ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Лілія АРТЕМ'ЄВА

АКТУАРНІ МОДЕЛІ В ТЕОРІЇ КОЛЕКТИВНОГО СТРАХУВАННЯ

(магістрантка фізико-математичного факультету)
Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент З.П. Халецька

Одним із завдань актуарної математики як прикладної дисципліни є розробка математичних моделей індивідуального страхування, які узагальнюються на випадок колективного страхування. Таке узагальнення необхідне при розрахунках, пов'язаних з пенсійним страхуванням, з колективним страхуванням життя, здоров'я та ін. Наприклад, вони застосовуються при оподаткуванні майна і дарувань. Скажімо, інвестиційний дохід від майна, переданого в довірче управління, виплачується групі спадкоємців до тих пір, поки живий останній з них. Після смерті останнього спадкоємця капітал вилучається з довірчого управління та передається в дар благодійної організації. Величина податкового вирахування, пов'язаного з благодійністю, при оподаткуванні цього дару визначатиметься актуарними розрахунками. Існують договори сімейного страхування, в яких передбачені різні виплати залежно від того, в якій послідовності вмирають страхувальник та його дружина. Існують також договори з виплатами на випадок першої або останньої смерті для відшкодування внесків з оплати нерухомості [1, 235].

Розглянемо особливості страхування життя декількох осіб. У випадку колективного страхування життя корисною абстракцією є поняття статусу. Нехай m індивідуумів з віками (x_1, x_2,..., x_m) бажають укласти страховий договір. Майбутній час життя k-го індивідуума віку x_k позначимо через $T(x_k) = X - x_k$. Сукупності т чисел $T(x_1)$, $T(x_2)$,..., $T(x_m)$ поставимо у відповідність статус U, якому відповідає своя тривалість життя T(U). Двома найпоширенішими статусами є статус сумісного життя і статус виживання останнього [1].

Статус сумісного життя позначається $U := x_1: x_2:...: x_m$ або $(x_1 : x_2 :... : x_m)$ і вважається зруйнованим, якщо наступила смерть хоч би одного з індивідуумів, тобто

$T(U) = \min\{T(x_1),T(x_2),...,T(x_m)\}$.

Зрозуміло, що $P\{T(U) >t\} = P\{\min(T(x_1), T(x_2),..., T(x_m)) > t\} = = P\{T(x_1) > t, T(x_2) >t,..., T(x_m) > t\}$, і в припущенні незалежності смертей

$$P\{T(U)>t\}=\prod_{i=1}^{m} {}_t p_{x_i}\ .$$

Виведемо інші ймовірнісні характеристики тривалості життя для T(U), наприклад

$${}_t q_{x_1:x_2:...:x_m}=1-{}_t p_{x_1:x_2:...:x_m}=1-\prod_{i=1}^{m}\left(1-{}_t p_{x_i}\right).$$

Для щільності розподілу часу руйнування даного статусу справедливі наступні співвідношення:

$$f_{x_1:x_2:...:x_m}(t)=-\frac{d}{dt}P\{T(U)>t\}=-\frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{m} {}_t p_{x_i}=-\frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{m}\frac{s(x_i+t)}{s(x_i)}. \qquad (1)$$

У припущенні незалежності смертей знайдемо щільність розподілу статусу сумісного життя двох індивідуумів $U:= x_1 : x_2$. Оскільки m = 2, а $T(U)= \min(T(x_1),T(x_2))$, то для щільності розподілу статусу відповідно до (1) маємо:

$$f_{x_1:x_2}(t)=-\frac{d}{dt}\{-P\{min(T(x_1),T(x_2))>t\}\}=\left\{-\frac{s(x_1+t)}{s(x_1)}\frac{s(x_2+t)}{s(x_2)}\right\}_t^{/}=$$

$$=\frac{f(x_1+t)}{s(x_1)}\frac{s(x_2+t)}{s(x_2)}+\frac{s(x_1+t)}{s(x_1)}\frac{f(x_2+t)}{s(x_2)}=f_{x_1}(t)s_{x_2}(t)+f_{x_2}(t)s_{x_1}(t)<f_{x_1}(t)+f_{x_2}(t),$$

де $s_x(t)=\dfrac{s(x+t)}{s(x)}$ – функція виживання випадкової величини T(U). Виведена нерівність дозволяє знижувати страховій компанії розмір премії учасникові колективного страхування в порівнянні з випадком індивідуального страхування [3, 52-53].

Стандартні ймовірнісні моделі, до яких відноситься модель де Муавра, використовують, як правило, при теоретичному аналізі процесів смертності, первинному і спрощеному вивченні реальних ситуацій. Вони дозволяють виявити основні закономірності, що цікавлять дослідника.

Де Муавр запропонував вважати, що час життя розподілений рівномірно на інтервалі (0, ω), де параметр ω, що повністю визначає закон рівномірного розподілу, називається граничним віком. Зрозуміло, що для цієї моделі при $0 < x < \omega$ маємо $f(x)=\dfrac{1}{\omega}$, $F(x)=\dfrac{x}{\omega}$, $s(x)=1-\dfrac{x}{\omega}$, $\mu_x=\dfrac{f(x)}{s(x)}=\dfrac{1}{\omega-x}$ [2, 10].

Для моделі де Муавра функція виживання $s_x(t)=I_t(-\infty,\omega-x)-\dfrac{tI_t(0,\omega-x)}{\omega-x}$, тому щільність розподілу статусу сумісного життя двох індивідуумів є

$$f_{x_1:x_2}(t)=\frac{I_t(0,\omega-x_1)}{\omega-x_1}\left[I_t(-\infty,\omega-x_2)-\frac{tI_t(0,\omega-x_2)}{\omega-x_2}\right]+\frac{I_t(0,\omega-x_2)}{\omega-x_2}\left[I_t(-\infty,\omega-x_1)-\frac{tI_t(0,\omega-x_1)}{\omega-x_1}\right]=$$

$$=\left[\frac{\omega-x_2-t}{(\omega-x_1)(\omega-x_2)}+\frac{\omega-x_1-t}{(\omega-x_1)(\omega-x_2)}\right]I_t\left(0,min(\omega-x_1,\omega-x_2)\right).$$

Перейдемо тепер до функції інтенсивності руйнування стану сумісного життя. Функція інтенсивності залишкового часу життя *T(x)= X–x* задовольняє рівності

$$\mu_x(t)=\frac{f_x(t)}{s_x(t)}=\frac{f(x+t)}{s(x+t)}=\mu_{x+t}=-\frac{d}{dt}ln\,s(x+t)==-\frac{d}{dt}\left[ln\,s(x+t)-ln\,s(x)\right]=-\frac{d}{dt}ln\frac{s(x+t)}{s(x)}=-\frac{d}{dt}ln_t p_x\,,$$

тобто $\mu_x(t)=\mu_{x+t}=-\dfrac{d}{dt}ln_t p_x$.

Беручи до уваги останню формулу, отримуємо $\mu_{x_1:x_2:...:x_m}(t)=-\dfrac{d}{dt}ln_t p_{x_1:x_2:...:x_m}=-\dfrac{d}{dt}\sum\limits_{i=1}^{m}ln_t p_{x_i}=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_{x_i}(t)$ і, отже $\mu_{x_1:x_2:...:x_m}(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_{x_i}(t)$ [3, 54].

Статус виживання останнього позначається $U:=\overline{x_1:x_2:...:x_m}$ або $\left(\overline{x_1:x_2:...:x_m}\right)$ і вважається зруйнованим, якщо всі представники колективу померли, тобто T(U)= max(T(x_1), T(x_2),..., T(x_m)).

Зрозуміло, що

$${}_tq_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}}=P\{T(U)\le t\}=P\le\{max(T(x_1),T(x_2),...,T(x_m))\le t\}==P\{T(x_1)\le t,T(x_2)\le t,...,T(x_m)\le t\},$$

і в припущенні незалежності смертей ${}_tq_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}}=\prod\limits_{i=1}^{m}{}_tq_{x_i}$, ${}_tp_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}}=1-\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-{}_tp_{x_i}\right)$.

Щільність розподілу часу руйнування статусу виживання останнього дорівнює

$$f_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}}(t)=-\frac{d}{dt}P\{T(U)\le t\}-\frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{m}\left(1-{}_tp_{x_i}\right).$$

Знайдемо щільність розподілу статусу виживання останнього з двох індивідуумів у припущенні незалежності смертей. Оскільки m=2, а T(U)=max(T(x_1),T(x_2)), то для щільності розподілу статусу маємо:

$$f_{\overline{x_1:x_2}}(t)=\frac{d}{dt}\{P(T(x_1)\le t)P(T(x_2)\le t)\}=\frac{d}{dt}\{F_{x_1}(t)F_{x_2}(t)\}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{F(x_1+t)}{s(x_1)}\frac{F(x_2+t)}{s(x_2)}\right\}=$$

$$=\frac{f(x_1+t)}{s(x_1)}\frac{F(x_2+t)}{s(x_2)}+\frac{F(x_1+t)}{s(x_1)}\frac{f(x_2+t)}{s(x_2)}=f_{x_1}(t)F_{x_2}(t)+f_{x_2}(t)F_{x_1}(t)<f_{x_1}(t)+f_{x_2}(t).$$

Для моделі де Муавра

$$f_{\overline{x_1:x_2}}(t)=\frac{I_t(0,\omega-x_1)}{\omega-x_1}\left[I_t(-\infty,\omega-x_2)+\frac{tI_t(0,\omega-x_2)}{\omega-x_2}\right]+\frac{I_t(0,\omega-x_2)}{\omega-x_2}\left[I_t(-\infty,\omega-x_1)+\frac{tI_t(0,\omega-x_1)}{\omega-x_1}\right]=$$

$$=\frac{2tI_t\left(0,min(\omega-x_1,\omega-x_2)\right)}{(\omega-x_1)(\omega-x_2)}+\frac{I_t\left(min(\omega-x_1,\omega-x_2),max(\omega-x_1,\omega-x_2)\right)}{min(\omega-x_1,\omega-x_2)}.$$

Зрозуміло, що $\mu_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}}(t)=\dfrac{f_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}}(t)}{s_{\overline{x_1:x_2:...:x_m}}(t)}=\dfrac{d}{dt}\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-{}_tp_{x_i}\right)\Big/\left(1-\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-{}_tp_{x_i}\right)\right)$ [3, 56-57].

Проілюструємо можливості використання характеристик таблиці тривалості життя (ТТЖ) при обчисленні ймовірності, пов'язаної з розглянутими статусами.

Приклад. Припускаючи, що T(60) і T(65) незалежні, отримати вирази ймовірності того, що
(a) перша смерть відбудеться в проміжку від 5 до 10 років;
(b) остання смерть відбудеться в тому ж проміжку.
(c) Підрахувати цю ймовірність для чоловіків і жінок СРСР, порівняти з відповідною індивідуальною ймовірністю.
Фрагмент ТТЖ з необхідними даними наведено в таблиці:

x	60	65	70	75
s_1(x)	84,937	78,580	70,043	57,679
s_2(x)	65,130	55,048	43,405	30,857

де s_1(x), s_2(x) – функції виживання відповідно для жінок і чоловіків (СРСР,1984-1985рр.).

Розв'язання. (a) Для шуканої ймовірності статусу сумісного життя двох осіб (60:65) з урахуванням (1) справедливий наступний ланцюжок рівностей:

$$P\{5<T(60:65)\le 10\}=P\{T(60:65)>5\}-P\{T(60:65)>10\}=$$

$$={}_5p_{60:65}-{}_{10}p_{60:65}={}_5p_{60}\,{}_5p_{65}-{}_{10}p_{60}\,{}_{10}p_{65}=\frac{l_{65}}{l_{60}}\frac{l_{70}}{l_{65}}-\frac{l_{60}}{l_{60}}\frac{l_{75}}{l_{65}}=\frac{l_{70}}{l_{60}}\left(1-\frac{l_{75}}{l_{65}}\right).$$

(b) Тут для статусу виживання останнього двох осіб $(\overline{60:65})$ отримуємо:

$$P\{5<T(\overline{60:65})\le 10\}=P\{T(\overline{60:65})\le 10\}-P\{T(\overline{60:65})\le 5\}=$$

$$={}_{10}q_{60:65}-{}_5q_{60:65}={}_{10}q_{60}\,{}_{10}q_{65}-{}_5q_{60}\,{}_5q_{65}=(1-{}_{10}p_{60})(1-{}_{10}p_{65})-(1-{}_5p_{60})(1-{}_5p_{65})=$$

$$=\left(1-\frac{l_{70}}{l_{60}}\right)\left(1-\frac{l_{75}}{l_{65}}\right)-\left(1-\frac{l_{65}}{l_{60}}\right)\left(1-\frac{l_{70}}{l_{65}}\right).$$

(c) Згідно ТТЖ маємо для чоловіків СРСР

$$P_m\{5<T(60:65)\le 10\}=\frac{43{,}405}{65{,}130}\left(1-\frac{30{,}857}{55{,}048}\right)=0{,}2929,$$

$$P_m\{5<T(\overline{60:65})\le 10\}=\left(1-\frac{43{,}405}{65{,}130}\right)\left(1-\frac{30{,}857}{55{,}048}\right)-\left(1-\frac{55{,}048}{65{,}130}\right)\left(1-\frac{43{,}405}{55{,}048}\right)=0{,}1139,$$

$$P_{m_1}\{5<T(60)\le 10\}=\frac{l_{65}}{l_{60}}-\frac{l_{70}}{l_{65}}=\frac{55{,}048}{65{,}130}-\frac{43{,}405}{55{,}048}=0{,}0567,$$

$$P_{m_2}\{5<T(65)\le 10\}=\frac{l_{70}}{l_{60}}-\frac{l_{75}}{l_{65}}=\frac{43{,}405}{65{,}130}-\frac{30{,}857}{55{,}048}=0{,}1059$$

а для жінок СРСР

$$P_\omega\{5<T(60:65)\le 10\}=\frac{70{,}043}{84{,}937}\left(1-\frac{57{,}679}{78{,}580}\right)=0{,}2352,$$

$$P_\omega\{5<T(\overline{60:65})\le 10\}=\left(1-\frac{70{,}043}{84{,}937}\right)\left(1-\frac{57{,}679}{78{,}580}\right)-\left(1-\frac{78{,}580}{84{,}937}\right)\left(1-\frac{70{,}043}{78{,}580}\right)=0{,}0386,$$

$$P_{\omega_1}\{5<T(60)\le 10\}=\frac{l_{65}}{l_{60}}-\frac{l_{70}}{l_{65}}=\frac{78{,}580}{84{,}937}-\frac{70{,}043}{78{,}580}=0{,}0338,$$

$$P_{\omega_2}\{5<T(65)\le 10\}=\frac{l_{70}}{l_{60}}-\frac{l_{75}}{l_{65}}=\frac{70{,}043}{84{,}937}-\frac{57{,}679}{78{,}580}=0{,}0906.$$

Статус виживання k останніх позначається $U:=\dfrac{k}{x_1:x_2:\ldots:x_m}$ й існує до тих пір, поки живі принаймні k з m індивідуумів (x_1) (x_2),..., (x_m), тобто він вважається зруйнованим при настанні (m – k + 1)-ої смерті. Зрозуміло, що

$$\left(\frac{m}{x_1:x_2:\ldots:x_m}\right)=(x_1:x_2:\ldots:x_m),\quad \left(\frac{1}{x_1:x_2:\ldots:x_m}\right)=(\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}),$$

й, отже, стан сумісного життя (k = т) і стан виживання останнього (k = 1) є окремими випадками точного статусу виживання k останніх.

Точний статус виживання k останніх позначається $U:=\dfrac{[k]}{x_1:x_2:\ldots:x_m}$ й існує, якщо живі в точності k з m індивідуумів (x_1), (x_2),..., (x_m), тобто він починається у момент (m – k)-ої смерті і припиняється у момент (m – k + 1)-ої смерті. Цей статус знаходить широке застосування при розрахунку ануїнітетів (послідовностей платежів з обмеженим терміном тривалості).

Отже, ми визначили статуси для групи індивідуумів через загальний статус k виживших. Відзначимо, що нові статуси можна також комбінувати з розглянутих в даному розділі базових статусів.

Змішаним статусом назвемо стан, в основі якого лежить комбінація статусів, причому хоч би один з них заданий для більш, ніж одного індивідуума [3, 59-60].

Приклад. Описати наступні змішані статуси:

(a) $(\overline{\overline{x_1:x_2}:\overline{x_3:x_4}})$; (b) $\left(\overline{\overline{x_1:x_2}:(x_3:x_4)}\right)\left(\overline{\overline{x_1:x_2}:(x_3:x_4)}\right)$; (c) $(x_1:x_2:\overline{x_3:x_4})(x_1:x_2:\overline{x_3:x_4})$.

Розв'язання. (a) Цей стан зберігається, якщо живий принаймні один з (x_1) і (x_2) і принаймні один з (x_3) і (x_4). Моментом руйнування статусу $\left(\overline{x_1 : x_2} : \overline{x_3 : x_4}\right)$ є T(U)= min{max{T(x_1), T(x_2)}, max{T(x_3), T(x_4)}}.

(b) Такий стан зберігається, якщо живі принаймні двоє з чотирьох, саме, (x_3) і (x_4), або, коли тільки один живий, і це або (x_1), або (x_2). Моментом руйнування статусу $\left(\overline{\overline{x_1 : x_2} : (x_3 : x_4)}\right)$ є

T(U)= max{max{T(x_1), T(x_2)}, min{T(x_3), T(x_4)}}.

(c) Стан зберігається, якщо живі (x_1), (x_2) і, коли ще один живий, і це або (x_3), або (x_4). Моментом руйнування статусу $\left(x_1 : x_2 : \overline{x_3 : x_4}\right)$ є T(U)= min{T(x_1), T(x_2), max{T(x_3), T(x_4)}}.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. Актуарная математика. Перев. с англ. / Под ред. В.К.Малиновского. – М.: Янус-К, 2001
2. Збірник задач з актуарної математики для студентів механіко-математичного та економічного факультетів / Упорядник А.Я. Оленко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2005. – 67 с.
3. Кошкин Г.М. Основы актуарной математики: Учебное пособие/ Томск: Томский гос. ун-т, 2002. – 116 с.

Світлана ВАСИЛЬЄВА

СПОСІБ ЛОКАЛІЗАЦІЇ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДІОФАНТОВИХ РІВНЯНЬ

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент О.М. Вороний

Термін «локалізація» (від латинського localis – місцевий, locus – місце) означає обмеження місця дії. З цим поняттям, тобто з «обмеженням місця дії» зустрічаємося в математичному аналізі, шукаючи точки екстремумів функції – спочатку з області визначення функції виокремлюємо множину точок, у яких похідна не існує або дорівнює нулю, а потім, використовуючи достатні умови визначаємо, які з цих точок є точками екстремумів; в алгебрі, шукаючи цілі корені раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами – спочатку виділяємо множину цілих чисел, які є дільниками вільного члена рівняння, а потім, перевіряючи кожний дільник, знаходимо цілі розв'язки. (Таким прийомом розв'язування квадратних рівнянь користуються учні після вивчення теореми Вієта).

Узагальнюючи наведені приклади, робимо загальний висновок. Нехай X – множина, на якій містяться розв'язки деякої задачі. ***G*** – та підмножина цієї множини, на якій, і тільки на якій, містяться розв'язки цієї задачі. Виділення підмножини ***G*** будемо називати локалізацією множини розв'язків задачі.

Застосуємо спосіб локалізації до розв'язування діофантових рівнянь другого порядку з двома змінними:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f, \qquad (1)$$

де коефіцієнти рівняння *a, b, c, d, e, f* – цілі числа. Теорія розв'язування таких рівнянь була створена спільними зусиллями багатьох математиків і підсумована до початку XIX століття видатним німецьким математиком К.Гауссом. Однак, зважаючи на особливості розв'язування цих рівнянь, їх часто пропонують учням на різних математичних змаганнях: олімпіадах, фестивалях, турнірах тощо.

Якщо $a = 0, c = 0, b \neq 0$ або $ac = 0, b = 0$, то рівняння розв'язують способом розкладання лівої частини рівняння на множники за умови, що права частина – ціле число. Тому далі будуть розглядатися рівняння, в яких коефіцієнти ***a*** і ***c*** додатні.

Діофантове рівняння (1) можна розглядати як квадратне рівняння

$$ax^2 + (by + d)x + (cy^2 + ey - f) = 0 \qquad (2)$$

відносно змінної ***x*** з параметром ***y***. Це рівняння матиме розв'язки, якщо його дискримінант *D(y)*, який запишемо так: $D(y) = (b^2 - 4ac)y^2 + (2bd - 4ac)y + (4a)$ буде невід'ємним. За умови, що $b^2 - 4ac < 0$, розв'язки нерівності $D(y) > 0$ міститимуться на проміжку [y_1; y_2], де y_1 і y_2 – корені квадратного тричлена *D(y)*. Виділенням проміжку [y_1; y_2] здійснюється локалізація другого компонента розв'язку діофантового рівняння (1). Далі, розв'язуючи квадратне рівняння (2) при кожному цілому значенні ***y*** з відрізка [y_1; y_2], знаходимо цілі значення ***x***, чим завершуємо розв'язання рівняння (1).

Аналогічно можна локалізовувати перший компонент розв'язку діофантового рівняння (1), а потім визнчати значення ***y*** з квадратного рівняння $by^2 + (bx + e)y + (dx - f) = 0$.

У загальному випадку процес локалізації може бути громіздким. Тому зупинимося на частинних випадках рівняння (1).

1. Найпростішим випадком рівняння (1) є рівняння

$$ax^2 + cy^2 = f, \qquad (3)$$

де $f > 0$. Зрозуміло, що, знаючи розв'язок (x, y), можна отримати ще оди або три розв'язки (–x, –y), (–x, y); (x, -y). Тому досить розв'язати рівняння на множині цілих невід'ємних чисел. Оскільки $ax^2 \leq f$ і $cy^2 \leq f$, то компоненти невід'ємних цілих розв'язків потрібно способом перебору шукати на проміжках $\left[0,\left[\frac{f}{a}\right]\right]$ і $\left[0,\left[\frac{f}{c}\right]\right]$ відповідно. Після цього записати всі розв'язки рівняння.

2. Розглянемо рівняння $ax^2+bxy+cy^2=f$. (4)

Локалізувати змінні в цьому рівнянні можна або, розглядаючи його як квадратне рівняння і використовуючи його дискримінант, або, зводячи рівняння до попереднього випадку. Зупинимося на другому способі. Для цього уведемо нові змінні ***u*** і ***v***:

$$x=\frac{u+v}{2n},\ y=\frac{u-v}{2k}, \quad (5)$$

де ***n*** і ***k*** – деякі цілі числа, які визначимо пізніше. З рівностей (5) знаходимо ***u*** і ***v***:

$$u=nx+ky,\ v=nx-ky. \quad (6)$$

а рівняння (4), за умови $cn^2-ak^2=0$, перетворюємо до рівняння

$$Au^2+Cv^2=F, \quad (7)$$

де $A=ak^2+bnk+cn^2$, $C=ak^2-bnk+cn^2$, $F=4n^2k^2f$. Нескладно переконатися, що коефіцієнти A, C і F – додатні. З рівності $cn^2-ak^2=0$ отримуємо умову $\frac{a}{c}=\left(\frac{n}{k}\right)^2$, за якої рівняння (4) можна звести до рівняння (7), і спосіб визначення чисел ***n*** і ***k*** в підстановках (5).

Приклад 1. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$9x^2+3xy+4y^2=100. \quad (8)$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Розглянемо дане рівняння як квадратне рівняння відносно змінної ***x***:

$$9x^2+3xy+(4y^2-100)=0.$$

Знайдемо його дискримінант $D(y)=9y^2-36(4y^2-100)=3600-135y^2$ і розв'яжемо нерівність $3600-135y^2\geq 0$. Маємо $|y|\leq\sqrt{\frac{80}{3}}<6$. Оскільки ***y*** – ціле число, то $|y|\leq 5$. Щоб звузити можливу множину значень ***y***, рівняння запишемо так: $9x^2+3xy+3y^2=100-y^2$.

