

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Випуск 67

Серія:

МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Кіровоград – 2008

ББК 22.1я73

НЗ4

УДК 512.5, 532.5, 519.2, 518.3, 517.9

Наукові записки. – Випуск 67. – Серія: Математичні науки. –
Кіровоград: РВВ КДПУ ім В. Винниченка, 2008. – 96 с.

ISBN 966-8088-27-8

Збірник наукових праць є результатом окремих наукових пошуків дослідників теоретичних проблем математики.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

1. Андрієнко В.О. – доктор фізико-математичних наук, професор.
2. Авраменко О.В. – доктор фізико-математичних наук, професор.
3. Волков Ю.І. – доктор фізико-математичних наук, професор
(відповідальний редактор).
4. Кушнір В.А. – доктор педагогічних наук, професор
5. Петренюк А.Я. – доктор фізико-математичних наук, професор
6. Плічко А.М. – доктор фізико-математичних наук, професор.
7. Романов В.О. – кандидат фізико-математичних наук, доцент.
8. Філер З.Ю. – доктор технічних наук, професор.
9. Шевчук І.О. – доктор фізико-математичних наук, професор.
10. Яременко Ю.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент
(відповідальний секретар).

Друкується за рішенням ученої ради
Кіровоградського державного
педагогічного університету
імені Володимира Винниченка
(протокол № 12 від 26 травня 2008 р.)

Адреса редакції: 25006, м.Кіровоград, вул. Шевченка, 1,
кафедра математики, тел. 29-31-33.

ISBN 966-8088-27-8

© Кіровоградський державний педагогічний
університет імені Володимира Винниченка

УДК 532.59

УМОВИ ЛІНІЙНОЇ СТІЙКОСТІ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

О.В.Авраменко, В.В.Нарадовий

Методом багатомасштабних розвинень отримано перші три наближення нелінійної задачі поширення хвильових пакетів на поверхні контакту двох рідких середовищ та на вільній поверхні. Знайдено розв'язки задачі першого наближення, виведено дисперсійне рівняння.

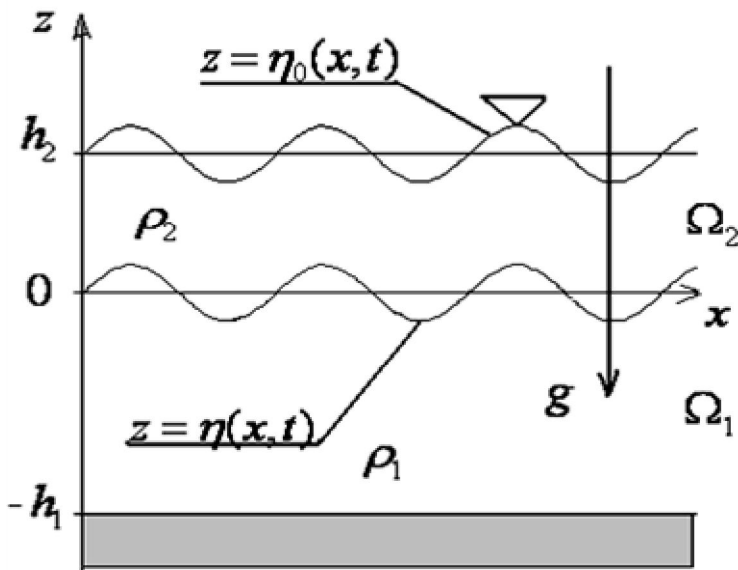
The first three linear approximation problems of the non-linear problem of wave-packets propagation along the interface of two fluids and free surface are founded by the method of multiply scales. Solutions of the first problem and the dispersion equation are obtained.

Вступ. Останні дослідження у області нелінійної гідромеханіки, зокрема у застосуванні такого поширеного математичного методу, як метод багатомасштабних розвинень, стикнулися з проблемою обчислень наступних членів у еволюційних рівняннях. Ця проблема пояснюється як недостатньо розробленим алгоритмом, так і підвищеною громіздкістю аналітичних перетворень.

