\varphi_i'(x)]^2=(-1)^{i+1}r(x)$ що задовольняють початкові умови $\varphi_i(0)=0$ Наближення (2) і (3) називають *наближеннями Ліувілля-Гріна*(ЛГ-наближення) або *ВКБ – наближеннями* [2,3]. Проте ці розв'язки стають непридатними, коли незалежна змінна x наближається до нулів функції $r(x)$. Нулі цієї функції і називають *точками звороту* рівняння (1) [3].

Розглянемо задачу

$$\begin{gathered}L_\varepsilon U(x,\varepsilon)\equiv\varepsilon^3U''(x,\varepsilon)+[r(x)+\varepsilon^3q(x)]U(x,\varepsilon)=h(x),\\ U(0,\varepsilon)=A(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\alpha+W_0,\frac{dU(0,\varepsilon)}{dx}=B(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}\beta+\varepsilon^{-1}W_1,\end{gathered} \tag{5}$$

коли $\varepsilon\to+0, x\in I=[0,1]$. Тут $A(\varepsilon),B(\varepsilon)$ – відомі величини, які не залежать від змінної x. Задачу (5) вивчаємо при виконані таких умов:

$$r(x),q(x),h(x)\in C^\infty[I],r(x)=x\tilde{r}(x),\tilde{r}(x)>0,x\in I. \tag{6}$$

З постановки задачі (5) бачимо, що розв'язок виродженого рівняння, яке відповідає збуреному рівнянню (5), тобто рівняння

$$L_0\omega(x)\equiv x\tilde{r}(x)\omega(x)=h(x) \tag{7}$$

у загальному випадку, коли $h(x)\neq 0$ має розрив 2-го роду в точці $x=0$. Тоді точка $x=0$ є точкою звороту для рівняння (5).

Основна мета полягає у побудові досить гладкого розв'язку задачі (5) на відрізку [0;1] у випадку, коли розв'язок виродженого рівняння має розрив 2-го роду в точці $x=0$.

Для збереження істотно особливих функцій та їх описання, поруч з незалежною змінною x, введемо нову змінну t за формулою $t=\varepsilon^{-p}\varphi(x)=\Phi(x,\varepsilon),$ де показник p та функція $\varphi(x)$ підлягають визначенню. Тоді, замість функції $U(x,\varepsilon)$ будемо вивчати нову розширену функцію $\tilde{U}(x,t,\varepsilon)$. Розширення проводимо таким чином, щоб виконувалась тотожність

$$\tilde{U}(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)}\equiv U(x,\varepsilon).$$

Продиференціюємо дану тотожність два рази. Маємо

$$\frac{dU(x,\varepsilon)}{dx}\equiv\frac{d\tilde{U}(x,t,\varepsilon)}{dx}\Big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)}\equiv\frac{\partial\tilde{U}(x,t,\varepsilon)}{\partial x}+\varepsilon^{-p}\varphi'(x)\frac{\partial\tilde{U}(x,t,\varepsilon)}{\partial t},$$

$$\frac{d^2U(x,\varepsilon)}{dx^2}\equiv\frac{d^2\tilde{U}(x,t,\varepsilon)}{dx^2}\Big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)}\equiv\frac{\partial^2\tilde{U}(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2}+2\varepsilon^{-p}\varphi'(x)\frac{\partial^2\tilde{U}(x,t,\varepsilon)}{\partial x\partial t}+$$

$$+\varepsilon^{-p}\varphi''(x)\frac{\partial\tilde{U}(x,t,\varepsilon)}{\partial t}+\varepsilon^{-2p}[\varphi'(x)]^2\frac{\partial^2\tilde{U}(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2}$$

Підставимо ці тотожності в збурене рівняння (5). Отримаємо, так звану, розширену задачу [3]

$$\widetilde{L}_\varepsilon \widetilde{U}(x,t,\varepsilon) = h(x), \widetilde{U}(0,t(0),\varepsilon) = A(\varepsilon), \frac{d\widetilde{U}(0,t(0),\varepsilon)}{dx} = B(\varepsilon). \qquad (8)$$

Тут розширений оператор $\widetilde{L}_\varepsilon$ має вигляд

$$\widetilde{L}_\varepsilon \equiv \varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon^3 q(x) + \varepsilon^{3-p} d \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^{3-2p}[\varphi'(x)]^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + r(x), \qquad (9)$$