Оскільки ліва частина останньої рівності ділиться без остачі на 3, то й права частина повинна ділитися на 3. Це можливо тоді, коли y^2 дорівнюватиме 1, 4 або 25. Тільки при $y=\pm 5$ задане рівняння має єдиний цілий розв'язок ***x=0***. Тому діофантове рівняння має два розв'язки $(0;\pm 5)$.

2-й спосіб. Спочатку перевіримо, чи буде відношення $\frac{a}{c}$ квадратом деякого дробу. Оскільки $\frac{a}{c}=\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$, то ***n***=3, ***k***=2. Тому заміною змінних $x=\frac{u+v}{6},\ y=\frac{u-v}{4}$, рівняння перетворимо до такого:

$$5u^2+3v^2=800. \quad (9)$$

Звідси $|u^2|\leq 160$, $|v^2|\leq\frac{800}{3}<267$. Зрозуміло, що v^2 повинно ділитися без остачі на 25, тому v^2 може дорівнювати 0, 25, 100 або 225. Але тільки тоді, коли $v^2=100$, отримуємо $u^2=100$. Таким чином, рівняння (9) має 4 розв'язки: (10; 10), (–10; –10), (–10; 10), (10; –10). Щоб знайти розв'зки рівняння (8), потрібно розв'язати 4 такі системи:

$$\begin{cases}3x+2y=10,\\3x-2y=10,\end{cases}\quad\begin{cases}3x+2y=-10,\\3x-2y=-10,\end{cases}\quad\begin{cases}3x+2y=-10,\\3x-2y=10,\end{cases}\quad\begin{cases}3x+2y=10,\\3x-2y=-10.\end{cases}$$

Перші дві системи не мають цілих розв'язків, а з двох останніх систем знаходимо розв'язки рівняння (8): ***x=0***, ***y = -5*** і ***x=0***, ***y=5***.

3. Рівняння $ax^2+bxy+cy^2+dx=f$ також можна звести до рівняння виду (3). Для цього спочатку треба виділити квадрат двочлена $a\left(x+\frac{d}{2a}\right)^2+cy^2=f+\frac{d^2}{4a^2}$ і ввести нову змінну $u=x+\frac{d}{2a}$. Якщо $\frac{d}{2a}$ – ціле число, то маємо рівняння $au^2+cy^2=F$, де $F=f+\frac{d^2}{4a^2}$.

Приклад 2. Розв'язати в цілих числах рівняння $3x^2+4y^2+12x=72$.

Розв'язання. 1-й спосіб. Дане рівняння є квадратним рівнянням $3x^2+12x+(4y^2-72)=0$ відносно змінної ***x*** з параметром ***y*** і матиме розв'язки, якщо його дискримінант $D(y)=252-12y^2$ невід'ємний. Ця умова дає можливість локалізувати змінну y^2: $y^2\leq 21$. Зрозуміло, що y^2 може набувати значень 0, 1, 4, 9 і 16. Тільки за умови, що $y^2=9$, квадратне рівняння має корені $x_1=-6$ і $x_2=2$, а дане діофантове рівняння має 4 розв'язки (–6, ±3), (2, ±3).

2-й спосіб. Виконавши заміну $x = u - 2$, отримаємо рівняння $3u^2 + 4y^2 = 84$. Очевидно, що $3u^2 \le 84$, а $u^2 \le 28$, причому u^2 кратне 4. Аналогічно встановлюємо, що $y^2 \le 21$ і y^2 кратне 3. Тому u^2 може набувати значень 0, 4 і 16, а y^2 – тільки 0 і 9. Якщо $y^2 = 0$, то рівняння $3u^2 = 84$ не має цілих коренів. За умови, що $y^2 = 9$, спочатку з рівняння $3u^2 + 36 = 84$ знаходимо $u = \pm 4$, а потім, враховуючи зроблену заміну, дістаємо x= –6 і x=2, і завершуємо розв'язування даного діофантового рівняння. Його розв'язки: (–6, ±3), (2, ±3).

Насамкінець розглянемо задачу з III етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків ([2], с. 52, задача 15).

Задача. Знайдіть усі пари (*x, y*) цілих чисел *x* і *y*, для яких виконується рівність $8x^2 + 3xy + 2y^2 - 20x - 10y = 0.$

Розв'язання. 1-й спосіб. Ліва частина рівняння є квадратним тричленом змінної ***y*** з параметром ***x***. Його дискримінант $D = (3x - 10)^2 - 8(8x^2 - 20x)$ невід'ємний, якщо $\frac{10 - 8\sqrt{5}}{11} \le x \le \frac{10 + 8\sqrt{5}}{11}$. Тому ***x*** може дорівнювати тільки 0, 1 або 2. Якщо ***x***=0 то ***y***=0 або ***y***=5. В інших випадках ***y*** не є цілим числом.

2-й спосіб. Виконавши заміни $2x + y = u, 2x - y = v$, отримаємо рівняння $11u^2 + 5v^2 = 80u.$ Зрозуміло, що $11u^2 \le 80u.$ Тому $0 \le u \le 7$, причому ***u*** кратне 5. Маємо $u = 0, v = 0$ або $u = 5, v^2 = 25$. Далі знаходимо $x = y = 0$; $x = 0$, $y = 5$

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972. – 68с.
2. Вороний О.М. Кіровоградські математичні олімпіади школярів у 2000 – 2008 роках. –Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2008. – 212 с.
3. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. – 4-е изд. – М.: Наука, 1983. – 64 с.
4. Лейфура В.М. Діофантові рівняння // У світі математики. – Вип. 16. – К.: Рад. шк., 1985. – С. 57 – 69.
5. Лінчук С.С., Лінчук О.С. Розв'язування рівнянь у цілих числах розкладанням на множники // Математика. – 2003. №7 (211). – С. 16 – 17; №8, (212). С. 9 – 15.

Юлія ВАССАЛАТІЙ

СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент Г.В. Завізіон

Для опису деяких еволюційних процесів, тобто множини всіх можливих станів процесу використовують системи диференціальних рівнянь. Якщо ці процеси відбуваються скачкоподібно в певні фіксовані чи нефіксовані моменти часу, тоді системи, що їх описують є імпульсними. В загальному випадку такими:

$$\frac{dx}{dt} = f(t;x), \quad (t,x) \notin \Im_t, \quad \Delta x\big|_{(t;x)\in\Im_t} = A_t x - x. \qquad (1)$$

Часто системами такого виду описують робочий (експлуатаційний) режим технічної системи, наприклад, генератора коливань чи вібратора.

Системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом також виникають як системи першого наближення для систем з обмеженим, але достатньо великим впливом (зокрема, це управлінський вплив). Приклади таких систем можна спостерігати в механіці космічного польоту, електрофізиці, практиці медичного лікування (разове застосування ліків достатньо швидко призводить до змін у стані організму) і т.д., де управляючий вплив значної інтенсивності діє на об'єкт впродовж декількох хвилин чи навіть секунд, а процес управління триває протягом декількох годин, днів чи навіть тижнів.

Якщо звернутися до розгляду зокрема лінійних систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом, то основним результатом цієї теорії є теорема про існування та єдиність розв'язку такої системи, доведення якої спирається на теорему Пікара [1].

Теорема 1. Нехай проміжок $[t_0, t_0 + h] \subset I$ містить скінчену множину точок τ_i. Тоді для будь-якого $x_0 \in R^n$ розв'язок $x(t, x_0)$, $x(t_0, x_0) = x_0$ системи рівнянь (3.1.1) існує при всіх $t \in [t_0, t_0 + h]$. Крім того, якщо для всіх i таких, що $\tau_i \in [t_0, t_0 + h]$, матриці $E + B_i$ не вироджені, то $x(t, x_0) \ne x(t, y_0)$ при всіх $t \in [t_0, t_0 + h]$, лише тоді, коли $x_0 \ne y_0$.

Розглянемо лінійну однорідну систему з імпульсним впливом:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \ne \tau_i, \quad \Delta x\,\big|_{t=\tau_i} = B_i x, \qquad (2),$$

в якій матриця $A(t)$ неперервна і обмежена при $t \ge t_0$, матриці B_i, $i = 1,2,...$ рівномірно обмежені відносно $i \in N$, а моменти τ_i занумеровані множиною натуральних чисел $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_i < \tau_{i+1} < ...$ і такі, що $\tau_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$.

Спираючись на поняття стійкості за Ляпуновим [3], можна встановити умови стійкості та асимптотичної стійкості розв'язків лінійних імпульсних систем.

Нехай $X(t,t_0)$ – матриціант системи (2):

$$X(t,t_0)=U(t,\tau_j)(E+b_j)\prod_{\nu=j-1}^{1}U(\tau_{\nu+1},\tau_\nu)(E+b_\nu)U(\tau,t_0), \tag{3}$$

де $\tau_j<t\le\tau_{j+1}$, $U(t,\sigma)$ – розв'язок матричної системи $\frac{du}{dt}=A(t)U,$ $U(\tau,\tau)=E$, тобто матриціант системи $\frac{dx}{dt}=A(t)x$. (4)

Через те, що будь-який розв'язок системи (2) $x(t,x_0)$, $x(t_0,x_0)=x_0$ можна записати за допомогою матриціанта у вигляді

$$x(t,x_0)=X(t,t_0)x_0, \tag{5}$$

тоді і різницю $x(t,x_0)-x(t,y_0)$ двох довільних розв'язків системи (2) можна представити у вигляді:

$$x(t,x_0)-x(t,y_0)=X(t,t_0)(x_0-y_0). \tag{6}$$

Отже, про стійкість чи нестійкість розв'язків системи (2) можна судити за поведінкою матриціанта $X(t,t_0)$ при $t\to\infty$.

Якщо матриціант $X(t,t_0)=\{q_{ij}(t)\}$ обмежений при $t\ge t_0$, тобто виконується нерівність: $\|X(t,t_0)\|=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}|q_{\alpha\beta}(t)|\le M<\infty$, тоді для всіх $t\ge t_0$ і будь-якого розв'язку $x(t,x_0)$ системи (2) справедлива нерівність: $\|x(t,x_0)-x(t,y_0)\|\le\|X(t,t_0\|\,\|x_0-y_0\|\le M_0\|x_0-y_0\|$, згідно з якою $\|x(t,x_0)-x(t,y_0)\|<\varepsilon$ при $t\ge t_0$, але лише в тому випадку, коли $\|x_0-y_0\|<\delta=\frac{\varepsilon}{M_0}$. Це і означає, що розв'язок $x(t,x_0)$ стійкий.

Якщо припустити, що $\lim_{t\to\infty}\|X(t,t_0\|=0$, тоді матриця $X(t,t_0)$ в цьому випадку буде обмеженою при $t\ge t_0$ і, відповідно, розв'язок $x(t,x_0)$ – стійкий. Крім того, з (6) випливає, що $\lim_{t\to\infty}\|x(t,x_0)-x(t,y_0)\|=0$ (7)

для будь-якого розв'язку $x(t,y_0)$, тобто розв'язок $x(t,x_0)$ – асимптотично стійкий.

Нехай матриця $X(t,t_0)$ необмежена при $t\ge t_0$, тобто існує нескінченно зростаюча послідовність чисел $t_0\le t_1<t_2<\dots$ така, що

$$\lim_{k\to\infty}\|X(t_k,t_0)\|=\infty. \tag{8}$$

У цьому випадку серед елементів матриці $X(t,t_0)$ знайдеться, принаймні, один $q_{\alpha\beta}(t)$, для якого

$$\lim_{k\to\infty}|q_{\alpha\beta}(t_k)|=\infty. \tag{9}$$

Розглянувши розв'язок $x(t,x_0^*)$ системи (2), який проходить при $t=t_0$ через точку x_0^*, таку що $x_{10}^*=x_{20}$ $x_{20}^*=x_{20}$, …, $x_{\beta 0}^*\ne x_{\beta 0}$, $x_{\beta 0+10}^*=x_{\beta 0+10}$, …, $x_{n0}^*=x_{n0}$.

Для цього розв'язку

$$x_\alpha(t,x_0^*)-x_\alpha(t,x_0)=q_{\alpha\beta}(t)(x_{\beta 0}^*-x_{\beta 0}), \tag{10}$$

тому

$$\lim_{k\to\infty}|x_\alpha(t_k,x_0^*)-x_\alpha(t_k,x_0)|=\infty. \tag{11}$$

Якою б малою по модулю не була різниця $x_{\beta 0}^*-x_{\beta 0}$, функція $x_\alpha(t,x_0^*)-x_\alpha(t,x_0)$ буде необмеженою при $t\to\infty$ і, відповідно, необмеженою буде й різниця $x(t,x_0^*)-x(t,x_0)$. Останнє означає, що розв'язок $x(t,x_0)$ системи (2) нестійкий.

З проведеного вище аналізу щодо зв'язку стійкості розв'язку та обмеженості матриціанта системи (2) можна дійти до висновку, що обмеженість матриціанта $X(t,t_0)$ при всіх $t\ge t_0$ є достатньою умовою стійкості розв'язків лінійної імпульсної системи, а рівність $\lim_{t\to\infty} X(t,t_0)=0$ – достатньою умовою їхньої асимптотичної стійкості. Необмеженість матриці $X(t,t_0)$ при $t \ge t_0$ – достатня умова нестійкості будь-якого розв'язку системи рівнянь (2).

Згідно з цим, формулюється наступна теорема [1].

Теорема 2. Для стійкості розв'язку $x(t,x_0)$ лінійної системи з імпульсним впливом (2) необхідно й достатньо, щоб матриціант $X(t,x_0)$ (а отже, і будь-яка фундаментальна матриця) цієї системи були обмеженими при $t \ge t_0$; для асимптотичної стійкості – щоб матриціант задовольняв умову: $\lim_{t\to\infty} X(t,t_0)=0$, а для нестійкості – щоб матриціант був необмежений.

Зазвичай, розв'язки лінійної імпульсної системи (2) або всі одночасно стійкі, або нестійкі. Тому і саму систему називають стійкою, асимптотично стійкою чи нестійкою в залежності від того, якими є її розв'язки.

Припускаючи, що в системі (2) матриці $A(t)$ і B_i можна представити у вигляді $A(t)=A+P(t),\ B_i = B + I_i$, де A і B – постійні матриці, тоді цю систему можна переписати так:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(t)x,\ t \ne \tau_i,\ \Delta x|_{t=\tau_i} = Bx + I_i x. \qquad (12)$$

На рівні з системою (12) можна розглядати відповідну їй систему:

$$\frac{dx}{dt} = Ax,\ t \ne \tau_i,\ \Delta x|_{t=\tau_i} = Bx \qquad (13),$$

тоді буде справедливою наступна теорема.

Теорема 3. Якщо розв'язки системи рівнянь (13) стійкі, то стійкими будуть і розв'язки рівнянь (12) при умові що

$$\int_{t_0}^{\infty} || P(t) ||\, dt < \infty \text{ і } \prod_{\tau_i > t_0} \left(1 + \| I_i \|\right) < \infty \qquad (14)$$

Доведення:

Матриціант $X(t,t_0)$ системи з постійними коефіцієнтами (13) має вигляд

$$X(t,t_0) = e^{A(t-\tau_j)} \prod_{t_0<\tau_\nu<\tau_i} (E+B) e^{A(\tau_\nu - \tau_{\nu-1})},\ \tau_0 = t_0. \qquad (15)$$

Так як матриця $E+B$ невироджена, то і $X(t,t_0)$ також невироджена. При цьому

$$X(t,t_0)X^{-1}(\sigma,t_0) = e^{A(t-\tau_j)} \prod_{\sigma<\tau_j<t} (E+B)\, e^{A(\tau_j-\tau_{j-1})}(E+B)e^{A(\tau_{k+1}-\sigma)}, \qquad (16)$$

враховуючи, що $\tau_i < t \le \tau_{i+1}$, $\tau_k < \sigma < \tau_{k+1}$, $k < i$.

З (16), зважаючи на стійкість розв'язків системи (13) випливає, що існує таке додатне число K, що

$$|| X(t,t_0) || \le K,\ || X(t,t_0)X^{-1}(\tau,t_0) || \le K,\ t_0 \le \tau \le t. \qquad (17)$$

Оскільки будь-який розв'язок $x(t,x_0)$, $x(t_0,x_0)=x_0$ системи (12) можна представити у вигляді:

$$x(t,x_0) = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\sigma)P(\sigma)x(\sigma,x_0)d\sigma + \sum_{t_0<\tau_i<t} X(t,\tau_i)I_i x(\tau_i,x_0) \qquad (18),$$

то для будь-яких двох розв'язків $x(t,x_0)$, $x(t,y_0)$ системи (12), враховуючи нерівності (17), виконується:

$$|| x(t,x_0) - x(t,y_0) || \le K || x_0 - y_0 || + \int_{t_0}^{t} K || P(\sigma) || \cdot || x(\sigma,x_0) - x(\sigma,y_0) || d\sigma +$$
$$+ \sum_{t_0<\tau_i<t} K || I_i || \cdot || x(\tau_i,x_0) - x(\tau_i,y_0) ||. \qquad (19)$$

Звідси, в силу леми, яка стверджує, що невід'ємна кусково-неперервна функція $u(t)$, яка при $t \ge t_0$ задовольняє нерівності

$$u(t) \le C + \int_{t_0}^{t} v(t)u(t)d\tau + \sum_{t_0<\tau_i<t} \beta_i u(\tau_i) \qquad (20),$$

де $C \ge 0$, $\beta_i \ge 0$, $v(t) > 0$, τ_i – точки розриву першого роду функції $u(t)$ має таку оцінку

$$u(t) \le C \prod_{t_0<\tau_i<t} (1+\beta_i) e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau} \qquad (21),$$

отримаємо наступну оцінку для різниці $|| x(t,x_0) - x(t,y_0) ||$:

$$\| x(t,x_0) - x(t,y_0) \| \leq K \prod_{t_0<\tau_i<y} (1 + K \| I_i \|) e^{\int_{t_0}^{t} K\|P(\tau)\| d\tau} \| x_0 - y_0 \| \tag{22}$$

для всіх $t \geq t_0$. Зі збіжності добутку $\prod_{\tau_i>t_0} (1+\| I_i \|)$ випливає збіжність добутку $\prod_{\tau_i>t_0} (1 + K \| I_i \|)$, тому що $1 + K \| I_i \| \leq (1+\| I_i \|)^K$. А, отже, з (22) в кінцевому результаті одержується:

$$\| x(t,x_0) - x(t,y_0) \| \leq K_1 \| x_0 - y_0 \|, \quad t \geq t_0, \tag{23}$$

де $K_1 = \prod_{\tau_i>t_0} (1 + K \| I_i \|) e^{\int_{t_0}^{t} K\|P(t)\| dt}$. (24)

З нерівності (23) випливає стійкість розв'язків системи (12). Теорема доведена.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 287 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. Тихонов А.Н., Ильин В.А, Свешников А.Г. Курс высшей математики и математической физики. – М.: Наука, 1980. – 232 с.

Людмила ГОРДІЄНКО

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРА ПРИ ВИВЧЕННІ АСТРОФІЗИКИ

(студентка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент О.В. Волчанський

У зв'язку з обмеженістю часу, відведеного в школі на викладання астрофізики, ефективним методом інтенсифікації її вивчення є використання наочності, зокрема технічних засобів навчання. Однак, як відомо, школи відчувають нестачу засобів наочності (моделей, плакатів, діа- та кодопозитивів, кінофільмів тощо), водночас майже кожна школа має комп'ютер чи комп'ютерний клас. Тому на сучасному етапі вчитель повинен володіти не лише міцними теоретичними знаннями, використовувати різноманітні методи (словесні, наочні, практичні) та форми навчання (урок, конференція, семінар, практична робота, екскурсії) [1], а також повинен володіти комп'ютером, як одним із засобів навчання.

Одним з основних напрямів розвитку сучасної шкільної і вузівської освіти є впровадження в навчальний процес комп'ютерних форм навчання, інформаційних технологій. У зв'язку з цим відбувається стрімке зростання числа навчальних програм по різних дисциплінах шкільних і вузівських програм, починаючи від навчальних комплексів по іноземних мовах, і закінчуючи моделюванням складних квантово-механічних явищ.

Учбові програми по астрофізиці мають специфічні риси, обумовлені предметами астрономії та фізики, а також унікальною світоглядною роллю цього предмету в системі шкільної освіти, коли в ході його вивчення відбувається залучення і систематизація знань з різних дисциплін. Тому викладачами і методистами пред'являються особливі вимоги до комп'ютерних навчальних програм по астрофізиці: максимальне використання мультимедійних можливостей сучасних ЕОМ, поєднання високої наочності і динамічності в подачі теорії. Окрім цього, не можна не враховувати базові дидактичні принципи навчання, такі як проходження від простого до складного, широке використання міжпредметних зв'язків у викладі навчального матеріалу і ін. [2]

Важливим критерієм навчальної системи по будь-якому предмету, у тому числі і по астрофізиці, є можливість динамічної адаптації продукту до неповторного стилю роботи кожного вчителя, до індивідуальних особливостей учнів або учнівської групи, тобто надання вчителеві інструментів для самостійної настройки програмного продукту.

Серед електронних навчальних посібників можна виділити декілька типів програм, такі як електронні комп'ютерні підручники, мультимедійні енциклопедії, програми-планетарії, системи дистанційної освіти. Всі ці програми відрізняються по ступеню складності розробки і створення, демонстраційним можливостям, здібності до модернізації і налаштування.

Комп'ютерні електронні підручники можуть бути реалізовані у вигляді електронних презентацій або у вигляді комп'ютерної програми, створеної в спеціалізованому середовищі програмування.

Презентації – найбільш проста в плані створення допомога, призначена для ілюстрації навчального матеріалу в процесі заняття на екранах моніторів або за допомогою спеціалізованих проекторів. Як правило, презентації використовуються для візуалізації динамічних явищ, наприклад, рухів небесних тіл (Місяця, планет, зірок), сонячних і місячних затемнень і ін. Існує стабільне програмне забезпечення для створення презентацій, наприклад Microsoft PowerPoint, налагоджені технології. До безперечних достоїнств презентацій також можна віднести можливість їх створення безпосередньо самими викладачами, при цьому очевидно, що такий програмний продукт буде найбільш точний вписуватися в контекст учбового матеріалу.

Сучасна фізична освіта в умовах розвиваючого навчання покликана продовжити становлення навчальної пізнавальної діяльності учнів через відтворення загальної схеми процесу наукового пізнання, що відповідає концепції «освіта як учбова модель науки». Дослідження, що проводиться, дозволяє стверджувати, що навчальна діяльність може ефективно здійснюватися в ході самостійної роботи учнів. Самостійно виконуючи презентації з різних тем, учні опрацьовують потрібний їм матеріал, що є досить ефективно в процесі самоосвіти. [3]

В даний час освітні електронні видання і ресурси мережі Інтернет надають можливості для самостійного вивчення матеріалів по фізиці і астрономії. Очевидно, проте, що самостійне безсистемне і непродумане використання школярем інформаційних ресурсів для вивчення навколишнього світу не може бути результативним. Ефективність застосування інформаційних технологій в процесі навчання в значній мірі визначається тим, як організована самостійна пізнавальна діяльність учнів.

В процесі навчання на базі нових інформаційних технологій в умовах підвищення ступеня активності і рівня мотивації що вчається роль викладача змінюється, проте його діяльність не стає при цьому менш значною. Самостійна робота школярів на всіх основних етапах координується викладачем за допомогою вибору способів організації середовища навчання, створення віртуального робочого місця учня. У цьому контексті перед викладачем встають наступні основні завдання: відбір інформаційних ресурсів, формування блоку завдань на основі використовуваних інформаційних ресурсів, вибір критеріїв оцінки самостійної діяльності учнів, створення тренуючого і тестуючого блоку.