До теперішнього часу у переважній кількості задач механіки і фізики, де застосовувався метод багатомасштабних розвинень, були отримані результати тільки до третього порядку. Серед них можна особливо виділити клас задач, що враховують поверхневий натяг, що істотно впливає на капілярно - гравітаційні хвилі, де важливий внесок високих гармонік у хвильовий процес у цілому. В публікаціях [1], [3], [5]-[9] досліджено двошарові системи вигляду "півпростір - півпростір", "шар - півпростір" до четвертого наближення та систему "шар - шар" до третього наближення, а також вироблено обґрунтування методологічних нюансів методу багатомасштабних розвинень. Аналіз попередніх досліджень показує, що більшість задач поширення хвильових пакетів вздовж поверхні контакту в рамках слабо нелінійних моделей стосувалися двошарових рідин, при цьому вивчалися поверхневі або внутрішні хвильові пакети. Зараз особливий інтерес викликають дослідження не тільки поширення окремих хвильових пакетів, а і взаємодію внутрішніх та поверхневих хвиль. Наближення «твердої кришки» достатньо обґрунтоване в рамках окремих моделей хвильових рухів, але межі його достовірності для гравітаційно-капілярних хвиль в рамках слабо нелінійної моделі також становить значний інтерес.

У даній роботі розглядається нова слабо нелінійна задача поширення хвильових пакетів у гідродинамічній системі, яка складається з двох рідин з різними властивостями, верхня з яких обмежена згори вільною поверхнею. Створюються умови для поширення хвильових пакетів як на вільній поверхні, так і на поверхні контакту рідин. На обох поверхнях враховується сила поверхневого натягу середовищі з урахуванням поверхневого натягу.

1. **Постановка задачі та метод розв’язання.** В роботі досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів кінцевої амплітуди на



поверхні контакту рідкого шару з густиною ρ_1 та верхнього рідкого шару з густиною ρ_2 . Шари розділені поверхнею контакту $z = \eta(x, t)$, а верхній шар обмежений згори вільною поверхнею $z = \eta_0(x, t)$. При розв’язанні враховуємо сили поверхневого натягу на поверхні контакту та на вільній поверхні. Сила тяжіння направлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від’ємному z -напрямку. Нижче

представимо математичну постановку задачі.

Швидкість поширення пакетів у відповідних областях виражаються через градієнти потенціалів і повинні задовольняти рівнянням руху,

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{у} \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

кінематичні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = \eta(x, t), \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = - \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = \eta_0(x, t), \quad (3)$$

динамічні умови на поверхні контакту та на вільній поверхні

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1 - \rho)\eta + \frac{1}{2}(\nabla \varphi_1)^2 - \frac{1}{2}\rho(\nabla \varphi_2)^2 - T \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = \eta(x, t), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \eta_0 + \frac{1}{2}(\nabla \varphi_2)^2 - T_0 \left(1 + \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial x} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = \eta_0(x, t), \quad (5)$$

гранична умова на дні

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1. \quad (6)$$

Введемо безрозмірні величини за допомогою характерної довжини L , що рівна товщині верхнього шару h_2 , максимального відхилення вільної поверхні a , характерного часу $(L/g)^{1/2}$, густини нижньої рідини ρ_1 , де g прискорення вільного падіння. Перейдемо до безрозмірних величин, які позначимо зірочкою,

$$(x, z) = L(x^*, z^*), \quad t = \sqrt{\frac{L}{g}} t^*, \quad \rho_2 = \rho_1 \rho^*, \quad (\eta, \eta_0) = a(\eta^*, \eta_0^*),$$

$$\varphi = \frac{La}{\sqrt{L/g}} \varphi^*, \quad (T, T_0) = L^2 \rho_1 g (T^*, T_0^*). \quad (7)$$

Позначивши величину $\frac{a}{L} = \alpha$ та використавши формули (7)