де $d = 2\varphi'(x)\dfrac{\partial}{\partial x} + \varphi''(x).$

Перехід від збуреної задачі (5) до розширеної задачі (8) проведено таким чином, що виконується тотожність $\widetilde{L}_\varepsilon \widetilde{U}(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)} \equiv \widetilde{L}_\varepsilon U(x,\varepsilon)$. Для однозначного визначення показника p і функції $\varphi(x)$ скористаємось гіпотезою Лангера [5]: найпростішим диференціальним рівнянням 2-го порядку, що зберігає всі особливості однорідного рівняння (5), є рівняння Ейрі

$$TW(t) \equiv \frac{\partial^2 W(t)}{\partial t^2} + tW(x) = 0, \qquad (10)$$

тобто, рівнянням Ейрі-Дородніцина [4]. Виділимо оператор Ейрі-Дородніцина у розширеному операторі $\widetilde{L}_\varepsilon$ наступним чином:

$$\varepsilon^{3-2p}[\varphi'(x)]^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + r(x) \equiv \varepsilon^{3-2p}[\varphi'(x)]^2 T.$$

У даній тотожності введено позначення

$$\frac{r(x)}{\varepsilon^{3-2p}[\varphi'(x)]^2} \equiv t\Big|_{t=\varepsilon^{-p}\varphi(x)} \equiv \frac{\varphi(x)}{\varepsilon^p}.$$

З цієї тотожності однозначно визначимо показник $p = 1$ і отримаємо таке диференціальне рівняння для визначення регуляризуючої функції $\varphi(x)$:

$$[\varphi'(x)]^2 \cdot \varphi(x) = x\widetilde{r}(x) \equiv r(x). \qquad (11)$$

Модельне диференціальне рівняння (10) має обидва обмежені розв'язки, коли $t > 0$. Тому точку звороту $x = 0$ називається *стабільною точкою звороту*. Розв'язком рівняння (11) при початковій умові $\varphi(0) = 0$ є функція:

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{r(\tau)} d\tau \right)^{2/3}.$$

Опишемо простір функцій, в якому розширена задача (8) повинна задовольняти умови $\varphi(0) = 0$.

Розглянемо множини (підпростори) функцій

$$Y_{ir} = \{V_{ir}(x)W_i(t) + Q_{ir}(x)W_i'(t)\}, i = 1,2,$$
$$Y_{3r} = \{f_r(x)\Psi(t) + g_r(x)\Psi'(t)\}, Y_{4r} = \{\omega_r(x)\}. \qquad (12)$$

Тут $V_{ir}(x), Q_{ir}(x), f_r(x), g_r(x), \omega_r(x) \in C^\infty[I], W_i(t), i = 1,2,$ лінійно незалежні розв'язки рівняння $TW(t) \equiv \dfrac{\partial^2 W(t)}{\partial t^2} + tW(t) = 0$.

Функція $\Psi(t)$ є розв'язком задачі

$$TW(t) \equiv \Psi''(t) + t\Psi(t) = 1,\ \Psi(0) = 3^{-2/3}\Gamma(\frac{1}{3}), \Psi'(0) = -3^{-1/3}\Gamma(\frac{2}{3}). \qquad (13)$$

Диференціюючи рівність (13), одержимо необхідну у подальшому, рівність

$$T\Psi'(t) \equiv \Psi'''(t) + t\Psi'(t) = -\Psi(t). \qquad (14)$$

З підпросторів (11) складемо новий простір

$$Y_r = \bigoplus_{k=1}^{4} Y_{kr} \qquad (15)$$

який називають простором безрезонансних розв'язків. Елемент цього простору має вигляд

$$U_r(x,t) = \sum_{r=1}^{2} [V_{ir}(x) + W_i(t) + Q_{ir}(x)W_i'(t)] + f_r(x)\Psi(t) + g_r(x)\Psi'(t) + \omega_r(x). \quad (16)$$

Покажемо, що малий параметр $\varepsilon > 0$ входить у розширену задачу (8) регулярно, якщо це рівняння будемо розглядати у просторі безрезонансних розв'язків Y_r.

З цією метою вивчимо дію розширеного оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$ на елемент з простору (14), тобто на функції (16). Розширений оператор $\widetilde{L}_\varepsilon$ можемо записати у вигляді

$$\widetilde{L}_\varepsilon \equiv [\varphi'(x)]^2 T + \varepsilon^2 d \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^3 [\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x)]. \quad (17)$$

Подіємо першим доданком правої частини рівності (17) на функцію $U_r(x,t) \in Y_r$. Використавши тотожності (13) і (14), одержимо:

$$\varepsilon[\varphi'(x)]^2 TU_r(x,t) \equiv \varepsilon[\varphi'(x)]^2 \{-Q_{ir}(x)[W_i(t) + tW_i'(t)] + f_r(x)\cdot 1 - g_r(x)\Psi(t)\} + r(x)\omega_r(x) \quad (18)$$

Для того щоб простір безрезонансних розв'язків (14) був інваріантний відносно розширеного оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$, необхідно провести часткове звуження тотожності (17) наступним чином. Оскільки тотожність (18) завжди має місце, коли $t = \varepsilon^{-1}\varphi(x)$, то множник t біля функцій $W_i'(t), i = 1,2$ замінимо виразом $\varepsilon^{-1}\varphi(x)$.