У навчально-методичному комплексі, для організації самостійної роботи, по вивченню астрофізичного матеріалу в процесі навчання фізики і астрономії в середній школі, комплексно використані різні види інтеграції інформаційних технологій в процес самостійного навчання: використання готових навчальних матеріалів, застосування засобів телекомунікацій для організації дискусії по заданій темі з видаленим партнером, створення і використання веб-сторінок і веб-сайтів як з метою пошуку інформації в рамках заданої теми, так і з метою створення умов для залучення учнів в самостійну пізнавально-пошукову діяльність. [2]

Важливим чинником організації самостійної діяльності на базі комп'ютерних технологій є дотримання спадкоємності форм навчання, при переході від парної і групової учбової самостійної роботи до самостійного дослідження. Крім успішного засвоєння матеріалу, що вивчається, такий перехід сприяє послідовному формуванню пізнавальної самостійності що вчаться як важливої особової якості.

Результати багатьох досліджень показують, що мережа Інтернет стала найважливішим освітнім середовищем, необхідним в процесі навчання студентів, школярів, а також при підготовці викладачів. При цьому великий інтерес для вчителів астрономії представляють інформаційні ресурси мережі Інтернет, яка використовується як величезна бібліотека даних, статей, ілюстрацій і інших матеріалів, необхідних в процесі підготовки до уроку. В даний час існує безліч всіляких Інтернет - сайтів, присвячених астрономії, електронних бібліотек, учбових астрономічних серверів, що забезпечують доступ до інформації самого різного рівня. За даних обставин в процесі підготовки уроку вчителеві необхідне уміння грамотно і критично підійти до пошуку і відбору потрібних матеріалів для того, щоб не "загубитися" в такому різноманітті інформації, мережею, що надається, Інтернет. [1]

Участь в такій роботі дозволяє учням навчиться здійснювати усвідомлений пошук і відбір інформації в мережі Інтернет з метою підготовки уроку астрофізики, а також сприяє розвитку умінь і навиків планування самої структури уроку. Робота над власним проектом і ознайомлення з проектами інших студентів дозволяє учням оцінити чинники, що впливають на сприйняття матеріалу, що міститься в слайді, а також роль відбору найбільш важливої інформації, правильність якого забезпечує повноту розкриття теми і цілісність сприйняття всієї роботи. Крім того це сприяє створенню дужної атмосфери обміну досвідом і взаємної підтримки, у тому числі і під час дискусій в ході захисту проектів, що сприяє соціальній адаптації учнів і набуттю досвіду виступу перед аудиторією.

Таким чином, використання комп’ютерів і комп’ютерних програм, наприклад Power Point, дозволяє вчителю провести підготовку і проведення реалістичних демонстрацій, затративши мінімум часу.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Воронцов-Вельяминов Б.А. и др. Методика преподавания астрономии в высшей школе: Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1985. – 240 с.
2. Скороход С. Сучасні технології у вивченні астрономії// Фізика. – 2004. – № 14. – С. 14 -15.
3. Климишин І., Козаренко Б., Олійник П. Цікава астрономія. – К.: Техніка, 1972. – 220 с.

Юлія ДЕКТЯР

ВИКОРИСТАННЯ ІСТОРІЇ ВІТЧИЗНЯНОЇ МАТЕМАТИКИ НА ЗАНЯТТЯХ

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – доктор техн. наук, канд. фіз.-мат. наук, професор З.Ю. Філер

Кожний учитель повинен розвивати логічне мислення учнів. Про це говориться в методичній літературі, у навчальних програмах. Однак, як це робити, учитель не завжди знає. Нерідко через це розвиток логічного мислення значною мірою йде стихійно, тому більшість, навіть старшокласників, не опановує початковими прийомами логічного мислення (аналіз, порівняння, синтез, абстрагування й ін.)

Роль математики в розвитку логічного мислення винятково велика. Причина винятковості ролі математики в тому, що це найбільш теоретична наука з усіх досліджуваних у школі. У ній високий рівень абстракції і у ній найбільш природним способом викладу знань є спосіб переходу від абстрактного до конкретного [1].

Одним із принципів навчання математики, як і будь-якої іншої науки, є принцип історизму. Бурхливий розвиток математики спонукає вчених та викладачів звертатися до проблем історії науки. Принцип історизму є основоположним принципом розвитку будь-якої науки. Він передбачає як детальний аналіз зародження, виділення етапів і періодів розвитку, так й обговорення сучасного стану досліджуваного об'єкту. Історія науки розвивається разом з її розвитком. Знання історії науки необхідне не тільки для того, щоб мати уявлення про динаміку наукового знання, помилки та "глухі кути". Це дає можливість наукового прогнозування перспектив розвитку науки та техніки. Видатні вчені надавали великого значення історії науки [2, с. 4].

Вітчизняна математика бере свої початки ще з дохристиянських часів. Після прийняття християнства в Київській Русі на розвиток математики мала значний вплив грецька культура. Згодом відбулося зародження монастирської науки. Монастирі стають у цей час осередками розвитку наук та мистецтв, визначними культурними, політичними, освітніми центрами.

У 1632 році виникає Києво-Могилянська академія (КМА) – перша вища школа в усій Східній Європі. Протягом всієї історії український народ не мав іншої інституції, яка б справила більший вплив на розвиток освіти, науки, культури, ніж Києво-Могилянська академія. Випускники КМА засновували школи, семінарії, друкарні, бібліотеки, сприяли розвитку мистецтва, літератури, музики, театру в Україні, майже в усіх великих містах Росії, а також Білорусії та Сербії. Серед вихованців Академії були й визначні гетьмани України. Славетні діячі української та світової науки постійно підтримували Академію, допомагаючи її спудеям та професорам [3]. Тільки після відкриття Московського університету роль Києво-Могилянської академії стала другорядною.

За наказом Петра І у 1725 р. було відкрито Петербурзьку Академію наук, а при ній — університет і гімназію. У 1727 р. на роботу в Академію приїхав Л. Ейлер. Учнями Ейлера були такі перші російські математики, як С.К. Котельников, С.Я. Румовський, С.О. Гур'єв та ін. Написані ними оригінальні підручники значно підвищили рівень викладання математики й фізики в навчальних закладах Росії першої половини XIX ст. У Казанському університеті працював видатний математик М.І. Лобачевський, у Харківському деякий час був ректором Т.Ф. Осиповський. Саме в цей час тут вчився М.В. Остроградський [4].

Т.Ф. Осиповський відзначався прогресивними суспільно-політичними поглядами. Він гаряче підтримував молодь, різко критикував запроваджені урядом порядки, намагався змінити їх, полегшити становище студентів. Реакційне настроєні професори Харківського університету домоглися його звільнення. З 1820 р. вчений не викладав у вищих навчальних закладах, а займався лише науковою діяльністю і роботою в галузі оптики.

Остроградський Михайло Васильович (24.09.1801, Пашенівка Полтавської губ. — 01.01.1862, Полтава) — видатний український математик, походить із козацько-старшинського роду Остроградських. У 1816—1820 рр. навчався в Харківському університеті, 1822—1828 рр. вдосконалював свої студії у Collège de France у Парижі. Працював переважно у Франції та Росії. З 1828 р. професор вищих шкіл у Петербурзі. Учень Лапласа, Ампера. Викладач Колегії Анрі IV (Париж), професор Петербурзького університету та Морського кадетського корпусу, член Петербурзької АН (з 1830, у віці 29 років), Паризької (з 1856 р.), Римської й Туринської Академій наук. Автор 40 праць з математичного аналізу (нескінченно-малих, інтегрування раціональних функцій), математичної фізики (диференціальні рівняння поширення тепла у рідких твердих тілах), теоретичної механіки (принцип можливих переміщень, варіаційні принципи механіки, теорія удару, теорія пружності, поширення хвиль на поверхні рідини тощо), написаних переважно французькою мовою. Остроградський встановив формулу перетворення інтеграла по об'єму в інтеграл по поверхні, названу його ім'ям (формула Остроградського, 1828, опублікована 1831) Світ знає його дослідження з теорії чисел, алгебри, теорії ймовірностей та варіаційного числення. Приятелював з Тарасом Шевченком [5].

Молодшим сучасником Т. Ф. Осиповського був В.Я. Буняковський. Доктором математичних наук він став у 21 рік. З 1827 р. молодий професор почав читати лекції з математичних дисциплін у вищих військових училищах Петербурга, інституті інженерів шляхів сполучення, а згодом у Петербурзькому університеті. У 1830 р. вченого обрали членом Петербурзької АН. З 1864 по 1889 р. він був її віце-президентом. В.Я. Буняковський працював переважно в теорії чисел і теорії ймовірностей. Він теж удосконалювався в Парижі, у О. Коші.

Поряд з М.В. Остроградським і П.Л. Чебишовим В.Я. Буняковський багато зробив для підвищення наукового рівня викладання фізико-математичних дисциплін у середній і вищій школі. Він написав і видав у 1844 р. підручник з арифметики, працював у галузі перекладу математичних термінів з французької мови на російську. Учений був почесним членом усіх російських університетів та багатьох наукових товариств, користувався великим авторитетом серед професорів і студентів. Президія Петербурзької АН в пам'ять ученого встановила премію ім. В.Я. Буняковського, яку кожних три роки присуджували молодим ученим за важливі дослідження в галузі математики [4].

Крилов Микола Митрофанович (16 (29).11.1879, Петербург – 11.05.1955, Москва, СРСР) – український математик, академік АН СРСР (з 1929). М. Крилов закінчив Петербурзький гірничий інститут у 1902 році, де він був професором у 1912—1917 роках. У 1917 році він переїхав до Криму, де став професором Кримського університету. У 1922 році був призначений головою Відділу математичної фізики Академії наук України.

З 1917 року М.М. Крилов працює професором Кримського (Таврійського) університету. Цього ж 1917 року йому присвоєно наукову ступінь доктора математики в Київському університеті. В 1922 році М.М. Крилову присвоєно звання дійсного члена Академії Наук УРСР і з цього часу аж до 1945 року він завідує кафедрою математичної фізики в КДУ.

В 1926-1927 рр. М.М. Крилов у Західній Європі проводить конференції та читає лекції в наукових установах та навчальних закладах. За плідну наукову діяльність М.М. Крилову в 1929 році було присвоєно звання заслуженого діяча науки УРСР. Його обирають почесним членом американського матем. товариства, американської матем. асоціації, французького матем. товариства, а також членом кореспондентом Коімборської Академії наук в Португалії. За 50-річний проміжок часу, який Крилов віддав науковій діяльності, ним написано і опубліковано близько 180 книг і статей по математичній фізиці та математиці. З 1932 року М.М. Крилов більшість часу своєї наукової діяльності присвячував проблемам теорії нелінійних коливальних процесів [5].

Історію української математики можна починати ще з давніх часів, однак найбільш повно українська математична наука почала себе проявляти в першій половині XX ст. Так, у 1910 році проф. Д.О. Граве організовує в Київському університеті свій знаменитий семінар, у якому в 1910-1912 рр. навчались і робили перші кроки в науці М.П. Кравчук, О.Ю. Шмідт, Б.М. Делоне, М.Г. Чеботарьов, А.М. Островський та інші. Проф. Граве не вагаючись ставив перед учнями складні проблеми з теорії груп і теорії алгебраїчних чисел. І такий педагогічний підхід дав блискучі результати. Так, ще в студентські роки О.Ю. Шмідт (згодом академік АН СРСР) публікує дві видатні праці з теорії груп і теорії Галуа. У першій з них доведено теорему про розклад скінченних груп у прямий добуток прямо нерозкладних множників, яку нині називають теоремою Ремака-Шмідта (або Круля-Шмідта). А в 1916 р. 25-річний випускник друкує у видавництві Київського університету свою монографію "Абстрактна теорія груп", за якою вивчали теорію груп кілька поколінь алгебраїстів СРСР (друге видання книги вийшло в 1933р. в Москві). З 1930 р. О.Ю. Шмідт очолює кафедру вищої алгебри Московського університету, організовує теоретико-груповий семінар, який згодом перетворився у Московську алгебраїчну школу.

У Києві традиції Граве продовжував розвивати академік АН України, професор М.П. Кравчук. Він викладав у Київському університеті та Київському політехнічному інституті, деякий час був директором Інституту математики АН України. Математик широкого профілю М.П. Кравчук відомий своїми працями з геометрії, аналізу, теорії диференціальних рівнянь. Алгебраїстам добре відомі його роботи з теорії перемінних (комутуючих) матриць, теорії білінійних та квадратичних форм, а введені ним многочлени —тепер відомі як многочлени Кравчука — є одним з основних робочих інструментів сучасної алгебраїчної комбінаторики.

Але в кінці 30-х років Київська алгебраїчна школа зазнала страшного удару. Академіка М.П. Кравчука та його учнів звинуватили в українському націоналізмі та контрреволюційному саботажі. Більшість київських алгебраїстів зазнала цькувань і репресій, академік М.П. Кравчук загинув у таборах. Перед початком Другої Світової війни Київ повністю втратив свою роль одного з алгебраїчних центрів.

Відродження алгебри в Київському університеті почалося з 1955 року, після приїзду в Київ добре відомого на той час математика-алгебраїста, професора Берлінського університету Льва Аркадійовича Калужніна. Його вчителями в студентські роки були такі видатні математики як І. Шур, Е. Артін, Х. Гекке, Г. Цасенгауз, Е. Картан. У 1948 р. він захистив у Сорбонні докторську дисертацію "Будова силовських р-підгруп симетричних груп та їх узагальнень". У 1951 році він переїжджає до НДР, де розпочинає читати лекції в Берлінському університеті спочатку як доцент, а після захисту габілітаційної дисертації "Стабільні групи автоморфізмів" як професор математичного факультету.

Після переїзду до Києва Льва Аркадійовича відразу було затверджено в званні професора і він почав працювати на кафедрі алгебри, аналізу і теорії ймовірностей. В 1957р. Л.А. Калужнін захистив докторську дисертацію на тему "Силовські р-підгрупи симетричних груп. Вінцеві добутки груп. Узагальнена теорія Галуа", ставши (без диплома про вищу освіту) унікальним володарем докторських ступенів трьох країн [6].

В Одесі розкрився талант ще одного нашого земляка, уродженця Кам'янця-Подільського Миколи Григоровича Чеботарьова. У сімнадцятирічному віці під впливом статті М. Лобачевського майбутній математик написав свою першу працю. У 1916 р. захистив дипломну роботу і був залишений у Київському університеті для підготовки до професорського звання. У 1921—1927 рр. працював в Одеському університеті. З 1927 р. — керівник кафедри алгебри Казанського університету. Після організації при університеті Науково-дослідного інституту математики і механіки — директор цього інституту. Враховуючи видатні заслуги М. Чеботарьова в розвитку математики, зокрема досліджень теорії Галуа і груп Лі, Президія АН СРСР встановила після смерті вченого премію його імені.

Микола Миколайович Боголюбов (1909—1993). Народився він у Нижньому Новгороді, але через рік сім'я переїхала в Україну. До 1918 р. жив у Києві. Семирічку закінчив на селі. Після повернення до Києва вивчав самостійно курси вищої математики та фізики. З огляду на його здібності, йому дозволяють відвідувати лекції в Київському університеті, а з 1923 р. ним керує відомий учений М Крилов. У сімнадцять років М. Боголюбов мав уже результати з теорії варіаційного числення, а Болонська академія наук (Італія) відзначила його спеціальною премією. У 1928 р. йому присвоїли докторський ступінь за поданням акад. Дмитра Граве. У 1928—1973 рр. працював в АН УРСР, 1936—1950 рр. — професор Київського і Московського університетів, а з 1949 р. працював у Математичному інституті ім. Стеклова АН СРСР, одночасно був директором Об'єднаного інституту ядерних досліджень. За видатні заслуги в розвитку математики, механіки, теоретичної фізики, академік М. Боголюбов удостоєний двічі звання Героя Соціалістичної Праці (1969, 1979), лауреата Ленінської (1958) та трьох Державних премій СРСР (1947, 1953, 1984) [7].

Юрій Олексійович Митропольський (03.01.1917, Шишаки – 14.06.2008), Київ) — Герой України, український математик і механік, радник Президії Національної академії наук України, доктор технічних наук, академік НАН України. Закінчив у 1942 році Казахський університет. Від 1950 – в Інституті математики АН УРСР: завідувач відділу (від 1953), директор (1958—1988), почесний директор (від 1988). Був удостоєний Ленінської премії (1965 р.)

18.01.2007 йому присвоєно звання «Герой України» і нагороджено орденом Держави. Державна премія України в галузі науки й техніки (11.12.1996) за цикл праць «Нові математичні методи в нелінійному аналізі» — разом із А. Самойленком та іншими. Заслужений діяч науки УРСР (1967), Герой Соціалістичної Праці (1986) [5].

Михайло Йосипович Ядренко (16.04.1932 с. Дрімайлівка, Куликівського районі, Чернігівської обл. — 28.08.2004 м. Київ) — український математик, професор, доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент Національної академії наук України. З 1966 по 1998 завідував кафедрою Теорії ймовірностей та математичної статистики КДУ [5]. Засновник і редактор математичних журналів.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Розвиток логічного мислення на уроках математики // http://mirreferatov.com.ua/referat/ua/logika/
2. Головко Н.В. Історія вітчизняної фізики та астрономії в курсі фізики середньої загальноосвітньої школи. Дисертація… канд. пед. наук. – К.: НПУ, 2000. – 208 с.

3. Цей день в історії // Народний Рух України / http://nru.org.ua/news/
4. Математики Росії XIII-XIX ст. // http://www.br.com.ua/referats/
5. Остроградський М.В., Крилов М.М., Митропольський Ю.О., Ядренко М.Й. // http://uk.wikipedia.org/wiki
6. Видатні українські математики // http://www.br.com.ua/referats/Mathematic/
7. Михайло Кравчук // http://www.br.com.ua/referats/Mathematic/

Світлана ЄФІМЕНКО

СТВОРЕННЯ КОЛЕКЦІЙ СУЧАСНОГО ОДЯГУ НА ОСНОВІ КОСТЮМІВ СТАРОДАВНЬОГО ЄГИПТУ III ТИСЯЧОЛІТТЯ – IV СТОЛІТТЯ ДО НАШОЇ ЕРИ

(студентка V курсу фізико-математичного факультету)
Науковий керівник – кандидат техн. наук, доцент О.В. Єжова

Багато проблем сучасного українського суспільства пов'язано з тим, що людина не може знайти гармонію з собою і в своїх стосунках з оточуючим світом, знаходиться в постійних пошуках самого себе. Для кожного з нас є важливим гармонійне поєднання внутрішнього та зовнішнього світу, відображення світогляду, смаку, моральних поглядів, принципів та переконань у своєму зовнішньому образі, зокрема костюмі. А гармонійно створений костюм допоможе людині створити свій образ. Саме тому історичний досвід людства може допомогти кожному віднайти таку гармонію. Одна з найдавніших цивілізацій, в основі культури якої був її пошук, – Стародавній Єгипет.

Мета роботи – допомогти дизайнерам, модельєрам, художникам (зокрема театральним декораторам, ілюстраторам, майстрам декоративно-прикладного мистецтва) проникнути у саму суть, глибину гармонійного поєднання елементів костюму стародавніх єгиптян та використати ці знання при конструюванні та моделюванні сучасного одягу на основі історичного костюму Стародавнього Єгипту, оскільки костюм є не тільки історичним кодом, але і може бути засобом атрибуції витворів мистецтва.

Завдання роботи:

1. Дослідити гармонійне поєднання елементів єгипетського костюму.
2. Розробити колекцію сучасного жіночого одягу на основі костюму Стародавнього Єгипту.
3. Надати практичні рекомендації щодо застосування елементів єгипетського костюму у створенні сучасного жіночого одягу.

Коли 2500 років тому долину Нілу відвідав древньогрецький історик Геродот, він не міг віднайти коріння єгипетської історії: вони губилися в тумані міфів і легенд. Вже в ті часи Єгипет був країною прекрасних палаців і храмів, країною міцного державного устрою, розвиненого сільського господарства, високого рівня розвитку астрономії і медицини. Відносна географічна замкнутість Єгипту дала можливість країні жити і розвиватися у всій своєрідності своєї культури без великих зовнішніх потрясінь. Сповільнений характер розвитку староєгипетського суспільства, що виразився в пережитках первіснообщинного устрою, і деспотична влада фараонів визначили застійність релігійних уявлень, збереження протягом тисячоліть канонів, що склалися в давнину, правил і традицій. В главі держави стояв фараон, який вважався сином верховного бога Ра, бога Сонця.

Мистецтво єгипетських художників підкорялося встановленим канонам і правилам. В межах канонів майстри зуміли передати складний і величавий людський образ, відобразити багатство міфологічних уявлень. Завдяки цьому, єгипетське мистецтво вважають одним з найдовершеніших, оригінальних, неперевершених.

Розвиток костюму Стародавнього Єгипту відбувається під дією природно-географічних, соціально-економічних змін в житті єгипетського суспільства, соціально-класової диференціації єгипетського суспільства, ідеологічних основ, релігійно-культових уявлень. У ньому відбиті традиції, світогляд, міфологія Стародавнього Єгипту, що додають костюму яскраво виражений колорит і неповторність. Основною ознакою костюму є його незмінність та постійність.

Костюм Стародавнього Єгипту несе в собі певний художній образ, так як допомагає людині виражати естетичний ідеал епохи. Ідеал чоловіка: високий зріст, прямі широкі плечі, вузькі талія і стегна, обличчя з прямим носом, мигдалеподібними очима і смуглявий колір шкіри. Велика схожість з сучасним уявленням про красу відчувається в зовнішності жінки: прямі плечі, довга шия, вузькі торс, талія і стегна, обличчя з прямим носом, мигдалеподібними очима, ясно-смуглява шкіра персикового відтінку.

Одяг служив символом соціальної відмінності. Костюм фараона в усі часи відрізнявся своєю вишуканістю, яскравістю, величністю.

Фігура людини в єгипетських пам'ятниках завжди точно геометрично стилізована і разом з нею завжди незмінно стилізований і одяг. Древні єгиптяни – архітектори, художники, філософи, математики, – надавали вагомого значення пропорціям в усіх сферах життя. Одним з пропорційних єгипетських канонів є відомий єгипетський трикутник із відношенням сторін 3:4:5, який слугував стародавнім єгиптянам мірилом пропорційності при будівництві пірамід, храмів, а також при формоутворенні елементів костюму. Єгиптяни прагнули надати своїй фігурі форму трикутника. Трикутник – втілення завершеності – є найлаконічнішою

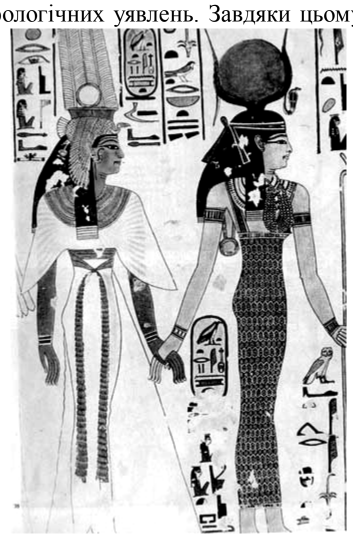


Рис.1. Богиня Ізіда (справа) у візерунчастому калазіріс, цариця Нефертарі (зліва) у білому калазіріс. Розпис з гробниці Нефертарі [1]

геометричною фігурою. У Єгипті трикутник був покладений в основу об'ємно-просторової системи під назвою «піраміда». Піраміда символізує сходи до Сонця. І чоловіче, і жіноче тіло асоціювалося з перевернутим вершиною вниз рівнобедреним трикутником. Крім того, жіноча фігура у вбранні «калазіріс» асоціюється майже з будь-яким видом єгипетських колон.