перепишемо систему (1)-(6) у безрозмірних змінних

$$\frac{\partial^2 \varphi_j^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \varphi_j^*}{\partial z^{*2}} = 0 \quad \text{у} \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} - \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial z^*} = -\alpha \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial x^*} \quad \text{при} \quad z^* = \alpha \eta^*(x, t), \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \eta_0^*}{\partial t^*} - \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z^*} = -\alpha \frac{\partial \eta_0^*}{\partial t^*} \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z^*} \quad \text{при} \quad z^* = \alpha \eta_0^*(x, t), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t^*} - \rho^* \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t^*} + (1 - \rho^*) \eta^* + \frac{1}{2} \alpha (\nabla \varphi_1^*)^2 - \frac{1}{2} \alpha \rho^* (\nabla \varphi_2^*)^2 -$$

$$- T^* \left(1 + \left(\alpha \frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad \text{при} \quad z^* = \alpha \eta^*(x, t), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t^*} + \eta^* + \frac{1}{2} \alpha (\nabla \varphi_2^*)^2 - T_0^* \left(1 + \left(\alpha \frac{\partial \eta_0^*}{\partial x^*} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \eta_0^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad \text{при} \quad z^* = \alpha \eta_0^*(x, t), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{при} \quad z^* = -h_1^* = -\frac{h_1}{L}, \quad (13)$$

α – коефіцієнт нелінійності [2].

Для розв'язування задачі використаємо метод багатомасштабних розвинень до третього порядку (в подальшому зірочки опускаємо) [4]. Представимо шукані функції відхилення поверхні контакту, відхилення вільної поверхні та потенціали швидкостей у вигляді

$$\varphi_j(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n(X_0, X_1, X_2, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4),$$

$$\eta_0(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{0n}(X_0, X_1, X_2, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4), \quad (14)$$

$$\varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(X_0, X_1, X_2, z, T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^4), \quad j=1,2. \quad (15)$$

Швидкий масштаб t_0 и короткий масштаб x_0 характеризують частоту та довжину хвилі, відповідно. Повільні масштаби t_1, t_2 та довгі масштаби x_1, x_2 характеризують часові та просторові зміни фази та амплітуди хвилі.

2. Три лінійні наближення нелінійної задачі. Підставивши формули (14)-(15) в систему (8)-(13), та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях α отримуємо три лінійні наближення нелінійної задачі (8)-(13).

Перше наближення (при α):

$$\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{у } \Omega_1, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{у } \Omega_2, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \eta_{01}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_2, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial T_0} - \rho \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial T_0} + (1-\rho)\eta_1 - T \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial X_0^2} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial T_0} + \eta_{01} - T \frac{\partial^2 \eta_{01}}{\partial X_0^2} = 0 \quad \text{при } z = h_2, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h_1. \quad (23)$$

Друге наближення (при α^2):

$$\frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_0 \partial X_1} = 0 \quad \text{у } \Omega_1, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial X_1} = 0 \quad \text{у } \Omega_2, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial T_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial z} - \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial z^2} = - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} \quad \text{при } z = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial T_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial z} - \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} = - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \quad \text{при } z = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \eta_{01}}{\partial T_1} + \frac{\partial \eta_{02}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial z} - \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} = - \frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \quad \text{при } z = h_2, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial T_0} + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial T_0 \partial z} - \rho \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial T_0} + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0 \partial z} \right) + (1 - \rho) \eta_2 + \\ + 0.5 \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} \right)^2 + 0.5 \left(\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} \right)^2 - \rho \left(0.5 \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \right)^2 + 0.5 \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \right)^2 \right) - \\ - T \left(\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial X_0^2} + 2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial X_0 \partial X_1} \right) = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial T_0} + \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0 \partial z} + \eta_{02} + 0.5 \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \right)^2 + 0.5 \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \right)^2 - \\ - T_0 \left(\frac{\partial^2 \eta_{02}}{\partial X_0^2} + 2 \frac{\partial^2 \eta_{01}}{\partial X_0 \partial X_1} \right) = 0 \quad \text{при } z = h_2, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h_1. \quad (31)$$