З урахуванням сказаного вище тотожність (18) запишемо у вигляді

$$\varepsilon[\varphi'(x)]^2 TU_r(x,t) = r(x)\omega_r(x) - r(x)Q_{ir}(x)W_i'(t) + \varepsilon[\varphi'(x)]^2[f_r(x) - Q_{ir}(x)W_i(t) - g_r(x)\Psi(t)] \quad (19)$$

З (18) видно, що простір безрезонансних розв'язків Y_r інваріантний відносно оператора $[\varphi'(x)]^2 T$. Застосуємо аналогічні перетворення до 2-го та 3-го доданків оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$. Тоді розширений оператор, в його дії на елементи з ПБР (15) має вигляд

$$\widetilde{L}_e U_r(x,t) \equiv (L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \varepsilon^3 L_3)U_r(x,t). \quad (20)$$

Оператори $L_k, k = \overline{0,3}$, в їх дії на функції з ПБР (15), можна записати у вигляді таких тотожностей:

$$L_0 U_r(x,t) \equiv r(x)\omega_r(x),$$

$$L_1 U_r(x,t) \equiv -\sum_{i=1}^{2} DQ_{ir}(x)W_i(t) - Dg_r(x)\Psi(t) + [\varphi'(x)]^2 f_r(x),$$

$$L_2 U_r(x,t) \equiv -\sum_{i=1}^{2} dV_{ir}(x)W_i'(t) + df_r(x)\Psi'(t) + dg_r(x), \quad (21)$$

$$L_3 U_r(x,) \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x)\right] U_r(x,t).$$

Тут $D \equiv \varphi(x)d + [\varphi'(x)]^2 = 2\varphi(x)\varphi'(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{d(\varphi(x)\varphi'(x))}{dx}$.

Сформулюємо отримані результати у вигляді такої теореми.

Теорема. Нехай: а) для рівняння (5) виконуються умови (6); тоді для досить малих значень параметра $\varepsilon > 0$:

1) описаним методом можна побудувати єдиний розв'язок розширеної задачі (8) у вигляді асимптотичного ряду

$$\widetilde{U}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=-1}^{+\infty} \varepsilon^r U_r(x,t), \; U_r(x,t) \in Y_r; \quad (22)$$

2) звуження ряду (22), коли $t = \Phi(x,\varepsilon)$, є асимптотичним рядом розв'язку сингулярно збуреної задачі (5);

3) залишковий член асимптотичного розв'язку сингулярно збуреної задачі (5) має оцінки вигляду

$$\left\|\xi_{m+1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\right\| = \max_{x\in I}\left|\xi_{m+1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon\right| \le \varepsilon^m K,\ \left\|\xi_1(x,\Phi(x,\varepsilon)\right\| \le \varepsilon K,$$

$$\left\|\xi_{m+1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\right\| \equiv \left\|\varepsilon^{m+1}\tilde{\gamma}_{m+1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon\right\| \le \tilde{K}_{m+1}\varepsilon^{m+\frac{3}{4}},\ \left\|\tilde{\xi}_1(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\right\| \le \tilde{K}_0\varepsilon^{3/4}$$

4) якщо сталі α, β визначити формулами

$$\alpha = f_{-1}(0)\Psi(0) = 3^{-3/2}h(0)[\varphi'(0)]^{-2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \beta = \varphi'(0)f_{-1}(0)\Psi'(0) = -3^{-1/3}h(0)[\varphi'(0)]^{-1}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

то одержаний асимптотичний розв'язок СЗЗ (5) буде обмеженим відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ і на довільному компакті відрізка I, що не містить точки $x = 0$ то виконується гранична рівність

$$\lim_{\varepsilon\to+0} U(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon) = r^{-1}(x)\cdot h(x) \equiv \omega(x)\cdot$$

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Розов Н.Х. Бисингулярные краевые задачи в теории дифференциальных уравнений // Математический журнал. Алматы. 2003. – Том 3. – № 3(9). – С. 74-78.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
3. Бобочко В. М., Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. Наукова думка. Київ. 2002. – 310 с.
4. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. – 1952. – Т. 27, вып. 6 (52). – С. 3-96.
5. Langer R. E. The asymptotic solutions of certain ordinary differential equations of the second order // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V.67. – P. 461-490.
6. Wasow W. Linear tuning point theory. – Springer-Verlaq New York Ins., 1985. – 243 p.