Важливе місце в костюмі стародавніх єгиптян грала символіка. Трикутник – символ піраміди, сходин до сонця (спостерігається у формі пов'язок на стегнах «схент», рукавів тунік та «калазіріс»); кільцевидний комір – символ сонця; лотос – це символ сонця, життя, родючості і безсмертя (в оздобленні костюму); змій – символ безмежної влади, жук-скарабей – родючість (в оздобленні костюму, прикрасах та головних уборах).

Стародавнім єгиптянам притаманна досконалість костюму, точно розраховані викрійки, цілком довершені тканини і велика витонченість в обробці та оздобленні одягу. Загальний вигляд і кожна деталь костюму чітко продумані, тут немає нічого випадкового. І хоча чоловічий і жіночий костюм побудований на контрастах як кольору, так і матеріалу, проте це не знижує його виразності, гармонійного цілісного враження. Великі барвисті прикраси та яскравий макіяж контрастують з ніжними білими лляними тканинами, стрункі колоноподібні фігури – з великими чорними париками (рис.1).

Єгиптянам як майстерним ювелірам, неперевершеним фарбувальникам, ткачам, швеям, перукарям, в цілому властиві почуття міри (вміння відібрати головне), гармонії тканини з оздобленням костюму. Прилеглі сукні з тонкої прозорої лляної тканини, оздоблені вишивкою і декором, прикраси, яскравий макіяж та складні зачіски підкреслювали жіночність та красу єгиптянок.

В результаті аналізу історичної, міфологічної, культурологічної, художньої та наукової літератури по проблемі розвитку костюму Стародавнього Єгипту я розробила власну колекцію сучасного жіночого одягу (рис.2).

Рис.2. Моделі-пропозиції сучасного жіночого одягу на основі костюму Стародавнього Єгипту

На сучасному етапі розвитку моделювання одягу дедалі актуальнішим стає використання елементів єгипетського костюму: прилеглий силует одягу, яскраві прикраси та оздоблення, використання прозорих легких тканин, яскравий макіяж тощо. Але художник, який володіє талантом створювати нові, неперевершені витвори мистецтва, що несуть захоплення, радість в навколишній світ, повинен керуватись відчуттям гармонійного поєднання всіх елементів костюму в органічне єдине ціле, що виражає образний, ідейно – художній зміст.

Мої рекомендації щодо конструювання та моделювання сучасного одягу на основі історичного костюму Стародавнього Єгипту:

- використовувати прилеглий силует, а також силует «трапеція»;
- лінію талії розміщувати на найвищому положенні (під грудьми), що створює найбільш вдале пропорційне членування, зорово подовжує фігуру;
- застосовувати такі показники динаміки та пластики костюму: вертикальне (рельєфи) членування форми костюму, використання метричних рядків в оздобленні костюму, спадаючих зборок, драпіровки м'якої тканини;
- центрами моделей можуть бути пояс, яскраве оздоблення горловини, а також поєднання декількох композиційних центрів, взаємозв'язаних між собою;
- використовувати такі метро – ритмічні засоби композиції костюму: активні повтори в об'ємно-просторовій структурі костюму при сильних світлотіньових контрастах (спадаючі складки, зборки, драпіровки м'якої тканини), декоративні ряди, орнамент, оздоблення, прикраси з метро – ритмічними елементами, оздоблювальні шви;
- фактура повинна характеризуватись гладкістю, прозорістю поверхні, що додає легкість, візуально зменшуючи масу форми костюму;
- вдало поєднувати принципи симетрії та асиметрії;

- використовувати такі кольори основного матеріалу та оздоблення при створенні моделей: білий, золотистий, жовтий, оранжевий, червоний, рожевий, блакитний, фіолетовий, синій, зелений; базуватись на поєднанні споріднених та гармонійних контрастних кольорів;
- спиратись на принципі узгодження елементів композиції костюму за допомогою контрасту кольорів; тотожності фактури, оздоблення, масштабності, внесенням нюансу оздоблення.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Кибалова Л., Гербенова О., Ламарова М. Иллюстрированная энциклопедия моды. – Прага: Артия, 1987. – 608с.
2. Неклюдова Т.П. История костюма. – Ростов н/Д.: Феникс, 2004. – 336с.
3. Пармон Ф. М. Композиция костюма: Учебник для ВУЗов. – М.: Легпромбытиздат, 1985. – 264 с.
4. Царство людей. – М.: Росмэн, 1994. – 160с.

Вікторія КОВАЛЬ

ВПЛИВ СОНЯЧНОЇ АКТИВНОСТІ НА ЗЕМНІ ПРОЦЕСИ

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – доктор технічних наук, кандидат фіз-мат наук, професор З.Ю. Філєр

Вступ. Сонце – це велика порівняно з планетами плазмова куля, в середині якої проходять термоядерні реакції з виділенням світла, елементарних частинок та енергії. Завдяки йому може існувати життя, відбуватись зміна пір року, створюючи неповторний вигляд нашої планети. У Всесвіті спостерігається принцип циклічності подій: багаторазове виникнення, існування, зникання. Такий стан притаманний і Сонцю, яке змінюється на протязі свого існування як цілісний організм. На поверхні Сонця (на видимій його частині) проявляються циклічні процеси серед різних утворень, що називаються плямами, факелами, протуберанцями тощо. Людський розум в пошуках істини намагається пояснити ці закономірності. Сонце теж ще залишається загадкою, яка поступово відгадується.

Найважливіші прояви та індекси сонячної активності. Однією з особливостей Сонця є майже періодичні, регулярні зміни різних проявів сонячної активності (СА), тобто всій сукупності спостережуваних явищ, що змінюються (швидко або поволі), на Сонці. Це і *сонячні плями* – області з сильним магнітним полем і внаслідок цього із зниженою температурою, і сонячні спалахи – найбільш могутні і вибухові процеси, які швидко розвиваються, що зачіпають всю сонячну атмосферу над активною областю, і сонячні волокна – плазмові утворення в магнітному полі сонячної атмосфери, що мають вигляд витягнутих (до сотень тисяч кілометрів) волокноподібних структур [4]. Коли волокна виходять на видимий край (лімб) Сонця, можна бачити найбільш грандіозні по масштабах утворення – протуберанці, що відрізняються багатою різноманітністю форм і складною структурою. Сонячні плями – найбільш відомі явища на Сонці. Вперше в телескоп їх спостерігав Г. Галілей в 1610 р. Прекрасні гравюри, що зображають сонячні плями опубліковані в 1613 р. у його знаменитих листах про сонячні плями, з'явилися першими систематичними рядами спостережень. З того часу реєстрація плям то проводилася, то припинялася, то поновлювалася знову. Наприкінці XIX сторіччя два спостерігачі – Г. Шперер в Германії і Е. Маундер в Англії вказали на той факт, що протягом 70-річного періоду аж до 1716 р. плям на сонячному диску, мабуть, було дуже мало. Уже у наш час Д. Еді, заново проаналізувавши всі дані, прийшов до висновку, що дійсно в цей період був спад сонячної активності, названий Маундеровським мінімумом. До 1843 р. після 20-річних спостережень любитель астрономії Г. Швабе з Німеччини зібрав достатньо даних для того, щоб показати, що число плям на диску Сонця циклічно міняється, досягаючи мінімуму приблизно через кожні одинадцять років. Р. Вольф з Цюріха зібрав усі, які тільки міг дані про плями, систематизував їх, організував регулярні спостереження і запропонував оцінювати ступінь активності Сонця спеціальним індексом, що визначає міру "заплямованості" Сонця, враховує як число плям, що спостерігалися в даний день, так і число груп сонячних плям на диску Сонця. Цей індекс відносного числа плям, згодом названий "числом Вольфа", починає свій ряд з 1749 року. Крива середньорічних чисел Вольфа абсолютно чітко показує майже періодичні зміни числа сонячних плям (рис. 1).

Вплив Сонця на Землю. Комплекс явищ, пов'язаних із дією сонячного корпускулярного і електромагнітного випромінювань на геомагнітні, атмосферні, кліматичні, погодні, біологічні та інші геофізичні процеси – предмет особливої дисципліни, яка вивчає сонячно-земні зв'язки. Її основні ідеї були закладені на початку XX ст. видатними російськими вченими К.Е.Ціолковським і О.Л.Чижевським – основоположником геліосоціології і геліобіології, активного дослідника впливу сонячної активності на різноманітні явища, що відбуваються на Землі. Статистично встановлений зв'язок між рівнями сонячної і геомагнітної збуреності і ходом ряду процесів у біосфері Землі (динамікою популяції тварин, епідемій, епізоотій, кількістю серцево-судинного кризу та ін.) [2].

Добові й річні зміни освітленості Землі сонячними променями приводять до складної періодичності нагріву в різних районах. Неоднаковий нагрів ділянок суші, океану і атмосфери приводить до виникнення могутніх течій в океанах, а також до вітрів, циклонів і ураганів в тропіках. Ці переміщення речовини згладжують перепади температури і при цьому роблять сильний вплив на погоду і формують клімат на всій планеті. Можна чекати, що періодичний усталений тепловий режим на Землі повинен забезпечити виключно точну повторюваність погодних явищ в кожному заданому регіоні. У деяких місцях це дійсно так, наприклад, з часів стародавньої історії відомо, що розливи Нілу, пов'язані з опадами в його верхів'ях, як годинник починається в один і той же день тропічного року. Проте в багатьох інших місцях при збереженні загальних закономірностей часто спостерігаються помітні відхилення від середнього. Багато які з них відображені в календарях різних народів, зокрема і в російському (травень холодний – рік родючий, якщо на Євдокію курка може з калюжки напитися, літу теплому бути і так далі)[3]. Проте, дати, наприклад, водохресних і введенских морозів – стійкіші, а різдвяних – менш стійкі. З геології відомо про декілька льодовикових періодів. Всі ці аномалії, хоч би частково, можуть бути пов'язані з сонячною активністю.

Інтерес учених до проблеми сонячно–земних зв'язків викликаний декількома причинами. Перш за все, у міру з'ясування фізичних сторін впливу Сонця на Землю, виявилося величезне прикладне значення цієї проблеми для радіозв'язку, магнітної навігації, безпеки космічних польотів, прогнозування погоди і так далі. Природа Сонця і його значення для нашого життя – невичерпна тема. Про його дію на Землю люди здогадувалися ще в глибокій старовині, внаслідок чого народжувалися легенди і міфи, в яких Сонце грало головну роль. Воно обожнювалося в багатьох релігіях. Дослідження Сонця – особливий розділ астрофізики зі своєю інструментальною базою, зі своїми методами. Роль отримуваних результатів виняткова, як для астрофізики (розуміння природи єдиної зірки, що знаходиться так близько), так і для геофізики (основа величезного числа космічних процесів). Постійний інтерес до Сонця проявляють астрономи, лікарі, метеорологи, зв'язківці, навігатори та інші фахівці, професійна діяльність яких залежить від ступеня активності нашого денного світила, на якому "також бувають плями".

Причини складної періодичності СА не тільки в природі самого Сонця, але і в його взаємодії з планетами сонячної системи. Дані НАСА і його прогноз на майбутні роки говорять про мінімум СА в даний час (2008 р.), і про прогнозований максимум в 2011-2013 рр. [1]. Етапами циклу є: мінімум, підйом, максимум, спад (відповідно 3, 2, 3, 3 роки). Погодні графіки аналогів (1987 і 1998 рр.) дають можливість робити прогнози. У 2009 р. очікується опадів помітно більше, ніж в 2008 р., але вони розподіляться рівномірніше протягом року (рис. 2).

Сонячна активність 1700-2000 рр.

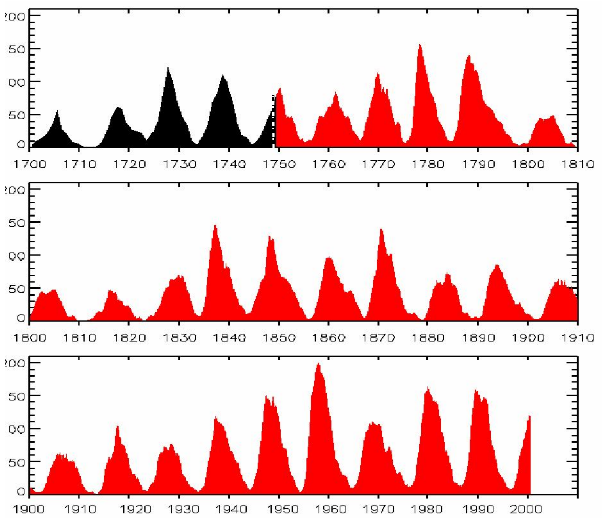


Рис. 1

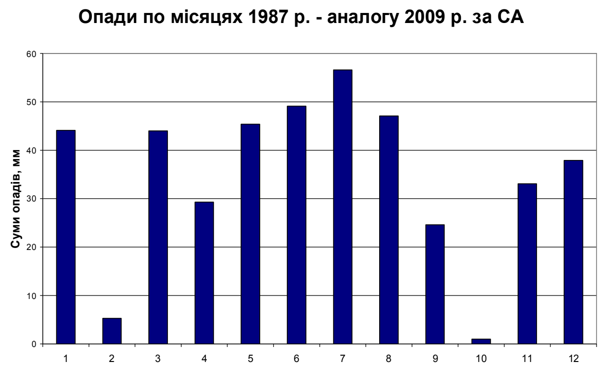


Рис. 2.

Висновок. Знання стану СА та тенденції її зміни дають можливість приймати профілактичні заходи для мінімізації шкідливих наслідків й підсилення позитивних у суспільстві. Тому важливо прогнозувати СА, особливо для прийняття стратегічних рішень.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. http://zhurnal.ape.relarn.ru.
2. Виллет Х.К. Характер связи солнечных и климатических явлений.//Солн. активность и изменение климата. – Л.: Гидрометгиз, 1996. – С. 23-43.
3. Вік живи – вік учись./Упорядковував Березовський І.П. – К.: Рад. Школа, 1961.-34 с.
4. Климишин І. А. Астрономія.- Львів: Світ, 1993. – 382 с.
5. Філєр З.Ю., Дрєєв О.М. Вплив сонячної активності на погоду, врожайність, демографічні та соціально-економічні процеси в 2008-2009 роках. – Кіровоград: Дорада, 2008. – 115 с.
6. Чижевский А.Л. Космический пульс жизни: Земля в объятиях Солнца.-М.: Мысль, 1995.-768 с.

Вікторія КОВАЛЬ

ФОРМУВАННЯ У СТУДЕНТІВ СУЧАСНИХ ПОГЛЯДІВ НА ПИТАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ ЗІР

(студентка V курсу фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент О.В. Волчанський

Необхідність загальної астрономічної освіти обумовлена важливістю внеску астрономії у створення наукової картини світу і формування наукового світогляду сучасних людей.

Астрономія – наука про Всесвіт, яка вивчає основні фізичні характеристики, склад, будову, походження і еволюцію космічних об'єктів і їх систем, космічні явища і космічні процеси. Об'єм і роль астрономічних знань продовжують зростати; виникають нові розділи астрономії, розробляються нові методи і інструменти науки, що підвищують широту, точність і результативність астрономічних спостережень.

Астрофізика – розділ астрономії, що вивчає фізичну природу, хімічний склад і внутрішню будову небесних тіл, передовсім зір. Кінцевою метою курсу є формування в студентів уявлень про розвиток Всесвіту, які відповідають сучасним астрофізичним теоріям. Курс астрономії повинен знайомити з основними ідеями, засвоєння яких буде сприяти наступному накопиченню знань в процесі самоосвіти, орієнтуючи випускників у стрімкому потоці наукової інформації.

До недавніх пір астрономічні тіла ділились на 2 великі групи: зірки (в надрах яких відбуваються термоядерні реакції) та планети й інші малі тіла, в яких немає умов для протікання таких реакцій. У шкільному курсі астрономії до кінця 90-х рр. була прийнята саме така класифікація небесних світил. Однак, порівняно недавно були відкриті космічні тіла, що займають проміжне положення між зірками і планетами. У різних джерелах їх називали по-різному: інфрачервоні, малинові, коричневі, бурі, темні, чорні, тьмяні карлики [5]. За цими небесними тілами в науковій літературі закріпилася назва "коричневі карлики". Їх вивчення дозволяє розширити знання про різноманіття матеріальних об'єктів, а також просунутись на шляху до розв'язання задачі про концентрацію матерії у Всесвіті.

Розглянемо коротко історію дослідження коричневих карликів. Зорі народжуються разом з планетами із розріджених газопилових хмар, які утворюються після вибуху старих зір. Доля зорі та тривалість її життя залежать від початкової маси зародка зорі – протозорі. Якщо вона була у кілька разів більша від маси Сонця, то при гравітаційному стисненні утворюються гарячі зорі спектральних класів О та В. Найменша маса, яка необхідна для початку термоядерних реакцій у надрах зорі, дорівнює 0,1 маси Сонця [3]. Об'єкти меншої маси ніколи у зорі не перетворяться – вони будуть випромінювати енергію тільки в інфрачервоній частині спектра. Такі космічні об'єкти ми спостерігаємо навіть у Сонячній системі – це планети-гіганти Юпітер, Сатурн, Нептун. Білі карлики, в яких ядерні реакції припинилися, є завершальним етапом еволюції більшості зірок. Зорі з масою у кілька разів більшою від сонячної закінчують своє життя грандіозним вибухом. Після спалаху зорі всі планети, які оберталися навколо неї, випаровуються і перетворюються у газопилову туманність, з якої у майбутньому може утворитися нове покоління зір. Тобто у Всесвіті спостерігається своєрідний круговорот речовини: зорі – спалах зір – туманність – і знову народження зір (рис. 1) [1].

Чи можливо провести межу між зіркою і планетою? Ще недавно здавалося, що це зовсім просто: зірка світить власним світлом, а планета — відбитим. Але виявилось, що можуть існувати проміжні об'єкти, в яких термоядерні реакції відбуваються, але ніколи не служать основним джерелом енергії. Їх виявили в 1996 р., але ще задовго до того вони отримали назву коричневих карликів. Коричневі карлики – космічні тіла, що займають по своїх масах проміжне положення між зірками і планетами. Коричневими карликами прийнято називати об'єкти з масами приблизно від 0,01 до 0,08 мас Сонця [4]. Від «нормальних» зірок вони відрізняються тим, що температура в їх надрах ніколи не досягає значень, необхідних для протікання найважливішої термоядерної реакції, – перетворення водню на гелій, яка забезпечує тривале свічення звичайних зірок. Але на відміну від планет, в яких неможливий термоядерний синтез, коричневі карлики на початковому етапі свого життя все ж таки розігріваються настільки, що «спалюють» в термоядерних реакціях деякі рідкісні елементи (дейтерій, літій), що робить їх на короткий час схожими на зірки. Температура поверхні коричневих карликів зазвичай не перевищує 2000 К, тому вони мають темно-червоний або навіть інфрачервоний колір; звідси і назва цих об'єктів (англ. brown dwarf). Відкриттю цих дивних об'єктів передував тридцятирічний пошук, що почався з теоретичного прогнозу.

ис. 1. Круговорот речовини при утворенні та руйнуванні зір.

У 1958 астрофізик індійського походження Шив Кумар (університет штату Віргінія, США) зайнявся теоретичним вивченням маломасивних зірок, припустивши, що можуть існувати зіркоподібні тіла настільки малої маси, що температура в їх надрах виявиться недостатньою для протікання ядерного синтезу. Річ у тому, що в період формування зірки її гравітаційне стиснення зазвичай продовжується до тих пір, поки температура в центрі не досягне рівня, необхідного для протікання термоядерних реакцій. У масивних зірок ця температура досягається при щодо невисокої щільності речовини, у зірок малої маси – при вищою (наприклад, в центрі Сонця щільність плазми перевищує 100 г/см3). У 1963 розрахунки Кумара показали, що у зірок (протозірок) дуже малої маси, що формуються, стиснення зупиняється раніше, ніж температура в їх центрі досягає значення, необхідного для найважливішої термоядерної реакцій – синтезу гелію з водню (4H → He). Причиною зупинки стиснення протозірки служить квантовомеханічний ефект – тиск виродженого електронного газу. Таким чином, при масі зірки менше 0,07–0,08 маси Сонця (точне значення залежить від її хімічного складу) вона не здатна спалювати легкий ізотоп водню, а значить в її житті немає фази головної послідовності – найтривалішого етапу еволюції нормальних зірок. Тому такі об'єкти, взагалі кажучи, не можна називати зірками. Але з іншого боку, це і не планети, оскільки в еволюції об'єкту з масою більше 0,013 маси Сонця, як показують розрахунки, повинна бути коротка термоядерна стадія, в ході якої згорає рідкісний важкий ізотоп водню, – дейтерій, перетворюючись на легкий ізотоп гелію (D + p → He). Цей короткий епізод термоядерного горіння не затримує надовго гравітаційне стиснення протозірки. Температура її поверхні навіть при максимальному розігріванні не перевищує 2800 К, а потім починає знижуватися, і об'єкт практично перестає світитися [4].

Отже, згідно теоретичного прогнозу Кумара, протозірки з масою від 0,013 до приблизно 0,075 маси Сонця в кінці свого гравітаційного стиснення проявляють спробу стати зіркою, але так нею і не стають; їх коротке життя закінчується охолодженням і повним зникненням із небозводу. Такі зірки-невдахи, відкриті «на кінчику пера», Кумар назвав «чорними карликами», але виявити їх довго не вдавалося і новий термін забувся. В середині 1970-х років астрономи з'ясували, що крім спостережуваних в телескоп нормальних яскравих зірок в нашій і інших галактиках присутня величезна кількість невидимої речовини; підозра лягла на тьмяні карликові об'єкти, передбачені Кумаром, і вони знов сталі популярні.

Три десятиліття продовжувалися безрезультатні пошуки цих тьмяних світил. У роботу включалися все нові і нові дослідники. Навіть теоретик Кумар припав до телескопа в надії знайти об'єкти, відкриті ним на папері. Його ідея була проста: виявити поодинокий коричневий карлик дуже складно, оскільки потрібно не тільки зафіксувати його випромінювання, але і довести, що це не далека гігантська зірка з холодною (по зоряних мірках) атмосферою або навіть оточена пилом галактика на краю Всесвіту. Найважче в астрономії — визначити відстань до об'єкта. Тому потрібно шукати карлики поряд з нормальними зірками, відстані до яких вже відомі. Але яскрава зірка засліпить телескоп і не дозволить розгледіти тьмяний карлик. Отже, шукати їх треба поряд з іншими карликами! Наприклад з червоними — зірками гранично малої маси або ж білими — остигаючими залишками нормальних зірок.

Першого коричневого карлика відшукали в 1995 році. Його відкрила група астрономів під керівництвом Рафаеля Реболо з Інституту астрофізики на Канарських островах [5]. За допомогою телескопа на острові Ла-Пальма вони знайшли в зоряному скупченні Плеяди об'єкт, який назвали Teide Pleiades 1, запозичивши назву у вулкана Піко-де-Тейде на острові Тенеріфе. Правда, деякі сумніви в природі цього об'єкту залишалися, і поки іспанські астрономи доводили, що це дійсно коричневий карлик, в тому ж році про своє відкриття заявили їх американські колеги.

Питання про походження і чисельність коричневих карликів поки залишаються відкритими. Перші підрахунки їх кількості в молодих зоряних скупченнях типу Плеяд показують, що в порівнянні з нормальними зірками загальна маса коричневих карликів, мабуть, не так велика, щоб «списати» на них всю приховану масу Галактики [6]. Але цей висновок ще потребує перевірки. Загальноприйнята теорія походження зірок не дає відповіді і на питання, як утворюються коричневі карлики. Як з'ясувалося недавно, деякі з коричневих карликів джерелами радіо- і навіть рентгенівського випромінювання [2].