Третє наближення (при α^3):

$$\frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{13}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial X_0 \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_0 \partial X_2} = 0 \quad \text{у } \Omega_1, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{23}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial X_0 \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial X_2} = 0 \quad \text{у } \Omega_2, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \eta_3}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial z} - \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial z^2} - \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial z^2} - 0.5 \eta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_{11}}{\partial z^3} = - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_1} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} - \\ - \frac{\partial \eta_2}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial X_0} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_0 \partial z} \quad \text{при } z = 0, \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta_2}{\partial T_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \eta_3}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial z} - \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial z^2} - \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} - 0.5 \eta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_{21}}{\partial z^3} = - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_1} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} - \\ & - \frac{\partial \eta_2}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial X_0} - \eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial z} \quad \text{при } z = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta_{02}}{\partial T_1} + \frac{\partial \eta_{01}}{\partial T_2} + \frac{\partial \eta_{03}}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial z} - \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial z^2} - \eta_{02} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} - 0.5 \eta_{01}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{21}}{\partial z^3} = \\ & = - \frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_1} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} - \frac{\partial \eta_{02}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} - \frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_1} - \frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial X_0} - \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial z} \frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_0} \\ & \quad \text{при } z = h_2, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial T_2} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial T_0} + \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial T_0 \partial z} + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial T_1 \partial z} + 0.5 \eta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_{11}}{\partial T_0 \partial z^2} - \\ & - \rho \left(\frac{\partial \varphi_{21}}{\partial T_2} + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial T_0} + \eta_2 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0 \partial z} + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_1 \partial z} + 0.5 \eta_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_{21}}{\partial T_0 \partial z^2} \right) + \\ & + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{12}}{\partial T_0 \partial z} + (1 - \rho) \eta_3 + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial X_1} + \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial X_0 \partial z} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial X_0} + \\ & + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial z^2} - \rho \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial T_0 \partial z} - \rho \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_1} - \rho \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial X_1} - \\ & - \rho \eta_1 \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial z} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} - \rho \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial z} - \rho \eta_1 \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} - T \frac{\partial^2 \eta_3}{\partial X_0^2} - T \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial X_1^2} - \\ & - 2T \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial X_0 \partial X_1} - 2T \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial X_0 \partial X_2} - 1.5T \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial X_0} \right)^2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial X_0^2} = 0 \quad \text{при } z = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial T_2} + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial T_1} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial T_0} + \eta_{02} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_0 \partial z} + \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial T_1 \partial z} + 0.5 \eta_{01}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{21}}{\partial T_0 \partial z^2} + \\ & + \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{22}}{\partial T_0 \partial z} + \eta_{03} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial X_{01}} + \eta_{01} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial X_0 \partial z} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial X_0} + \\ & + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial z} + \eta_{01} \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial z^2} - T_0 \frac{\partial^2 \eta_{03}}{\partial X_0^2} - \\ & - T_0 \frac{\partial^2 \eta_{01}}{\partial X_1^2} - 2T_0 \frac{\partial^2 \eta_{02}}{\partial X_0 \partial X_1} - T_0 \frac{\partial^2 \eta_{01}}{\partial X_0 \partial X_2} - 1.5T_0 \left(\frac{\partial \eta_{01}}{\partial X_0} \right)^2 \frac{\partial^2 \eta_{01}}{\partial X_0^2} = 0, \\ & \quad \text{при } z = h_2, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\frac{\partial \varphi_{13}}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = -h_1. \quad (39)$$

3. Розв’язки першої лінійної задачі та дисперсійне рівняння. Розв’язок першої лінійної задачі (16)-(21) знайдено методом невизначених коефіцієнтів.