Отже, в майбутньому цей новий тип космічних об'єктів обіцяє нам немало цікавих відкриттів. Вивчення цих світил дозволило б сформувати в студентів більш повну картину про розвиток Всесвіту і різноманіття небесних світил.

БІБЛІОГРАФІЯ

1.Дагаев М. М., Демин В. Г., Климишин И. А., Чаругин В. А. Астрономия. - Москва: Просвещение, 1993.
2.Пришляк М. П.. Астрономія: підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – Харків: Ранок, 2003.
3. Климишин І. А.. Астрономія.– Львів: Світ, 1993.
4. Сурдин М. О. Астрономия. – Москва: Просвещение, 2004.
5. www.universetoday.com.
6. www.astronet.ru.

Наталія КРИСТАПЧУК

ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВІ МЕТОДИ АФІННИХ КРИПТОСИСТЕМ

(магістрантка фізико - математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент З.П. Халецька

Проблема захисту інформації шляхом її перетворення, що виключає її прочитання сторонньою людиною хвилювала людський розум з давніх часів. Історія криптографії – однолітка історії людської мови. Більш того, спочатку писемність сама по собі була криптографічною системою, тому що в древніх суспільствах нею володіли тільки обрані. Проблемою захисту інформації шляхом її перетворення займається криптологія (від грецького kryptos – таємний, logos – наука). Криптологія розділяється на два напрямки – криптографію і криптоаналіз. Мети цих напрямків прямо протилежні. Криптографія займається пошуком і дослідженням математичних методів перетворення інформації. Сфера інтересів криптоаналізу – дослідження можливості розшифровування інформації без знання ключів.

Криптогра́фія (gráphein — писати) — наука про математичні методи забезпечення конфіденційності і автентичності (цілісності і справжності авторства) інформації – розвинулась з практичної потреби передавати важливі повідомлення найнадійнішим чином. Повідомлення, що передається називається відкритим текстом, замасковане – шифрованим текстом або шифротекстом. Відкритий текст і шифротекст записуються в деяких алфавітах. Зазвичай ці алфавіти збігаються (але не завжди) і складаються зі скінченної кількості (N) «букв»: A1 = {0;1}; A2 = {a, b, c, d, e, f, g, h, I, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}, N2=26; A3 = {українська абетка}, N3=33. В алфавітах також символами є знаки пробіл, пунктуації, що використовуються при записі повідомлень.

Відкритий текст і шифротекст розбиваються на елементарні повідомлення («елементи»). Елементом може бути буква, пара букв - біграмма, трійка букв – триграма, або, в загальному випадку, – k-грама. Шифруюче перетворення – функція, яка перетворить елемент відкритого тексту в елемент шифротекста, тобто це відображення f з множини P – всіх можливих елементів відкритого тексту в множину C – всіх можливих елементів шифротекста (f взаємно-однозначне). Дешифруюче перетворення – функція f-1 - діє в оберненому напрямку. Має місце діаграма:

$$P \xrightarrow{f} C \xrightarrow{f^{-1}} P \quad (1)$$

Довільна конструкція типу (1) називається криптосистемою [1].

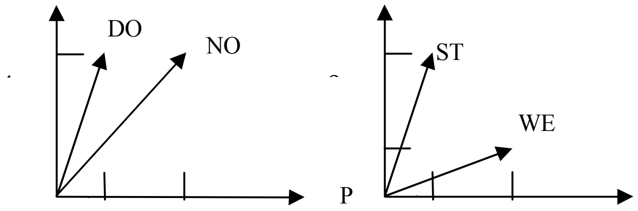
Перший крок для побудови криптосистеми складається з позначення всіх елементів відкритого і шифрованого тексту математичними об'єктами, на яких зручно будувати функції. Такими об'єктами можуть бути числа з деякого діапазону, вектори або точки деякої кривої.

Так однобуквені елементи повідомлення з латинським алфавітом (латинський текст) зручно позначати порядковими номерами букв A–0 B–1 … S–18 X–23 Z–25; якщо позначити знак пробіла числом 26, тоді алфавіт буде 27-буквений. Якщо елементарними повідомленнями є біграмми букв 27 буквеного алфавіту: $x, y \in \{0;1...26\}$, то в якості позначення для біграмми можна взяти ціле число: $27x + y \in \{0;1...728\}$. Тобто ми розглядаємо букви алфавіту як розряди числа $(xy)_{27}$, записаного в системі числення за основою 27, а саму біграмму як двозначне число за основою 27.

В загальному випадку k- буквені блоки N-буквенного алфавіту можна позначити цілими числами від 0 до Nk –1, розглядаючи кожен такий блок як k-розрядне ціле число в системі числення з основою N [2, ст.62]. Інший спосіб тлумачення k-блоків – це представлення їх як векторів в $\left(Z/_{N}Z\right)^{k}$.

Приклад

Нехай використовується 26-буквений алфавіт $A = \{A - Z\}$ з числовим еквівалентом {0-25}. Тоді кожній біграмі ставиться у відповідність вектор, якому відповідає вузол квадратної решітки 26х26: $NO \leftrightarrow \begin{pmatrix}13\\14\end{pmatrix}, DO \leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\14\end{pmatrix}, WEST \leftrightarrow \begin{pmatrix}22\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18\\19\end{pmatrix}$



Розглянемо випадок коли елементом повідомлення є букви N-алфавіту: $\{0;1...N-1\}$. Тоді, за означенням, шифруюче перетворення є перестановкою цих N чисел. Для прискорення процесу шифрування та дешифрування зручно мати досить просте правило реалізації такої перестановки. Один зі способів – розглядати алфавіт як множину $Z/_{N}Z$ і використовувати в ньому «+» і «·» за $\mod N$. Під перетворенням зсуву розуміємо відображення: $C = f(P) = P + b(\mathrm{mod}\,N)$. Для дешифрування елемента шифротексту $C \in \{0;1...N-1\}$ потрібно обчислити $P = f^{-1}(C) = C - b(\mathrm{mod}\,N)$.

Наприклад, в українському алфавіті з числовим еквівалентом $\{0;1...32\}$ слово «залік» (9 0 15 11 14) перетвориться під дією функції: $f(P) = P + 5(\mathrm{mod}\ 32) = \begin{cases} P+5, P < 27 \\ P-27, P \geq 27 \end{cases}$ в шифротекст «кдрмп» (32: 14 5 20 16 19). Для дешифровки треба віднімати 5 за модулем 32: $f^{-1}(C) = C - 5(\mathrm{mod}\,32)$.

Узагальненням шифру зсуву є афінний шифр: $C = f(P) = aP + b(\mathrm{mod}\,N), \quad (a, N) = 1$.

Афінні шифри – це підклас шифрів заміни, що включає шифр зсуву (a=1), лінійний шифр (b=0) так і, як частковий випадок, шифр Віженера і навіть шифр перестановки з фіксованим періодом [3].

Дешифруюче афінне перетворення знаходиться за формулами: $P = f^{-1}(C) = a'C - b'(\mathrm{mod}\,N), a' = a^{-1}(\mathrm{mod}\,N), b = -a^{-1}b(\mathrm{mod}\,N)$.

Приклад

Виконати дешифрування тексту:

Е Р У. Т Ф Я – Н Р К Ф И. Ю – Я Л Ф К Є Я – Ф. Ґ Ь Д ! К Ь П Г _ ! Е Ю У Ю Ч – І М Н Л Я Ґ Ю У Й Н. Щ Ж Х Г І Ф Ю Ж Х П Н ! Й Ю ! П _ Й Ю ! П _ Є, Б Г _ К Н ! Ф ! В Ю ! М Н ! П Н – П Н Г _ Є, Б Я Я Й І ! Ґ _ Р Н В Д Ж – Ь Т ! – І М Н Ж А ! Е І У _ Ш Г І – Н ! М І Й В Д Ґ І М Н О Я

записаного в українському алфавіті з відповідними цифровими еквівалентами, якщо відомі ключі $a = 17, b = 11$.

А	Б	В	Г	Ґ	Д	Е	Є	Ж	З	И	І	Ї	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ь	Ю	Я	__	:	"	,	–	?	!	.	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	

Розв'язання

Знайдемо цифровий аналог шифротексту:

6 30 6 34 14 39 16 17 13 30 37 39 28 34 24 17 16 29 39 37 11 16 17 39 40 4 30 5 39 14 30 19 3 33 39 6 31 23 31 27 37 11 16 17 15 32 4 31 23 13 17 40 29 8 25 3 11 24 31 8 25 19 17 39 13 31 39 19 33 7 36 1 3 33 14 17 39 24 39 2 31 39 16 17 39 19

17 37 19 17 3 33 7 36 1 32 32 13 11 39 4 33 20 17 2 5 8 37 30 22 39 37 11 16 17 8 0 39 6 11 23 33 28 3 11 37 17 39 16 11 13 2 5 4 11 16 17 18 32

Визначимо дешифруюче афінне перетворення : $f^{-1}(c) = a'P + b'$

$a' \equiv a^{-1}(\bmod N)$, $b' \equiv -a^{-1}b(\bmod N)$

$N = 41, a = 17, (41,17) = 1 \Rightarrow \exists! a^{-1} : a \equiv 1(\bmod 41)$

Застосуємо алгоритм Евкліда і знайдемо представлення $17x + 41y = 1$, тоді $x = a^{-1}$: $41 = 17 \cdot 2 + 7; 17 = 7 \cdot 2 + 3; 7 = 3 \cdot 2 + 1$. Звідки $1 = 41 \cdot 5 - 12 \cdot 17$ і $(-12) \cdot 17 \equiv 1(\bmod 41)$, $a^{-1} \equiv -12 \equiv 29(\bmod 41)$

$b' = -a^{-1} \cdot b \equiv 12 \cdot 11 \equiv 9(\bmod 41)$

Отримаємо таке дешифруюче афінне перетворення: $f^{-1} = 29C + 9$, застосування якого до щифротексту дасть шукане повідомлення: 19 18 19 11 5 33 22 10 17 18 16 33 1 11 8 10 22 30 33 16 0 22 10 33 21 2 18 31 33 5 18 27 14 23 33 19 6 20 6 13 16 0 22 10 34 35 2 6 20 17 10 21 30 36 37 14 0 8 6 36 37 27 10 33 17 6 33 27 23 7 28 38 14 23 5 10 33 8 33 26 6 33 22 10 33 27 10 16 27 10 14 23 7 28 38 35 35 17 0 33 2 23 15 10 26 31 36 16 18 32 33 16 0 22 10 36 9 33 19 0 20 23 1 14 0 16 10 33 22 0 17 26 31 2 0 22 10 39 35

Таким чином ми отримаємо таке повідомлення:

Попід тином біжить мати свою дочку переймати : « Вернись, – каже, – чи не чуєш ? Куди ж це ти чимчикуєш ? » « На вулицю, моя мати, З парубками танцювати ! »

Якщо, ми не маємо інформації про правило шифрування і дешифрування, але намагаємося прочитати повідомлення, то така дія називається зломом шифру. Для злому криптосистеми треба інформація двох видів:

відомості про природу (структуру) криптосистеми, наприклад, який алфавіт чи які елементи перетворення використовуються;

інформація про конкретний вибір деяких параметрів шифрування.

Для дешифрування тексту з афінним перетворенням використовують один з методів – частотний аналіз, в основі якого лежить співставлення символам шифротексту, що найбільше зустрічаються, таких що мають найвищу частотність для даного алфавіту. Складається система 2-х конгруенцій: $\begin{cases} a'C_1 + b' \equiv P_1(\bmod N), P_1 \leftrightarrow C_1 \\ a'C_2 + b' \equiv P_2(\bmod N), P_2 \leftrightarrow C_2 \end{cases}$

Дана система може мати єдиний розв'язок, а може мати і декілька. Тоді перебираємо одержані розв'язки до розшифрування, щоб одержати зв'язний текст. У випадку коли є декілька розв'язків можна знову використати частотний аналіз розглядаючи третій за частотою символ алфавіту.

Для дешифрування біграмного шифру використовується частотний аналіз пар символів. Наприклад в англійській мові найчастіше зустрічаються th, he, e _,s _, _ t. Для розкриття біграмної системи треба знати шифротекст, що відповідає двом різним елементам (біграммам) відкритого тексту. Далі це приводить знову до системи конгруенцій аналогічно однобуквеним елементам.

Шифр Віженера – частковий випадок шифру зсуву, був розповсюджений протягом кількох століть. Він полягає в тому, що текст розбивається на k-блоки з деяким заданим k, які можна розглядати як вектори в (Z/NZ)k. Зафіксуємо деякий вектор $\vec{B} \in (Z/_N Z)^k$, що відповідає деякому ключовому слову. Шифрування відбувається векторним зсувом: $C = P + B$, де С (елемент шифротексту), Р (елемент відкритого тексту), $\vec{B}$ – вектори з цілочисельними координатами за $\bmod N$.

Шифр Віженера зашифрується так само легко як і шифр зсуву окремих букв. При відомих або вгаданих N і k застосовується частотний аналіз перших букв кожного блока для визначення першої компоненти вектора $\vec{B}$, і потім досліджуються другі букви блоків і т. д.

Ми розглянули афінні відображення при шифруванні в Z/NZ. Аналогічна ситуація виникає, коли елементарними повідомленнями є біграми – вектори. Тоді в (Z/NZ)2 використовуються 2x2-матриці, які позначаються А.

Приклад

Використовуючи афінне перетворення біграм $f(P) = AP + B$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ зашифрувати повідомлення «погода гарна» та знайти дешифруюче перетворення в 34-буквеному українському алфавіті (пробіл_-33).

Розв'язання

Числовим еквівалентом для «погода гарна» буде послідовність векторів $\begin{pmatrix} 19 \\ 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 33 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \end{pmatrix}$. Застосуємо задане перетворення за модулем 34:

$$C = AP + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 19 & 3 & 5 & 33 & 0 & 17 \\ 18 & 18 & 0 & 3 & 20 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 & 60 & 10 & 75 & 60 & 34 \\ 277 & 165 & 35 & 255 & 160 & 119 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 104 & 72 & 22 & 87 & 72 & 46 \\ 280 & 168 & 38 & 258 & 163 & 122 \end{pmatrix} \underset{\bmod 34}{=} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 22 & 19 & 4 & 12 \\ 8 & 32 & 4 & 20 & 27 & 20 \end{pmatrix}$$

тобто шифроване повідомлення має вигляд «В Ж Ґ Я Т Ґ П Р Ґ Ч Ї Р»

Знайдемо дешифруюче перетворення, для цього користуючись формулою $f^{-1}=A'\cdot C+B'$, де $A'=A^{-1}(\bmod 34), B'=-A^{-1}B(\bmod 34)$.

Спочатку знайдемо $A^{-1}(\bmod 34)$. $D=|A|=-5\equiv 29(\bmod 34),\ 29\neq 0$, отже $\exists A^{-1}(\bmod 34)=\begin{pmatrix} D^{-1}a_{22} & -D^{-1}a_{12} \\ -D^{-1}a_{21} & D^{-1}a_{11}\end{pmatrix}$ і, відшукавши за алгоритмом Евкліда

$D^{-1}\equiv 27(\bmod 34)$ маємо $A^{-1}=\begin{pmatrix} 27\cdot 8 & -27\cdot 3 \\ -27\cdot 7 & 27\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 216 & -81 \\ -189 & 54\end{pmatrix}\underset{\bmod 34}{=}\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 15 & 20\end{pmatrix}$

Знайдемо тепер $B'=-A^{-1}B(\bmod 34)=-\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 15 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 207 \\ 240\end{pmatrix}\underset{\bmod 34}{=}-\begin{pmatrix} 3 \\ 2\end{pmatrix}\underset{\bmod 34}{=}\begin{pmatrix} 31 \\ 32\end{pmatrix}$

Отже, дешифруюче перетворення має вигляд:

$f^{-1}(C)=\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 15 & 20\end{pmatrix}\cdot C+\begin{pmatrix} 31 \\ 32\end{pmatrix}$.

Виконаємо перевірку: $f^{-1}=\begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 15 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 22 & 19 & 4 & 12 \\ 8 & 32 & 4 & 20 & 27 & 20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 31 \\ 32\end{pmatrix}=$

$\underset{\bmod 34}{=}\begin{pmatrix} 223 & 751 & 379 & 679 & 646 & 595 \\ 222 & 732 & 442 & 717 & 632 & 612\end{pmatrix}\underset{\bmod 34}{=}\begin{pmatrix} 19 & 3 & 5 & 33 & 0 & 17 \\ 18 & 18 & 0 & 3 & 20 & 0\end{pmatrix}$, що відповідає тексту «погода гарна».

Під класичною криптосистемою (або системою з секретним ключем чи симетричною криптосистемою) розуміють таку криптосистему, в якій реалізувати перетворення дешифрування можна приблизно за такий же час, що і саме шифрування. Всі наведені вище криптосистеми є класичними. Для них немає необхідності задавати ключ дешифрування, якщо відомі алгоритм і ключ шифрування. Так, для афінної криптосистеми в Z/N^kZ, якщо відомий ключ шифрування $K_E=(a,b)$, можна обчислити ключ дешифрування $K_D=(a^{-1}(\bmod N^k),-a^{-1}b(\bmod N^k))$ за допомогою алгоритма Евкліда за $O(\log^3 N^k)$ двійкових операцій [2, 92]

БІБЛІОГРАФІЯ:

1. С.Баричев, Р.Серов. Основы современной криптографии. Москва: Горячая линия – Телеком, 2001
2. Коблиц Н. Курс теории чисел и криптографии. – М.: Научное издательство ТВП, 2001.
3. Ростовцев А. Алгебраические основы криптографии. – СПб.: Мир и семья-Интерлайн, 2000.
4. http://www.nbuv.gov.ua/new/2007/05_crypto.html

Євгенія КУЛЬКОВА

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ КООРДИНАТ ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ КОНКУРСНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент Л.В. Ізюмченко

1. Постановка проблеми. В умовах сучасної школи дієвим засобом формування мотивації до навчання, підвищення пізнавальної активності учнів, розвитку їх творчих здібностей, поглиблення і розширення знань учнів з предмету є предметні олімпіади школярів, які сприяють розвитку умінь розв’язувати задачі підвищеної складності.

Актуальність даної теми зумовлюється тим, що метод координат спрощує розв’язання багатьох складних геометричних та алгебраїчних задач, доведення теорем, дає можливість спростити виклад теоретичного матеріалу.

2. Аналіз попередніх досліджень. Формування творчої особистості учня, розвиток творчого мислення учнів у процесі навчання математики досліджували Швець В.О., Хмара Т.М., Скафа О.І. [1], Слєпкань З.І. [2], Чашечникова О.С., Ріжняк Р.Я., Ізюмченко Л.В. та ін. Системний підхід в організації розв’язування нестандартних та олімпіадних задач досліджували Радченко В.М., Нагорний В.Н., Лейфура В.М., Вишенський В.А., Плахотник В.В., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В., Теплінський О.Ю., Мітельман І.М., Рабець К.В., Вороний О.М., Шунда Н.М. Дослідження геометричної складової у системі математичної освіти знаходимо у Бевза Г.П., Зеленяка О.П., Швеця В.О., Ясінського В.А.[3] та ін., вивчення координатного методу та векторної алгебри – у Апостолової Г.В., Зеленяка О.П., Осадчої Р.В., Ясінського В.В. [4], Ясінського В.А. та ін.

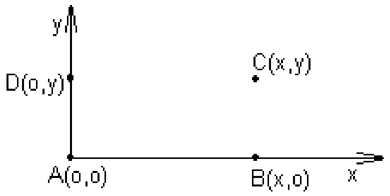
3. Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених розв’язуванню геометричних задач, проблема використання методу координат до розв’язування конкурсних задач висвітлена недостатньо, дуже рідко зустрічається використання методу координат до дослідження геометричних місць точок, задач на побудову, доведення та обчислення. Ми розглядаємо сьогодні аспекти застосування методу координат до розв’язування різних типів конкурсних геометричних задач, які є актуальними на цей час і які можна оцінити у розрізі досвіду роботи з учнями секції «Математика» Кіровоградського територіального відділення Малої академії наук.

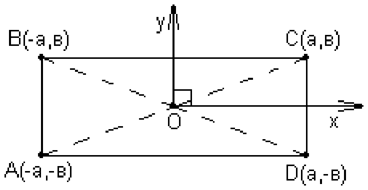
4. Формулювання цілей статті. Стан математичної підготовки учня характеризується в першу чергу умінням розв’язувати задачі. Не випадково, що в практиці сучасного навчання математики розв’язанню задач приділяється значна частина навчального часу. Розв’язування задач – це основний засіб розвитку математичного мислення. Очевидно, мова йде не про вправи тренувального характеру, а про нестандартні задачі, пошук розв’язання яких, як і нестандартні рішення традиційних задач, є важливими складовими на шляху розвитку творчих здібностей особистості. Щоб пошук і створення способу розв’язування математичних задач відбувались за певним планом, учні повинні володіти основними способами розв’язування, серед яких можна виділити такі основні: 1) розбиття задачі на підзадачі; 2) перетворення задачі; 3) кодування об’єктів задачі. Використання методу координат передбачає кодування об’єктів задачі – перехід від від однієї мови, геометричної, до іншої алгебраїчної. Переваги методу координат розв’язання геометричних задач перед синтетичним методом, за якого безпосередньо розглядаються фігури і кожна задача потребує особливого підходу, в його алгоритмічності, за допомогою методу координат будь-яка геометрична задача зводиться до більш простої, алгебраїчної.

Метою статті є аналіз основних аспектів застосування методу координат до розв’язання геометричних задач підвищеного та поглибленого рівня.

5.1. Метод координат та його місце у чинній програмі. Метод координат – це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел або інших символів. Числа, за допомогою яких визначається положення точки, називають її координатами. Перше застосування координат пов’язане з астрономією і географією, з потребою визначити положення світил на небі та певних об’єктів на поверхні Землі під час складання календаря, зоряних та географічних карт. Вперше ідеї методу координат систематично виклали за допомогою невід’ємних чисел П. Ферма (1601 - 1655) і французький філософ, математик, фізик і фізіолог Рене Декарт у своїй праці «Геометрія» у 1637 році.

Згідно нової діючої навчальної програми в пропедевтичному плані з декартовими координатами учні вперше ознайомлюються у 5 класі, вивчаючи координатний промінь; у 6 класі в темі «Раціональні числа» вивчають координатну пряму; з 7 по 12 класи в алгебрі здобуті знання і вміння використовуються при побудові графіків функцій, графічному розв’язанні рівнянь, нерівностей та їх систем. У геометрії в 9 класі вивчається тема «Декартові координати на площині» та «Вектори на площині», а в 11 класі – «Вектори і координати», у якій розглядаються такі питання: вектори у просторі; дії над векторами; розкладання вектора на складові; прямокутні координати в просторі, дії над векторами, що задані координатами; формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками; рівняння площини, сфери. Під час опрацювання теми «Декартові координати на площині» учні знаходять координати середини відрізка, відстань між точками, знайомляться з рівняннями кола, прямої. В основі цих операцій лежать суто арифметичні операції: знаходження середнього арифметичного, квадратного кореня із певної суми квадратів, які ґрунтуються на теоремі Фалеса і теоремі Піфагора.

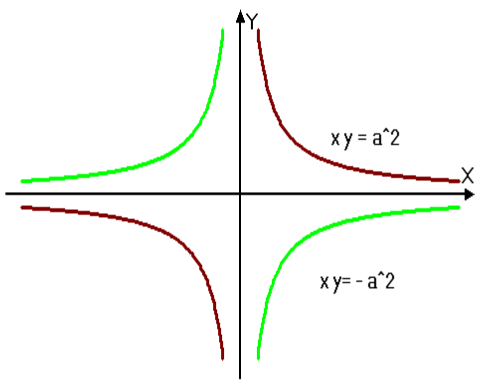




5.2. Відшукання ГМТ, що задовольняє дані умови.

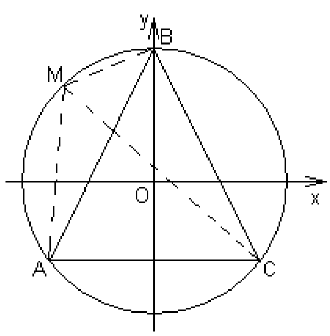
Задача 1. Вершину А прямокутника ABCD зафіксовано, а дві протилежні (B і D) ковзають по двох взаємно перпендикулярних прямих, при цьому площа прямокутника залишається незмінною, і дорівнює a^2. Знайти ГМТ вершин С.

Розв’язання. Виберемо в якості двох взаємно перпендикулярних прямих, по яких ковзають точки В і D, вісі Ох, Оу, тоді координати вершин прямокутника А(0, 0), В(х, 0), D(0, у), С(х, у). Відстані АВ=|х|; АD=|у|. Площа прямокутника S=|х|·|у| за умовою є незмінною, рівною a^2; маємо $|x \cdot y| = a^2$, звідки $x \cdot y = \pm a^2$ – рівняння двох гіпербол (ГМТ вершин С).



Задача 2. Дано прямокутник ABCD. Визначити ГМТ площини, для яких суми відстаней до протилежних вершин однакові: $AX + CX = BX + DX$.

Розв’язання. Виберемо в якості початку координат точку перетину діагоналей $O = (AC) \cap (BD)$ прямокутника, вісі напрямимо вздовж сторін прямокутника: $OX \| AD, OY \| AB$, нехай розміри прямокутника $2a \times 2b$, $a \neq 0, b \neq 0$. Координати вершин позначені на рисунку до задачі, нехай точка, що належить шуканому ГМТ, має координати $X(x, y)$, тоді суми відстаней, про які йдеться в умові: $AX + CX = \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, $BX + DX = \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}$. Прирівняємо і піднесемо до квадрата, після спрощення отримаємо $xy = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$ – рівняння

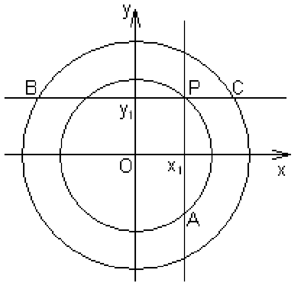


прямих, що проходять через середини протилежних сторін прямокутника і перпендикулярні до них (шукане ГМТ).

5.3. Метод координат розв'язування задач на доведення.

Задача 3. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин вписаного в нього правильного трикутника не залежить від положення точки на колі.

Оберемо центр кола O за початок координат і спрямуємо вісь Oy вздовж прямої OB, нехай R – радіус кола,



визначимо кути: $\angle BOA = 120^0$ $\angle XOA = 210^0$, $\angle COB = 120^0$, $\angle XOC = -30^0$. Тоді координати точок: $A\left(-\frac{R\sqrt{3}}{2};-\frac{R}{2}\right)$, $B(0,R)$, $C\left(\frac{R\sqrt{3}}{2};-\frac{R}{2}\right)$. Координати довільної точки $M(x;y)$ кола задовольняють рівняння кола $x^2 + y^2 = R^2$.

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(x + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2 + x^2 + (y-R)^2 + \left(x - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2 =$$

$= 3(x^2 + y^2) + 3R^2 = 6R^2$, тобто сума квадратів вказаних в умові відстаней не залежить від положення точки M на колі.

Задача 4. Через довільну точку P меншого з двох концентричних кіл радіусів R, r провели пряму, яка перетинає більше коло у точках B і C. Перпендикуляр до (BC), проведений через точку P, перетинає менше коло в точці A. Доведіть, що сума квадратів відстаней $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$ не залежить від положення точки P на колі.

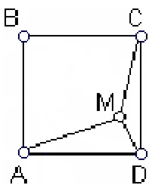
Введемо систему координат: через центр O даних кіл проведемо вісі $Ox \| BC$ і $Oy \perp Ox$, тоді $Oy \| AP$: $P(x_1; y_1)$, $A(x_1; -y_1)$, $C(x_2, y_1)$, $B(-x_2; y_1)$. Обчислимо

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = (2y_1)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 =$$

$$= 2(x_1^2 + y_1^2) + 2(x_2^2 + y_1^2) = 2r^2 + 2R^2$$

– отримана сума не залежить від координат точки $P(x_1; y_1)$, а отже не залежить від положення точки P на колі.

5.4. Метод координат розв'язування задач на обчислення



Задача 5. Точка M знаходиться в площині квадрата $ABCD$ і $MA = 6$ см, $MC = 4$ см, $MD = \sqrt{2}$ см. Знайти площу квадрата.

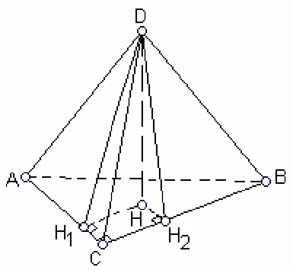
Нехай початок координат співпадає з точкою A, вісь абсцис напрямлена від точки A до D вісь ординат – від точки A до B і ехай сторона квадрата дорівнює а см, тоді координати точок $A(0;0); B(0;a);$ $C(a;a); D(a;0)$; координати точки $M(x;y)$. Врахуємо умову задачі, отримаємо:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ (x-a)^2 + y^2 = 2, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 16, \end{cases} \Big| \cdot(-1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ 2xa - a^2 = 34, \\ 2ya - a^2 = -14, \end{cases} \quad (a^2 + 34)^2 + (a^2 - 14)^2 + 36 \cdot 4a^2 = 0,$$

звідки $a^4 + 68a + 1156 + a^4 - 28a + 196 - 144a^2 = 0$, а тоді

$$2a^4 - 104a + 1352 = 0 \Leftrightarrow a^4 - 52a + 676 = 0 \Leftrightarrow (a^2 - 26)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 26.$$

Відповідь. Площа квадрата дорівнює 26 см2.



Задача 6. Знайти об'єм трикутної піраміди $ABCD$, якщо $AB = 13$, $AC = 5$, $BC = 12$, $AD = 15$, $BD = 14$, $CD = 16$.

Об'єм піраміди $V_{тр} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$. Так як $\angle ACB = 90^0$, то нехай початок координат співпадає з точкою C, вісь абсцис напрямлена від точки C до A, вісь ординат – від точки C до B, вісь аплікат – перпендикулярно до площини ABC, тоді координати точок $C(0;0;0)$; $A(5;0;0)$; $B(0;12;0)$; $D(x;y;z)$; $|z|$ – відстань від точки D до площини ABC, а тому є висотою піраміди. Врахуємо умову задачі, отримаємо:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16^2, \\ (x-5)^2 + y^2 + z^2 = 15^2, \\ x^2 + (y-12)^2 + z^2 = 14^2, \end{cases} \Big| \cdot(-1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16^2, \\ -10x = -56, \\ -24y = -204, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 28/5, \\ y = 17/2, \\ z = \pm\frac{7}{10}\sqrt{311}, \end{cases}$$

площа основи $S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ (кв.од.); об'єм $V_{тр} = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot \frac{7\sqrt{311}}{10} = 7\sqrt{311}$ (куб.од.).

Задача 7. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x-14)^2+(y-4)^2} = 13; \\ 3xy + y = 4. \end{cases}$$

Розглянемо у довільній прямокутній системі координат такі точки: $A(2;-1)$, $B(14;4)$, $M(x;y)$. Знайдемо довжини відрізків: $MA = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$, $MB = \sqrt{(x-14)^2+(y-4)^2}$, $AB = \sqrt{12^2+5^2} = 13$. З урахуванням першої умови системи маємо $MA + MB = AB \Rightarrow M \in [AB]$. Складемо рівняння відрізка $[AB]$ та перепишемо нашу систему у вигляді:

$$\begin{cases} 5x - 12y - 22 = 0; \\ 2 \le x \le 14; \\ 3xy + y = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \left(5; \tfrac{1}{4}\right).$$

Наведені задачі пропонувалися на Всеукраїнському етапі конкурсу-захисту учнівських науково-дослідницьких робіт МАН.

Розв'язання конкурсних задач на уроках, гуртках та інших видах позакласних занять дозволяє учням накопичувати досвід у зіставленні, спостереженні, виявляти нескладні математичні закономірності, висловлювати гіпотези, які потребують доведень. Тим самим створюються умови для розвитку дедуктивних міркувань. Крім того, такі задачі допоможуть вчителеві у вихованні таких моральних якостей особистості як працьовитість, завзятість у досягненні мети, наполегливість, старанність тощо. І насамкінець, від ефективності використання задач у навчанні математиці значною мірою залежить не тільки якість навчання, виховання і розвитку учнів, але і ступінь їхньої практичної підготовленості до наступної за навчанням діяльності в будь-якій сфері народного господарства і культури.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Скафа О.І. Навчання доведенням та евристики //Математика в школі. –2004. – №5. – С. 14-19.
2. Слєпкань З.І. Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики //Математика в школі. – 2003. – №3. – С. 7-13.
3. Ясінський В.А. Геометричні задачі: навчально-методичний посібник. – Львів: Каменяр, 2003. – 76 с.
4. Ясінський В.В. Олімпіадні задачі з геометрії: навчально-методичний посібник. – Київ: Шкільний світ, 2008. – 127 с.

Артем ЛАБЕНКО

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕНИМИ МАТРИЦЯМИ

(магістрант фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фіз-мат наук, доцент Г. В. Завізіон

З розвитком новітніх технологій все частіше доводиться стикатися з різноманітними прикладними задачами, які приводять до математичних моделей, що описуються системами диференціальних рівнянь із різного роду виродження. Наприклад, в задачах оптимального керування, лінійного програмування, економіки, теорії пружності, хімії, біології та багато інших, досить часто зустрічається система вигляду

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

де x(t),f(t)-n- вимірний вектор; A(t),B(t)-(n x n)- матриці, причому det B(t) = 0 на відрізку [0;T].

А, якщо задача потребує ще і врахування «малих» збурювальних факторів, які часто і дуже суттєво впливають на перебіг різних процесів, то доводиться мати справу з системами із малим параметром є при похідних:

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{2}$$

де h > 0, 0 < ε << 1 і матриці B(t,ε) вироджена при всіх значеннях ε або при ε = 0.

Проте, як відомо систематичне вивчення таких систем розпочалося недавно, з початку 70-х років XX ст. [1,3,5], хоча перші результати, що стосуються систем із сталим коефіцієнтом, з'явилися значно раніше. На цей час найбільш дослідженою виявилася теорія лінійних систем із сталими коефіцієнтами, в якій у достатній мірі було розвинуто загальну теорію і розроблено ефективні методи знаходження розв'язків. А ось щодо теорії вироджених систем із змінними коефіцієнтами, то вона потребує подальшого дослідження та розробки ефективних методів знаходження розв'язків таких систем.

Серед перших досліджень присвячених цій тематиці, слід назвати праці В.О. Єрмакова і Ю.Д., Шлапка та ін. [2,4,6] в яких розглядаються системи типу (1) з періодичними коефіцієнтами та запропоновано метод зниження порядку системи для дослідження структури розв'язків.

З огляду на сказане, на особливу увагу заслуговують певні теоретичні відомості про регулярні та сингулярні в'язки матриць.

Регулярні та сингулярні в'язки матриць. Нехай А, В — прямокутні матриці розміром (т х п), а X- довільний параметр. Тоді λ- матриця А-λВ називається в'язкою.

Означення 1. В'язка матриць А-λВ називається регулярною, якщо виконуються такі умови:

А та В — квадратні матриці одного й того самого порядку;

визначник det (А–λВ) не дорівнює тотожно нулю. В решті випадків (m ≠ n або т = п, але det (А – λВ ≡ 0)) в'язка матриць називається сингулярною.

Означення 2. Дві в'язки матриць А–λВ та А1–λВ1 однакового розміру (дахи) називаються строго еквівалентними, якщо існують дві неособливі квадратні матриці Р і Q т -го та k-го порядків відповідно такі, що

Р(А – λВ)Q = А1–λВ1

Ця рівність рівнозначна виконанню одночасно двох рівностей PAQ = А1;PBQ = В1

Матриці Р і Q надалі називатимемо перетворювальними матрицями в'язки. Подібно до того як для будь-якої квадратної матриці А існує неособлива матриця V, що зводить матрицю А до канонічного вигляду, так і для будь-якої в'язки матриць (тобто для пари матриць А та В) існують перетворювальні матриці Р і Q, які зводять в'язку матриць до деякого найпростішого (канонічного) вигляду.

Скінченними елементарними дільниками в'язки матриць Ã̃λВ називаються елементарні дільники λ-матриціА–λВ. Ці дільники знаходяться за відомим алгоритмом визначення елементарних дільників λ-матриць.

Позначимо Dn(λ) = det (А– λВ), Dk(λ) – найбільший спільний дільник усіх мінорів k-го порядку матриці А–λВ. Тоді многочлени

$$i_s(\lambda) = \frac{D_{n-s+1}(\lambda,\omega)}{D_{n-s}(\lambda,\omega)}, s = \overline{1,n},$$

(тут покладемо D0(λ)=1) називаються інваріантними многочленами цієї в'язки. Незвідні множники ек(λ),к = 1, 2,.... на які розкладаються інваріантні многочлени над полем комплексних чисел, будуть скінченними елементарними дільниками.

Крім цього, на нашу думку, для подальшого викладу матеріалу необхідно буде пригадати і що таке обернена матриця та ввести поняття узагальненої оберненої матриці. Як відомо, для будь-якої неособливої квадратної матриці А існує єдина обернена матриця А–1 що задовольняє співвідношення АА–1 = А–1А=Е, де Е – одинична матриця. Якщо матриця А прямокутна або особлива, то оберненої матриці в такому розумінні для неї не існує. Проте прагнення якимось чином «обернути» і таку матрицю А привело до побудови різних узагальнених обернених матриць.

Означення 3. Узагальненою оберненою матрицею для довільної матриці А називатимемо матрицю X, яка задовольняє матричне рівняння

АХА = А (3)

Проте, для подальшого розуміння асимптотичних розв’язків диференціальних рівнянь з виродженими матрицями нам потрібно звернути увагу і на системи лінійних алгебраїчних рівнянь та їх розв’язки. Отже, розглянемо неоднорідну систему лінійних рівнянь вигляду

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i(i = \overline{1,n}).$$

Використавши векторно-матричні позначення, її можна записати у такій формі:

Ах = b, (4)

де $A = (a_{ij})_n^n$; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Якщо матриця А неособлива, то система рівнянь (4) сумісна і має єдиний розв'язок х = А–1 b.Якщо det А = 0, то ця система не завжди сумісна, а якщо й сумісна, то має нескінченну множину розв'язків.

Одним із критеріїв сумісності системи рівнянь (4) є, до речі відома теорема Кронекера — Капеллі:

ТЕОРЕМА 1. Для того щоб система (4) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці А дорівнював рангу розширеної матриці цієї системи, збудованої приєднанням до матриці А вектора-стовпця b.

Надалі використовуватимемо критерій сумісності системи рівнянь (4), суть якого полягає ось у чому.

Поряд із системою (4) розглянемо однорідну систему рівнянь

$$A^{\otimes}y = 0, \quad (5)$$

в якій $A^{\otimes}$ – матриця, спряжена з матрицею А. Система (5) називається союзною з системою рівнянь (4)

Надалі для подальшого розуміння теми дослідження нам необхідна буде така теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для того щоб система рівнянь (4) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб вектор b був ортогональним до всіх векторів, які дають розв'язок союзної системи (5), тобто щоб скалярний добуток вектора b на довільний розв'язок у = (у1,...,уn) системи (5) дорівнював нулю:

$$(b, y) = \sum_{i=1}^{n} b_i \overline{y_i} = 0. \quad (6)$$

Крім цього, подальший логічний виклад матеріалу, як бачимо, вимагає від нас пригадати деякі відомості з лінійної алгебри. (означення)

Означення 4. Множина R елементів x,y,z,... називається векторами або лінійним простором, якщо для довільних двох його елементів x,y визначена сума $x + y \in R$ і для кожного α, що належить певному числовому полю K, знайдеться добуток $\alpha x \in R$, причому виконуються такі умови:

1. x + y = y + x ;
2. (x + y) + z=x + (y + z);
3. $\exists 0 \in R, x + 0 = x$;
4. $\forall x \in R, \exists - x \in R, x + (-x) = 0$;
5. $1 \cdot x = x$;
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta \in K$;
7. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha x + \beta x$;
8. α(x + y) = αx + αy.

Елементи векторного простору називаються векторами. Поле K надалі будемо вважатимемо полем комплексних чисел.

Характерно, що при подальшому розгляді теми виникає питання жарданових ланцюжків векторів.

Отже, розглянемо регулярну в'язку матриць A–λB, де A та B – квадратні матриці n-го порядку.

При цьому, пригадаємо деякі відомі нам теоретичні факти.

Означення 5. Число λ0 називається власним значенням в'язки матриць

A–λB, або власним значенням матриці A відносно матриці B, якщо воно є коренем рівняння

det(A–λB).

Означення 6. Ненульовий вектор β, який задовольняє рівність (A – λ0)β = 0, називається власним вектором в'язки матриць A – XB, що відповідає його власному значенню λ0, або власним вектором матриці A відносно матриці B.

Означення 7. Говорять, що вектори β1,...,βт утворюють B-жорданів ланцюжок векторів матриці A завдовжки т, (або жорданів ланцюжок векторів матриці A відносно матриці B завдовжки т), якщо виконуються співвідношення

(A – λ0B)β1 = 0,

(A – λ0B)β2 = Bβ1,

(A – λ0B)β3 = Bβ2,

....

(A – λ0B)βμ = Bβμ–1,

а рівняння

(A – λ0B)ξ = Bβμ

не має розв'язку.

У цьому ланцюжку βı, – власний вектор матриці A відносно матриці B (що відповідає власному значенню λ0), а вектори β2,...βμ називаються B-приєднаними векторами матриці A.

Таким чином, ми поступово у викладі матеріалу підійшли безпосередньо до асимптотичних розв'язків систем диференціальних рівнянь з виродженими матрицями.

Розглянемо рівняння вигляду:

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \alpha(\tau)d\tau), \qquad (7)$$

в якій x(t,ε) – шуканий n – вимірний вектор, $t \in [0;\varepsilon_0];\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ – малий параметр, $h \in N$; α(t) – скалярна функція; A(t,ε),B(t,ε) – $(n \times n)$– матриці, f(t,ε) – n – вимірний вектор елементами яких є дійсні або комплексні функції.

Нехай виконуються такі умови:

1) Матриці A(t,ε),B(t,ε) і вектор f(t,ε) допускають на відрізку [0; T] рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε, тобто

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{k\ge 0}\varepsilon^k A_k(t); B(t,\varepsilon) = \sum_{k\ge 0}\varepsilon^k B_k(t); f(t,\varepsilon) = \sum_{k\ge 0}\varepsilon^k f_k(t) \qquad (8)$$

2) Коефіцієнти A(t,ε), B(t,ε), f(t,ε) розвинень (8), а також функція α(t) нескінченно диференційовані на відрізку [0; T];

3) det B0 (t) = 0, $\forall t \in [0;T]$.

За цих умов дослідимо можливість побудови загального асимптотичного розв'язку системи рівнянь (7) у вигляді розвинень за степенями малого параметра. Виродженість граничної матриці B0 (t) при похідній зумовлює значні труднощі в розв'язанні цієї задачі. Залежно від структури збурювальних матриць Bi(t), i ≥ 1, можливі два випадки:

1) незважаючи на виродженість граничної матриці B0(t) матриця B(t,ε) все ж залишається неособливою при досить малих ε > 0;

2) detB(t,ε) = 0 для всіх $t \in [0;T]$ та $\varepsilon \in [0;\varepsilon_0]$.

У першому випадку існує обернена матриця B–1(t,ε), і отже, система рівнянь (7) у принципі може бути зведена до нормальної форми.

При цьому зростає ступінь сингулярності системи, оскільки матриця

B–1(t,ε) має особливість при ε = 0 (полюс деякого порядку к, значення якого залежить від структури матриць B(t),i ≥ 1). Однак побудова асимптотичного розвинення матриці B–1(t,ε) при виродженості матриці B0(t) є досить складною задачею. Додаткові труднощі виникають також у зв'язку з тим, що навіть у разі скінченності розвинення (8) для матриці B(t,ε) розвинення матриці B–1(t,ε) буде нескінченним. Що ж стосується другого випадку, то зведення системи (7) до нормальної форми стає взагалі неможливим.

Тому досліджуватимемо безпосередньо систему (7), не виділяючи окремо обидва зазначені випадки. Завдяки лінійності цієї системи її загальний розв'язок має вигляд суми загального розв'язку відповідної однорідної системи рівнянь

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x \tag{9}$$

і частинного розв'язку неоднорідної системи. Тому окремо дослідимо можливість побудови загального розв'язку системи (9) та частинного розв'язку системи (7).

Можливість побудови асимптотичних розв'язків систем рівнянь (7), (9) залежить від поведінки коренів рівняння

$$\det(A_0(t) - \lambda B_0(t)) = 0, \tag{10}$$

яке називатимемо характеристичним, і структури скінченних та нескінченних елементарних дільників в'язки матриць

$$\Psi(t,\lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t), \tag{11}$$

а також мінімальних індексів, якщо ця в'язка сингулярна.

Якщо ж, надалі будемо розглядати випадок регулярної в'язки матриць (11) і вважається, що для всіх $t \in [0;T]$ зберігається кронекерова структура в'язки, тобто кратності всіх власних її значень [коренів рівняння (10)] та відповідних скінченних і нескінченних елементарних дільників є сталими на заданому відрізку.

До речі, нагадаємо, що під час побудови розв'язку неоднорідної системи рівнянь (7), потрібно розрізняти два суттєво відмінні випадки: "нерезонансний", коли функція α(t) не збігається з жодним коренем рівняння (10), і "резонансний", коли вона тотожно дорівнює одному з них.

Таким чином, як видно зі змісту даної статті, у певному логічному викладі ми розглянули і проілюстрували основні положення теорії матриць та систем диференціальних рівнянь із виродженням у випадку сингулярності та регулярності пучка матриць.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Еругин Н. IX, Штокало И.З. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – К: Вища шк., 1974. – 472 с.
2. Завізіон Г.В. Асимптотичні. розв'язки системи інтегро-диференціальних рівнянь з виродженнями. // УМЖ т.51, №2, 1999. – С.170-180.
3. Кведарас Б. О освойствах решений вырожденного дифференциального уравнения // Литовский мат. сб. – 1977. – Т.17, №1. – С. 115-125.
4. Самійленко А.М., Шкіль М. І., Яковепь В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К. Вища шк. 2000. – 294 с.
5. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К.: Вища шк. 1971.– 226 с.
6. Шкиль М. И. Вороной А. Н., Лейфура В. Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальнхх уравнений. – К: Вища шк. Главное изд-во, 1985. –248 с.

Олена МАЗУРИК

СТВОРЕННЯ КОЛЕКЦІЇ СУЧАСНОГО ЖІНОЧОГО ОДЯГУ НА ОСНОВІ УКРАЇНСЬКОГО КОСТЮМУ

(студентка V курсу фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат техн. наук, доцент О.В. Єжова

Український народний одяг – яскраве й самобутнє культурне явище, що розвивалося й удосконалювалося протягом століть. Історія українського народного костюма сягає часів Трипільської культури і тісно пов'язана з культурним розвитком Київської Русі. Характерною рисою традиційного українського вбрання є його декоративна мальовничість, яка відображає розвиток ремесел, високу культуру виробництва матеріалів для одягу, мистецтво виготовлення та оздоблення одягу. Кожен його елемент увібрав у себе частку життя українців, їх світогляд, відчуття навколишнього середовища.

На відміну від традиційного, сучасний український одяг практично не пов’язаний з нашою історією. Лише окремі його види (кептари, кожухи тощо) та окремі елементи оздоблення частково збереглися, але й вони повільно відступають в історію, залишаючи місце одягу, привезеному з-за кордону. Фактично зараз український традиційний одяг можна зустріти хіба що в музеї або під час театральної вистави. Втрачається набута віками техніка виготовлення і обробки тканин, шкіри, пошиття одягу та взуття. Західна мода, фабричне виробництво знищили традиції, змінили наш світогляд. Ми вдягаємо синтетичний одяг, здатний негативно впливати на наше здоров’я, застосовуємо штучні фарбники неприродних відтінків, забуваючи про те, що не так давно наші діди-прадіди вдягалися в одяг виключно природного походження, який за зовнішнім виглядом був більш колоритний та вишуканий, ніж сучасний. А головне – відображав нашу сутність, як українців, як окрему незалежну націю. Прикро констатувати той факт, що більшість народів світу, особливо Європи, практично не використовують у повсякденному житті національний одяг, віддаючи йому перевагу лише в особливих випадках. Я вважаю, що подібний підхід в одязі завдає шкоди культурі нації, змінює її стереотипи, руйнує самобутність.

Витіснення традиційного одягу в розряд архаїчного негативно вплинуло на збереження українських традицій та вдосконалення традиційних технік. Втім прослідковується також тенденція до «українізації» сучасного одягу. Так у продажу з'явились чоловічі та жіночі сорочки фабричного виробництва, сучасного крою, але оздоблені елементами українського орнаменту, західноукраїнські кептари тощо. Та це лише поодинокі випадки.

Також приємно відмітити створення інтернет-магазинів, присвячених суто українському костюму, в асортименті яких представлений як одяг сучасного крою з національним українським орнаментом (джинси, блузи тощо), так і традиційного крою (кептари, безрукавки, сорочки).

Наш час – час відродження українських традицій. Створення сучасного українського одягу на основі історичного традиційного надбання нашого народу – проблема актуальна, і є однією з передумов відродження нашого неповторного, самобутнього, величного минулого.

Тому я обрала тему своєї роботи – "Створення колекції сучасного жіночого одягу на основі українського костюму". Але враховуючи динаміку розвитку традиційного українського одягу в різних регіонах, у своїх дослідженнях я зосередила увагу на традиційному одязі Наддніпрянщини XIX – поч. XX століття.

Виконуючи дану роботу, я ставила собі за мету розробити колекцію сучасного жіночого одягу на основі українського костюму XIX – поч. XX століття Середньої Наддніпрянщини.

Завдання роботи:

виконати аналіз компонентів українського костюму різних регіонів країни XIX – поч. XX століття;

більш детально дослідити традиційне вбрання Середньої Наддніпрянщини;

створити ескізний ряд сучасного жіночого одягу на основі традиційного українського костюму Середньої Наддніпрянщини;

розробити технічний та конструкторський проект створеної колекції.

Як відомо, Середня Наддніпрянщина була тереном формування української народності та нації, що відбилося й на розвиткові народного костюма цього регіону: в основному він базувався на єдності рис, властивих культурі українського етносу в цілому. Разом із тим у межах регіону спостерігається різноманітність місцевих варіантів, що дає змогу виділити самостійні комплекси, притаманні конкретним районам Середньої Наддніпрянщини. Найяскравіше це простежується на прикладі жіночого одягу.

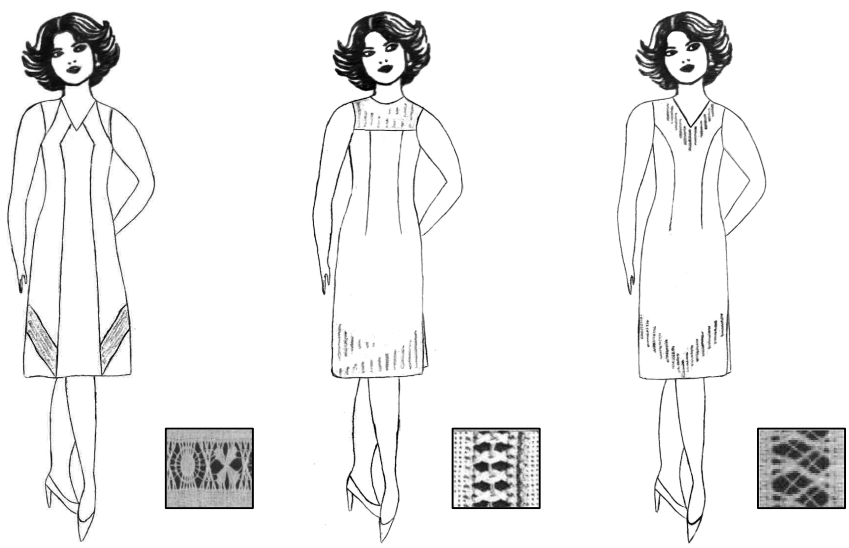


Рис. 1. Зразки моделей ескізного ряду сучасного жіночого одягу, створеного на основі традиційного українського костюму Середньої Наддніпрянщини

Жіночий стрій Середньої Наддніпрянщини складався із сорочки, плахти, запаски, корсетки, юпки, свити, кожуха, кожушанки, намітки, хустки, чобіт, прикрас. Найхарактерніші етнографічні риси у жіночому вбранні Наддніпрянщини виявляються у способах ношення й оздоблення складових частин. Сорочку найчастіше вишивали білими нитками. Орнамент зосереджували на рукаві, поликах, лиштві сорочки. На місці з'єднання рукавів з уставками рукав збирали в складочки-пухлики. Крім білих ниток, застосовували червоні й чорні, інколи вкраплювали сині або зелені кольори.

Тільки в Наддніпрянщині жінки носили поясне вбрання – плахту. Звідси вона поширилася на Слобожанщину і Причорномор'я, куди у XVIII ст. були виселені Катериною II цілі села. Плахти виготовляли багатоколірні, клітчасті, найчастіше в червоно-вишневій гамі (Полтавщина, Київщина), з украпленням синього і зеленого кольорів (Переяслав-Хмельницький район, південні райони Чернігівщини). Ще однією відмінністю даного етнографічного регіону були баєві спідниці, прикрашені вовняними китицями («перчиками»), або спідниці з фабричної тканини, оздоблені внизуількома рядами кольорових стрічок (центральні райони Київщини), строкаті широкі спідниці з фабричної тканини (південні райони Київщини), спідниці-андараки, червоні домоткані, оздоблені внизу великими геометризованими мотивами (Чернігівщина). Спідницю носили із вовняними, орнаментованими поперечними смугами запаскою або фартухом. Костюм доповнювала яскрава ткана або вишита крайка. Особливої емоційної виразності надавала строю корсетка. Вона виступала кольоровим акцентом або тонально поєднувалась з усіма іншими складовими частинами строю.

Верхній одяг з саморобного сукна – юпка – також характерний тільки для Наддніпрянщини. Баєві зелені, сині, червоні юпки оздоблювалися по всій площині червоними, синіми пасмами вовни – «перчиками». Зимою носили кожух однаковий за кроєм як чоловічий, так і жіночий (часто в хаті був всього один кожух). Стрій завершувався головним убором – очіпком, наміткою, хусткою. Характерну особливість вбрання Наддніпрянщини становить носіння одночасно парчової запаски і парчового очіпка, що надає цілісності костюму, або вишитої запаски і вишитого очіпка. Характерною ознакою є покривання нижньої частини сорочки запаскою. Низ сорочки з вишивкою завжди залишався відкритим і вдало поєднувався з іншими білими площинами строю.

У Наддніпрянщині жіночий стрій відзначався багатством шийних прикрас: коралі, дукачі, гранати, бурштини, перстені, ковтки – це далеко не повний перелік оздоб, які побутували аж до початку XX ст.

Для оздоблення створеної колекції (рис. 1) я використала елементи українського одягу Наддніпрянщини – прозоро-рахункові техніки вишивання: «вирізування», що утворюють чіткі ажурні квадрати на полотні; «виколювання», що складають сіточку з дірочок; ажурні мережки. Кольорове рішення одягу також типове для даного регіону України, відповідає м'яким, пастельним тонам Полтавщини. Зокрема – вишивка «білим по білому» або вишивання «біллю». Вона дозволяє створити малюнок високого рельєфу з світлотіньовим моделюванням. Залежно від напрямку світла узор по-різному то відбиває, то поглинає світло, створюючи багату гру. Також в колекцію увійшли сукні світло-сірого та кремового кольору, вишиті золотистою ниткою.

Для пошиття даного ескізного ряду сучасних жіночих суконь я рекомендую використовувати тканини полотняного переплетення. Базова модель виконана із застосуванням льняної тканини із золотистим напиленням.

Дана робота стане в нагоді всім, хто цікавиться українським етносом та досліджує його. Також роботу можуть використати у своїх розробках модельєри та дизайнери сучасного українського костюму, студенти та аспіранти спеціальності «Трудове навчання».

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Васіна З.О. Український літопис вбрання: [Книга-альбом]. – К.: Мистецтво, 2006. – 448 с.
2. Ніколаєва Т. О. Історія українського костюма. Іл. З. Васіної, Л. Міненко, Т. Ніколаєвої, О. Слінчак, М. Старовойт.– К.: Либідь, 1996.– 176 с; іл.
3. Українське народознавство: Навч. посібник / За ред. С. П. Павлюка, Г. Й. Горинь, Р. Ф. Кирчіва.– Львів: Фенікс, 1994.– 608с.
4. http://ridnamoda.com.ua

Аліна МИКОЛЕНКО

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ЗАСОБАМИ EXCEL

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук Ю. В. Гуртовий

Математичне моделювання в останні десятиліття оформилось в окрему галузь знань з притаманними їй об'єктами, підходами та методами досліджень [1]. Чим складніший об'єкт дослідження, тим більше значення приділяється математичній моделі явища, яке досліджується. З'являється ціла ієрархія математичних моделей, кожна з яких описує явище все глибше, ширше, досконаліше.

Економіко-математичне моделювання являє собою наочний приклад ефективного застосування математичних ідей на практиці. Процес математичного моделювання можна розділити на шість основних етапів:

І етап: вивчення об'єкту моделювання і формування завдання на розробку моделі (змістовна постановка задачі).

ІІ етап: формулювання законів, що зв'язують основні об'єкти моделі, тобто запис у вигляді математичних формул якісних уявлень про зв'язки між об'єктами моделі(концептуальна і математична постановка).

ІІІ етап: якісний аналіз і перевірка коректності моделі.

IV етап: вибір методу розв'язання і саме розв'язання задачі.

V етап: коректування прийнятої гіпотетичної моделі згідно критерію практики, тобто з'ясування питання про те, чи узгоджуються результати спостережень з теоретичними дослідженнями моделі в межах точності спостережень (перевірка адекватності).

VI етап: практичне використання і подальший аналіз моделі у зв'язку з накопиченням даних про вивчені явища і модернізація моделі.

Особливий інтерес для економічних дисциплін викликає розв'язування різного типу оптимізаційних задач. Завдання на відшукання найбільших і найменших величин являються актуальними впродовж всієї історії розвитку людства. Великого значення вони набувають в даний час, коли зростає важливість в найбільш ефективному використані природних багатств, людських ресурсів, матеріальних і фінансових засобів.

Теорія екстремальних завдань почала створюватися на початку розвитку математичної думки і активно розвивається в наш час, включаючи в свою орбіту найбільших математиків таких як Ферма, Ньютон, Лейбніц, Бернуллі, Лагранж, Ейлер, Пуанкаре, фон Нейман, Канторович, Понтрягин і інших [2,3]. У наш час неможливо уявити собі повноцінну математичну освіту без елементів теорії екстремуму [4].

Потужним і водночас доступним інструментом який дозволяє розв'язувати оптимізаційні задачі є такий програмний засіб Excel. Для створення ефективної моделі лінійного програмування в Excel процес представлення моделей краще розбити на три етапи.

1. Написання і перевірка математичної моделі (модель записується на папері в математичному вигляді).

2. Створення і відладка табличної моделі (на основі математичної моделі створюється її образ в Excel, потім проводиться перевірка отриманої табличної моделі шляхом завдання різних значень змінних рішення з метою виявити можливі очевидні помилки).

3. Спроба оптимізації моделі за допомогою надбудови «Пошук рішення» (якщо модель некоректно сформована, результатом найчастіше буде повідомлення про помилку, тоді потрібно виправити модель, можливо, повернувшись до першого етапу).

Саму оптимізацію найчастіше проводять за допомогою надбудови «Пошук рішення». Даний засіб дозволяє оптимізувати лінійні і деякі нелінійні моделі. В лінійній моделі, що оптимізується, всі формули, які безпосередньо містять змінні рішення і прямо або опосередковано впливають на комірку цільової функції повинні бути лінійними. При застосуванні «Пошук рішення» слід застосувати наступний алоритм:

Побудуємо табличну модель.

Після відлагодження моделі переходимо до етапу оптимізації, вибравши команду «Пошук рішення» в меню Сервіс.

У діалоговому вікні, що відкрилося, «Пошук рішення» вказуємо дані, необхідні для процесу оптимізації.

Після задання необхідних даних натискаємо на кнопці «Виконати».

«Пошук рішення» виконує процес оптимізації (для простих моделей сучасний комп'ютер витрачає всього декілька секунд, але для громіздких моделей процес може тривати декілька хвилин і довше).

Якщо в табличній моделі немає помилок, «Пошук рішення» виведе на екран діалогове вікно.

Після цього можна продовжити виконання аналізу, щоб провести аналіз чутливості оптимального рішення.

Опираючись на досвід роботи з надбудовою «Пошук рішення сформулюємо прості, але важливі рекомендації по створенню табличної моделі в Excel:

- кожна змінна рішення розташовується в окремій комірці, комірки групуються по рядках або стовпцях, кожному обмеженню відводиться окремий рядок або стовпець таблиці;
- змінні рішення, групуються в окремий блок стовпців/рядків, аналогічно обмеження групуються в свій блок рядків/стовпців;
- всі комірки, що містять змінні рішення і цільову функцію, мають заголовки у верхній частині свого стовпця, а всі обмеження мають заголовки у крайній зліва комірці свого рядка;
- коефіцієнти цільової функції зберігаються в окремому рядку, розташовуючись безпосередньо під або над відповідними змінними рішення, формула для обчислення цільової функції знаходиться в сусідній комірці;
- щоб модель була зрозуміліша, комірки із змінними рішення і цільовою функцією виділяються рамкою по межі комірок;
- коефіцієнт перед певною змінною рішення в якому-небудь обмеженні записується в комірку на перетині стовпця (рядка), що містить дану змінну рішення, і рядка (стовпця), що містить це обмеження;
- комірки, що містять праві частини обмежень, повинні включати константи або формули, в яких не входять змінні рішення, – всі формули в правій частині, прямо або опосередковано пов'язані із змінними рішення, повинні бути перенесені в ліву частину за допомогою алгебраїчних перетворень даної нерівності.

Для прикладу сформулюємо наступну задачу: інвестор має P доларів, які може вкласти у n видів цінних паперів, і він визначає скільки грошей вкладати у кожен вид паперів. Обраний набір цінних паперів називається інвестиційним портфелем. Ціль : портфель повинен бути з високим очікуваним прибутком і мінімальним ризиком.

Дана модель є моделлю квадратичного програмування. Позначимо через xi частину коштів, вкладену в цінні папери i. Наприклад, якщо в моделі необхідно вкласти P доларів в два види цінних паперів і оптимальним вирішенням виявилося x1= 0,7, x2 = 0,3, то в цінні папери 1 буде вкладена сума 0,7P доларів, а сума яка залишилася 0,3P доларів буде вкладена в цінні папери 2. При формулюванні завдання використовуємо наступні позначення: σі2 - дисперсія річного прибутку від цінних паперів і (і= 1, 2), Ri — очікуваний річний прибуток від цінних паперів і (і = 1,2), b — нижня межа очікуваного річного прибутку від всіх інвестицій, Si — верхня межа інвестицій в цінні папери і (і= 1,2).

Концептуальна постановка задачі має вигляд:

- - очікуваний прибуток інвестиційного портфеля визначається як x1R1 + x2R2;
- - дисперсія прибутку портфеля інвестицій — це σ12 x12+ 2 σ12x1x2 + σ22 x22;
- - стандартне відхилення прибутку портфеля інвестицій обчислюється як квадратний корінь дисперсії.

Виходячи з даної концепції математичної моделі інвестиційного портфеля можна записати таким чином: мінімізувати σ12 x12+ 2 σ12x1x2 + σ22 x22 (дисперсія прибутку) при обмеженнях x1+x2=1 (необхідно вкласти всі гроші); x1 R1+ x2R2 > b (нижня межа очікуваного прибутку інвестиційного портфеля); x1≤ S1 (верхня межа інвестицій в цінні папери 1); x2 < S2 (верхня межа інвестицій в цінні папери 2); x1x2 > 0 (інвестиції повинні бути позитивними).

Надамо вхідним параметрам задачі значення:

σ12= 0,09 R1 = 0,06 S1 = 0,75b = 0,03

σ22= 0,06 R2 = 0,02 S2 = 0,9 σ12= 0,02

Враховуючи вище вказані дані наведемо геометричну інтерпретацію (рис. 1). Для зручності цільова функція і обмеження очікуваного прибутку були помножені на 100. Із-за наявності обмеження у формі рівності (x1 + x2 = 1) допустима множина є відрізок, який з'єднує точки (0,25;0,75) і (0,75;0,25). Ізолінії цільової функції являють собою еліпси з центром у початку координат, мала піввісь яких розміщена на прямій, яка складає кут 26,55° з віссю x1. На рис. 1 показані ізолінії цільової функції для значень 2 і 4,54.

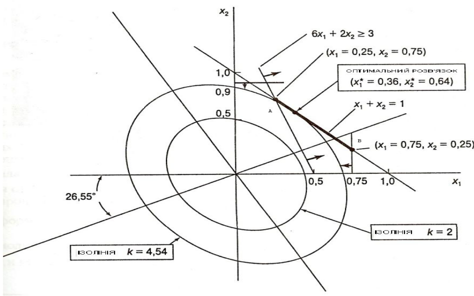


Рис. 1. Оптимальний розв'язок задачі вибору інвестиційного портфеля.

При збільшенні значення цільової функції форма еліпса залишається такою ж, але розміри збільшуються. Завдання полягає в тому, щоб вибрати найменше значення цільової функції, при якому відрізок АВ дотикається до еліпса. Як показано на рис. 1 відрізок дотикається до еліпса при значенні цільової функції 4,54 допустимої множини в точці (x1 = 0,36, x2 = 0,64), яка є оптимальним розв'язком.

Реальні моделі мінімізуються комп'ютером, а не графічно. Проте геометричне представлення дозволяє краще розібратися в моделі і допомагає при інтерпретації властивостей розв'язку.

На рис. 2. наведено робочий лист вище вказаної задачі. Виконуючи завдання «Пошук рішень» видає значення шуканого прибутку, яке становить 3,454 %. Порівнюючи оптимальне значення x1 і x2, можна зазначити, що оптимальний портфель містить більше цінних паперів з більш низьким очікуваним річним прибутком (тобто цінних паперів 2). Причина полягає у тому, що дисперсія річного прибутку для цінних паперів 2 нижче, чим для цінних паперів 1.

Подано основні відомості про математичне моделювання оптимізаційної задачі. Вказано чіткі рекомендації для швидкої і ефективної побудови оптимізаційних моделей. Висвітлено методику розв'язування математичного моделювання оптимізаційних задач у середовищі Excel.

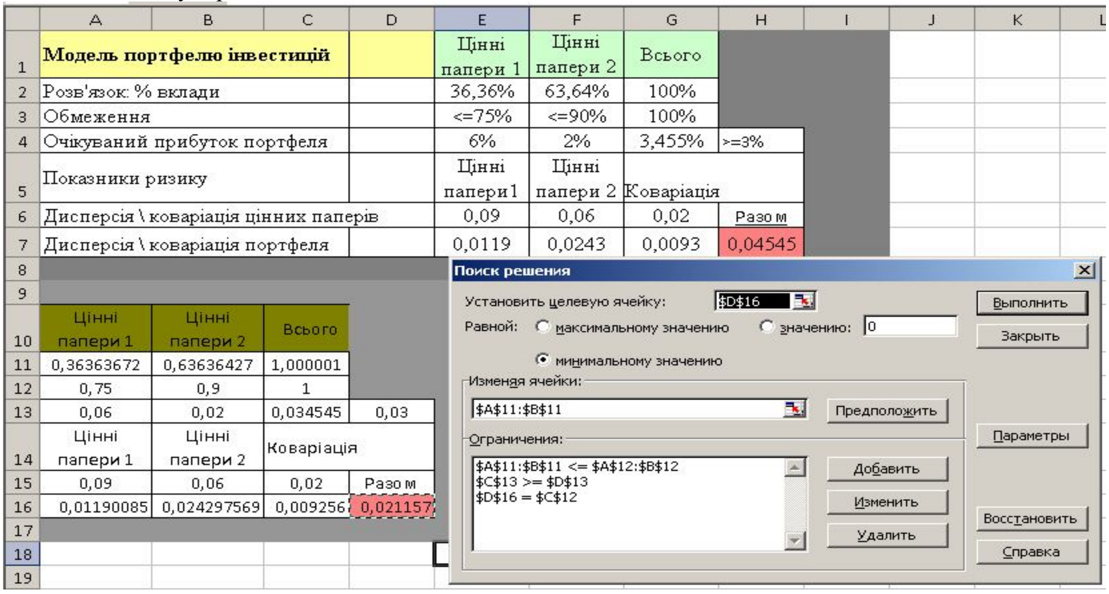


Рис. 2. Розв'язання задачі інвестиційного портфеля програмним засобом EXCEL.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Введение в математическое моделирование/Под.ред. П. В. Трусова.- М.: Логос, 2004.- 440 с.
2. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1984. – 285 с.
3. История математики /Под. ред. А. П. Юшкевича в 3-х томах.- М.: Наука, 1970-1972.
4. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Оптимизация. Теория, примеры, задачи. М.: элиториал УРСС, 2000.- 320 с.

Анастасія СІРИК

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ ЗАСОБАМИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент Л.В. Ізюмченко

У галузі планово-економічних розрахунків широко застосовується теорія лінійних нерівностей. В економічних, виробничих процесах різних галузей народного господарства виникають задачі, подібні за постановкою, що мають ряд спільних ознак та розв'язуються подібними методами, здебільшого це планово-економічні задачі – екстремальні задачі на знаходження найбільш вигідного варіанту. Для розв'язання таких задач використовують лінійне програмування. Сутність задачі економічного вибору та пов'язану з цим необхідність використання моделей та методів лінійного програмування можна проілюструвати на прикладі.

Приклад 1. На підприємстві виготовляються та реалізуються мікрохвильові печі та домашні хлібопекарні. Нехай збут цієї продукції необмежений, але обмежені обсяги ресурсів, наприклад, праця та основні матеріали. Наше завдання полягає в тому, щоб визначити такий план виробництва продукції на місяць, за якого прибуток від реалізації був би найбільшим.

У таблиці наведені норми використання ресурсів та їх загальний запас, а також ціни одиниці кожного виду продукції.

Вид продукції	Норми витрат на одиницю продукції			Ціна одиниці продукції, ум. од.
	роб.часу, люд.-год.	листового заліза, м^2	скла, м^2	
Домашня хлібопекарня	8,5	4	—	380
Мікрохвильові печі	3	7	3	250
Загальний запас ресурсу на місяць	480	320	45	—

Розглянемо кілька можливих варіантів виробничої програми.

Перша виробнича програма. Найпростішим з усіх можливих варіантів є виробництво одного виду продукції. Припустимо, що виготовляються лише домашні хлібопекарні. Ресурс робочого часу (480 люд.-год.) дає змогу виготовляти 480:8,5=56 домашніх хлібопекарень. Наявна кількість листового заліза забезпечує виготовлення 320:4=80 домашніх хлібопекарень. Скло для виготовлення даного виду продукції не використовується. Отже, кожного місяця можна випускати лише 56 домашніх хлібопекарень, що дасть прибуток обсягом 56·380=21 280 ум. од. Зазначимо, що у разі реалізації такої виробничої програми загальний запас листового заліза використовується не повністю, а скло не використовується взагалі.

Друга виробнича програма. Визначимо кількість мікрохвильових печей, які можна виготовити за даних обсягів ресурсів:

Робочий час: 480:3=160

Листове залізо: 320:7=45 $\Rightarrow$ 15 мікрохвильових печей,

Скло: 45:3=15

при цьому буде використано таку кількість ресурсів:

	буде використано	залишок
робочий час:	15·3 = 45 (люд.-год.)	480–45 = 435 (люд.-год.)
листове залізо:	15·7 = 105 (м2)	240–105 = 135 (м2)
скло:	15·3 = 45 (м2)	немає

Залишки першого та другого ресурсів забезпечать виробництво домашніх хлібопекарень обсягом:

Робочий час: 435 : 8,5=51

Листове залізо: 135 : 3=45 $\Rightarrow$ 45 домашніх хлібопекарень

Отже, друга виробнича програма уможливлює виробництво 15 мікрохвильових печей та 45 домашніх хлібопекарень. Прибуток становитиме:

15·250+45·380=20 850 ум. од.

Порівнюючи першу та другу виробничі програми, бачимо, що за першою прибуток є більшим, отже, вона краща, ніж друга. Зрозуміло, що розглянуті програми не вичерпують усіх можливих варіантів. Розв'язання екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, відшукання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування [4, с. 9].

Загальна лінійна математична модель економічних процесів і явищ — так звана загальна задача лінійного програмування (ЛП) подається у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow$ max (min) (1)

за умов
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$. (3)

Детальніше про задачу лінійного програмування та її форми запису можна зустріти в [1, с. 19-21]. Одним із методів для визначення оптимального плану задачі лінійного програмування є графічний метод, який є важливим для осмислення сутності оптимізації, геометричної інтерпретації постановки та розв'язку задач лінійного програмування. Графічний метод доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними. Універсальним методом розв'язування задач лінійного програмування є так званий симплекс-метод [2, с. 40-41]. Процес розв'язування задачі симплекс-методом має ітераційний характер: обчислювальні процедури (ітерації) одного й того самого типу повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує. Детальніше симплекс-метод та його модифікації можна зустріти в літературі [4, с. 64-101].

Наведемо приклад економічної задачі та її розв'язання.

Приклад 2. Для виробництва трьох видів продукції A, B, C використовують 2 види ресурсів, запаси яких дорівнюють відповідно 40 і 60 умовних одиниць. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції наведено у таблиці:

	Продукти		
Ресурси	A	B	C
I	3	4	2
II	1	2	4

Ціна одиниці продукції виду А – 10 грн., виду В – 9 грн., виду С – 13 грн. Знайти оптимальний план виробництва продукції.

Розв'язання: Нехай x1, x2, x3 — кількість продукції відповідно виду A, B, C. Цільова функція — виручка від реалізації продукції.

Тоді загальна задача лінійного програмування має вигляд

$$\max\left\{Z = 10x_1 + 9x_2 + 13x_3 \left| \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 40; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 60; \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{array} \right.\right\} \quad (4)$$

Для того, щоб розв'язати дану задачу графічним методом, сформулюємо до неї двоїсту задачу лінійного програмування. Вона має вигляд:

$$Z^* = 40x_1^* + 60x_2^* \to \min;\ 3x_1^* + x_2^* \ge 10;\ 4x_1^* + 2x_2^* \ge 9;\ 2x_1^* + 4x_2^* \ge 13;\ x_1^*, x_2^* \ge 0.$$

Побудуємо многокутник розв'язків (рис.1). З рисунка 1 видно, що многокутником розв'язків є необмежена множина Ω.

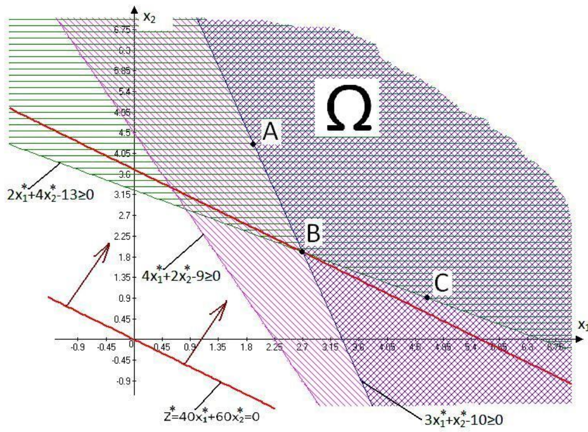


Рис.1.

Координати точок цієї області задовольняють умові невід'ємності і нерівностям системи обмежень задачі. Для розв'язку задачі необхідно визначити, в яких точках цільова функція $Z^* = 40x_1^* + 60x_2^*$ набуває свого мінімального значення. Для цього будемо переміщувати пряму $40x_1^* + 60x_2^* = 0$ паралельно самій собі доти, доки не з'явиться перша спільна точка прямої і області Ω. Бачимо з рисунка 1, що перша спільна точка з прямою є т. В, яка є точкою перетину прямих $3x_1^* + x_2^* = 10$ та $2x_1^* + 4x_2^* = 13$, тому її координати можна визначити, розв'язавши таку систему:

$$\begin{cases} 3x_1^* + x_2^* = 10, \\ 2x_1^* + 4x_2^* = 13. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = 2{,}7 \\ x_2^* = 1{,}9 \end{cases}$$

. Таким чином, мінімальне значення функції $Z_{\min}^* = 222$.

Розглянемо розв'язання прикладу 2, застосувавши симплекс-метод (модифіковані жорданові виключення).

Загальна задача лінійного програмування записується у вигляді (4).

Введемо позначення: $y_1 = 40 - (3x_1 + 4x_2 + 2x_2)$, $y_2 = 60 - (x_1 + 2x_2 + 4x_3)$.

Економічний зміст додаткових невідомих y1, y2 – залишки відповідно I та II виду ресурсів. Побудуємо таблицю:

		Вільні змінні				
		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	bi	θ
Базисні змінні	y_1	3	4	2	40	40/2=20
	y_2	1	2	4	60	60/4=15
	Z	-10	-9	-13	0	

I етап: всі bi≥0 маємо: точка x1=x2=x3=0, y1=40, y2=60.

З економічного погляду: при початковому базисному плані жоден вид продукції не виробляється (всі xi=0) і виручки підприємство не отримує (Z(x)=0). Зрозуміло, що така ситуація не є найкращою і підтвердження (з математичного погляду) від'ємні оцінки у Z-рядку таблиці. З економічного погляду від'ємні значення у Z-рядку таблиці не тільки свідчать про можливість збільшення загальної виручки, а й показують, на скільки збільшиться ця сума при введені до плану того чи іншого виду продукції. Від'ємні значення оцінок можна також розглядати як збитки з кожної одиниці продукції, яка не виробляється. Так, коефіцієнт $\Delta_1 = -10$ ($\Delta_2 = -9$, $\Delta_3 = -13$) означає, що при виробництві одиниці продукції виду А (В, С) буде забезпечено збільшення виручки на 10 грн. (9 грн., 13 грн.). Тому з економічного погляду доцільно включити до плану виробництво продукції С: $\Delta_3 = -13 < \Delta_i$, (i=1,2) → III стовпчик головний.

Оцінка θ (відношення стовпця вільних членів до відповідних елементів головного стовпця): 40/2=20, 60/4=15. Ці відношення вказують, яку максимальну кількість цього продукту (продукту С) можна виробляти з урахуванням запасів ресурсів та норм їх витрат. Частка 40/2=20 (60/4=15) показує, скільки можна виробляти продукту С, якщо б він вироблявся тільки з першого (другого) виду ресурсів. Серед цих величин потрібно вибрати найменшу, тому що другого ресурсу вистачить тільки на 15 одиниць продукції С, тобто $\theta_0 = \min\left\{\frac{40}{2};\frac{60}{4}\right\} = 15$ → II рядок головний.

У результаті виробництва 15 одиниць продукту С запас другого ресурсу буде повністю вичерпаний, тому змінна $y_2^{'} = 0$ стає небазисною.

Згідно з алгоритмом симплекс-методу переходимо до нового плану:

		Вільні змінні				
		$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$	bi	θ
Базисні змінні	y_1	5/2	3	-1/2	10	(10·2)/5=4
	x_3	1/4	1/2	1/4	15	15·4=60
	Z	-27/4	-5/2	13/4	195	

Аналогічно до першого етапу переходимо до нового плану. При чому змінна $y_1^{'} = 0$ стає базисною:

		Вільні змінні			
		$-y_1$	$-x_2$	$-y_2$	bi
Базисні змінні	x_1	2/5	6/5	-1/5	4
	x_3	-1/10	1/5	3/10	14
	Z	27/10	28/5	19/10	222

Відсутність від'ємних оцінок Δ_j (j=1,2,3) – компоненти Z рядка, свідчать про оптимальність останнього плану виробництва продукції, який забезпечує максимальну виручку. Тому маємо $x_1 = 4;\ x_2 = 0;\ x_3 = 14.$ $Z = -\frac{27}{10}y_1 - \frac{28}{5}x_2 - \frac{27}{10}y_2 + 222 \to \max$ при $y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = 0$. Звідки $Z_{\max} = 222$.

З економічного погляду: Виробництво продукту А становить 4 одиниці продукту, В – 14 одиниць продукту, а продукт С не виробляється. У результаті такого плану перший та другий ресурси витрачаються повністю. Порівняно з попереднім планом виручка зросла на 27 ум. од. і становить 222 ум. од.

Для того, щоб перевірити правильність розв'язку економічної задачі, можна скористатися засобами Microsoft Excel.

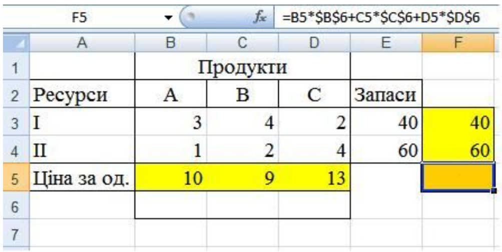


Рис.2.

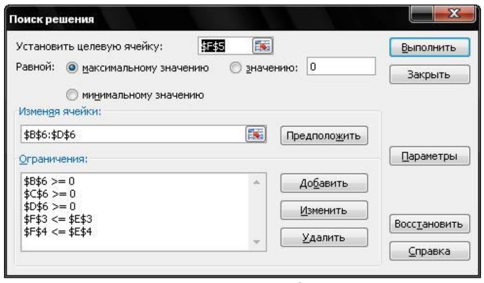


Рис.3.

Для цього створимо таблицю і заповнимо комірки (рис.2).

За допомогою процедури Сервис – Поиск решения в діалоговому вікні заповнимо обмеження (Рис.3).

Натискаємо кнопку Выполнить і отримуємо оптимальний план (Рис. 4).

Рис.4.

Повернемось до прикладу 1: він належить до задач цілочисельного програмування. Тому для поглибленого вивчення методів оптимізації лінійних задач можна скористатися науковими джерелами [3; 4]. Розв'язок цієї задачі проілюструємо, використавши Microsoft Excel, де в діалоговому вікні Поиск решений накладемо додаткові умови: $B$6=целое, $C$6=целое (Рис. 5).

D5 fx =СУММПРОИЗВ(B5:C5;$B$6:$C$6)

	A	B	C	D	E	F
1		Домашня хлібопекарня	Мікрохвильова піч		Загальний запас ресурсу на міс.	
2	робочого часу (люд.-год.)	8,5	3	478,5	480	
3	листового заліза ($м^2$)	4	7	309	320	
4	скла ($м^2$)		3	45	45	
5	Ціна за одиницю	380	250	23130		
6	Оптимальний план	51	15	МАКСИМАЛЬНИЙ ПРИБУТОК		

Рис.5.

Отже, якщо підприємство буде виробляти в місяць 51 домашню хлібопекарню і 15 мікрохвильових печей, то отримає максимальний прибуток 23 130 ум. од.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 248 с.
2. Жалдак М.І. Про лінійне програмування. У світі математики, випуск 2. – К.: Радянська школа, 1970. – С. 40-65.
3. Завало С.Т. та ін. Алгебра і теорія чисел, ч.2. – К.: Вища школа, 1976. – 384с.
4. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2003. — 452 с.

Людмила СОБЧЕНКО

ОСНОВНІ ЕТАПИ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

(магістрантка фізико-математичного факультету)

Науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент В.М. Євладенко

Логіка як наука пройшла в своєму розвитку складний шлях від арістотелівської логіки до сучасних некласичних логік і охоплює часовий проміжок у 25 століть.

Логіка (грецьке logos – слово, думка, розум) – сукупність наук про закони і форми людського мислення, про математико-логічні закони числень (формалізованих мов), про найбільш загальні (діалектичні) закони мислення. Всі ці науки вивчають одне і те ж людське мислення, метою якого є істинне відображення об'єктивної дійсності, але відрізняються вони в залежності від того, які закони мислення складають їх предмет. Так, закони вивідного знання, тобто знання, одержаного із раніше встановлених і перевірених істин, застосовуючи тільки закони і правила мислення, досліджуються у формальній логіці, яка складається із двох наук: *традиційної логіки і математичної логіки.*

В даній роботі висвітлюються основні етапи розвитку цих логік, починаючи з древнього Китаю та Індії (IV ст. до н.е.) і закінчуючи сучасним періодом їх розвитку (XX ст. і до нашого часу).

Традиційна логіка [1] є першої ступінню формальної логіки. Вона вивчає загальнолюдські закони мислення, закони тотожності, протиріччя, виключеного третього, достатньої основи та їх застосування в процесі умовиводів, а також загальнолюдські форми мислення (судження і поняття) і форми зв'язку думок в умовиводі (індукція, традукція, аналогія, дедукція), які відображають об'єктивно існуючі загальні закони і зв'зки предметів і явищ, що існують в реальному світі.

Другою, вищою ступінню формальної логіки є *математична логіка*, в якій широко застосовуються математичні методи і спеціальні формалізовані мови, так звані числення [2].

Проблемами вивідного знання, тобто, коли відволікаються від конкретних прикладів, а досліджують загальні форми умовиводів, абстрагуючись від змісту умов і виводів (наслідків), цікавились індійські та китайські логіки в VI-V ст. до н.е., античні філософи Демокріт, Платон (V-IV ст. до н.е.) та інші.

Вперше системним викладом формальної логіки як науки є логічне вчення Арістотеля (III ст. до н.е.). Заслугою Арістотеля є те, що він, перш за все, розробив логічну теорію силлогізмів (формальних виводів) та ввів у логіку змінні, що дало можливість відкрити загальні логічні правила та закони. Ним була розроблена вперше формально-логічна система, в якій була реалізована ідея аксіоматичного методу.

Праці Арістотеля («Органон», «Фізика», «Аналітика», «Риторика», «Метафізика») відіграли велику роль у всій подальшій історії розвитку логіки. Філософи і логіки наступних поколінь (аж до середини XIX століття) по суті обмежувались коментарями і викладом арістотелівської логіки.

Є підстави вважати, що деякі праці античних мислителів з логіки стали відомими в Київській Русі вже в XI ст.

В останні півтора століття в логіці відбулись якісні зміни. Щоправда, передумови цих змін з'явилися ще тоді, коли Лейбніц запропонував ідею числення і відповідну формалізовану мову. Цю ідею, як зазначалось, сучасники не зрозуміли і зрештою забули. Проте в другій половині XIX ст. були закладені основи математичної логіки. В XX ст. на людство чекала ціла злива ідей, завдяки яким сучасна логіка пережила наукову революцію. Назвемо лише деяких видатних учених і відмітимо їх внесок у розвиток математичної логіки (класичний період – XIX ст. – початок XX ст.).

Джордж Буль (1815—1864) — один із засновників математичної логіки. Поклавши в основу своїх досліджень аналогію між алгеброю і логікою, він розробив відповідне логічне числення, в якому застосував закони й операції математики (додавання класів, множення тощо). Алгебро-логічний метод дав можливість Булю виявити нові типи висновків, які не враховувались у традиційній силогістиці. Він детально проаналізував закони комутативності, асоціативності, дистрибутивності.

Огастес де Морган (1806—1871) — засновник логічного аналізу відношень. Він сформулював основні принципи логіки висловлювань і логіки класів. У розробленій ним алгебрі відношень аналізував операції додавання, множення тощо. У математичній логіці Морган сформулював закони, які носять його ім'я — «закони де Моргана».

Готліб Фреге (1848—1925) заклав основи логічної семантики. У своїй фундаментальній праці «Основні закони арифметики» він побудував систему формалізованої арифметики на основі розробленого ним розширеного числення предикатів з метою обґрунтування ідеї про зведення математики до логіки.

Ідеї Фреге багато в чому наперед визначили розвиток логіки XX ст.: він увів поняття логічної функції та розділив властивості речей і їх відношень (а відповідно одномісних і багатомісних предикатів); вперше увів символи для позначення кванторів.

Давид Гільберт (1862—1943) досяг значних успіхів у застосуванні методу формалізації в тлумаченні логічних умовиводів, у розробці числення висловлювань і предикатів, у дослідженні аксіоматизації знань. Він здійснив строго аксіоматичну побудову геометрії Евкліда, що наперед визначило подальший розвиток досліджень з аксіоматизації наукового знання, запропонував розгорнутий план обґрунтування математики шляхом її повної формалізації. Щоправда, ця програма виявилась нездійсненною (теорема Геделя), проте її ідеї спричинили виникнення метаматематики (теорії доведень).

Альфред-Норт Уайтхед (1861—1947) у співавторстві з Б. Расселом написав тритомну працю «Принципи математики», яка зробила значний внесок у розвиток математичної логіки.

Бертран Рассел (1872—1970) має великі заслуги у сфері розробки мови сучасної логічної символіки. Він систематично виклав теорію числення висловлювань і теорію класів. У книзі «Принципи математики» разом з Уайтхедом розвинув математичну логіку способом аксіоматизації й формалізації числень висловлювань, класів і предикатів, а також теорію типів як способу подолання парадоксів. Крім того, Рассел досліджував логічний аспект проблеми існування, логічний статус дескрипції, природу деяких парадоксів тощо [3].

Джузеппе Пеано (1858—1932) запропонував ідеї, завдяки яким було здійснено перехід від старої алгебри логіки до математичної в її сучасному вигляді. Він увів прийняті в сучасній математичній логіці символи ($\in$ — знак входження елемента до тієї чи іншої множини; $\supset$ — знак включення множини; $\cup$ — знак об'єднання множин; $\cap$ — знак перетину множин), сформулював систему аксіом для арифметики натурального ряду.

Платон Порецький (1846—1907) першим у Росії розробив і читав курс математичної логіки. Він узагальнив і розвинув досягнення Дж. Буля, У.С.Джевонса, Е. Шредера у сфері алгебри логіки. Значне місце у працях Порецького займала «теорія наслідків». Ним узагальнена теорія силогістики традиційної логіки, проаналізовані деякі несилогістичні міркування тощо.

Сучасна математична логіка формувалась в XIX ст.–на початку XX ст., але поправу її засновником можна вважати Готфріда Лейбніца – його праці випереджували свою епоху на декілька століть вперед [3].

Спочатку сучасна логіка повністю орієнтувалася на аналіз лише математичних міркувань. За її допомогою вчені намагалися розв’язати проблеми основ математичного знання після того, як були знайдені парадокси у теорії множин. Цей період в її розвитку іноді називають "класичним".

У період радянської влади в Україні формальну логіку тривалий час ігнорували, а то й критикували як основу метафізичного методу. Тільки в другій половині 40-х років її було реабілітовано, і курс формальної логіки введено до програм не лише вузів, а й середніх шкіл та деяких спеціальних середніх навчальних закладів.

В останні десятиліття в Україні виросла ціла когорта вчених, які плідно працюють над проблемами сучасної логіки та методики її викладання. Це насамперед А. Ішмуратов, В. Омельянчик, Я. Хромий та інші.

Значним є внесок у розвиток сучасної логіки і деяких інших учених, зокрема представників львівсько-варшавської школи XIX-XX ст., до якої належали К. Твардовський, Я. Лукасевич, С. Лесьневський, А. Тарський, Т.Котарбіньський, К. Айдукевич та ін. Вони багато зробили для розвитку логічної семантики, теорії множин, модальної й багатозначної логік, математичної логіки, для розв'язання металогічних і методологічних проблем тощо [3].

Одним з напрямів сучасної математичної логіки є некласичні логіки, які почали розвиватися на початку XX ст. Однією з перших некласичних логік є інтуїціоністська (конструктивна логіка [4]), яка з’явилася у зв’язку з критикою одного з основних законів класичної логіки – закону виключеного третього.

Конструктивна логіка [1, 4] – розділ математичної логіки, що вивчає логічні аспекти конструктивної математики. Задачі конструктивної логіки поділяються на дві групи. До першої групи належать: побудова формалізованих мов конструктивної математики; до другої – вивчення класу конструктивно істинних формул і формального апарату логічного виведення конструктивної математики логічними методами [6].

Широко відомими є багатозначні логіки [7], що їх розробили польський логік Я. Лукасевич (1920) та американський математик Е. Пост (1921).

Багатозначна логіка [7] використовується для вивчення логічних числень (числення висловлювань та числення предикатів), у яких висловлюванням надається будь-яка скінченна (більша за 1), а іноді і нескінченна множина значень істинності. Історично першими системами багатозначних логік виявилися двозначне числення Буля (середина XX ст.), пізніше оформлене зусиллями англійського логіка Рассела (1872-1971), німецького логіка Гільберта (1862-1943), американського математика Е. Поста (1897-1954) у двозначну логіку.

З критикою «парадоксів матеріальної імплікації», які суперечать інтуїтивному розумінню логічного слідування, пов’язується побудова *логік строгої імплікації* [1]. Першу з таких логік розробив американський логік К. Льюїс в 1912-18 рр., дальшу формалізацію строгої імплікації запропонував у 1956 р. німецький математик В. Аккерман.

Розгляд суджень не лише істинних і хибних, а ще й можливих, необхідних та ін. привів до створення *модальної логіки* [5]. В таких логіках за початкові логічні операції беруть поряд з традиційними операціями так звані модальні оператори: необхідність, можливість тощо.

За останні десятиліття некласична логіка дала ряд важливих для розвитку математичної логіки результатів. Вони ведуть до істотньої перебудови всієї структури логіки. Але некласичні логіки не усувають класичну, а вказують ряд напрямів, які розробляють нові проблеми логіки і відшукують нові засоби і методи логічних досліджень, шляхи практичного застосування сучасної математичної логіки в науці і техніці.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Кондаков Н.И. Логический словарь. – М.:Наука, 1971.
2. Глушков В.М. Введение в кибернетику. – Киев: Изд. АН УССР, 1964.
3. Стяжкин Н.И. Формирование математической логики. М.: Наука, 1967.
4. Енциклопедія кібернетики. – К.: ГР УРЕ, 1973, т.1.
5. Зиновьев А.А. Некласическая логика. – М.: Наука, 1970.
6. Марков А.А. О конструктивной математике. Труды математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. – М.: АН СССР, 1962, т.67.
7. Яблонский С.В. Функциональные построения в k-значной логике. Труды математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. – М.: АН СССР, 1958, т.51.