Невідомі функції шукаємо у вигляді

$$\varphi_{11} = \left(a e^{i\theta} + \bar{a} e^{-i\theta} \right) \text{ch}(k(h_1 + z)) + \left(b e^{i\theta} + \bar{b} e^{-i\theta} \right) \text{sh}(k(h_1 + z)), \quad (40)$$

$$\varphi_{21} = \left(c e^{i\theta} + \bar{c} e^{-i\theta} \right) \text{ch}(k(h_2 - z)) + \left(d e^{i\theta} + \bar{d} e^{-i\theta} \right) \text{sh}(k(h_2 - z)), \quad (41)$$

де $\theta = kx_0 - \omega t_0$, k – хвильове число центру хвильового пакету, ω – частота центру хвильового пакету.

Підставляючи (40) у (18), і враховуючи (23) отримуємо

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial T_0} = k \left(a e^{i\theta} + \bar{a} e^{-i\theta} \right) \text{sh}(kh_1),$$

звідки отримуємо, що

$$\eta_1 = -\frac{k}{i\omega} \left(a e^{i\theta} + \bar{a} e^{-i\theta} \right) \text{sh}(kh_1).$$

Введемо позначення

$$A = -\frac{k}{i\omega} a \text{sh}(kh_1), \quad \bar{A} = -\frac{k}{i\omega} \bar{a} \text{sh}(kh_1),$$

тоді можна записати наступне

$$\eta_1 = A e^{i\theta} + \bar{A} e^{-i\theta} \quad (42)$$

$$\varphi_{11} = -\frac{i\omega}{k} (A e^{i\theta} - \bar{A} e^{-i\theta}) \frac{\text{ch}(k(h_1 + z))}{\text{sh}(kh_1)}. \quad (43)$$

Підставимо (41) в (20) та отримаємо

$$\eta_{01} = D e^{i\theta} + \bar{D} e^{-i\theta}, \quad \text{де } D = \frac{k}{i\omega} d, \quad \bar{D} = -\frac{k}{i\omega} \bar{d}. \quad (44)$$

Підставивши вирази (41) та (44) у (22), та враховуючи співвідношення (19), отримаємо, що:

$$\varphi_{12} = \frac{i\omega}{k} \left(\frac{\omega^2 \text{sh}(k(h_2 - z)) - (k + T_0 k^3) \text{ch}(k(h_2 - z))}{\omega^2 \text{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \text{sh}(kh_2)} \right) (A e^{i\theta} - \bar{A} e^{-i\theta}), \quad (45)$$

$$\eta_{01} = \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 \text{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \text{sh}(kh_2)} \right) (A e^{i\theta} + \bar{A} e^{-i\theta}). \quad (46)$$

Отже, отримано розв’язки першої лінійної задачі у вигляді (42)-(46). Підставимо знайдені розв’язки в співвідношення (21) й отримаємо дисперсійне

рівняння, що пов'язує між собою частоту та хвильове число центру хвильового пакету

$$\omega^4(\rho + \operatorname{cth}(kh_1)\operatorname{cth}(kh_2)) - \omega^2[\operatorname{cth}(kh_1)(k + T_0k^3) + \operatorname{cth}(kh_2)(k + T_0k^3) + \operatorname{cth}(kh_2)(k - \rho k + Tk^3)] + (k - \rho k + Tk^3)(k + T_0k^3) = 0 \quad (47)$$

Дисперсійне рівняння (47) задає умови поширення лінійно стійких хвильових пакетів у розглядуваній гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею».

Достовірність отриманого дисперсійного співвідношення (47) підтверджують виконання відповідних граничних переходів та порівняння його з аналогічними результатами для гідродинамічних систем «шар-шар» [8], «півпростір-півпростір» [5], «півпростір з вільною поверхнею» [9]

Висновки. Представлено перші три лінійні наближення нової слабо нелінійної задачі про поширення хвильових пакетів у двошаровій гідродинамічній системі, яка знизу обмежена твердим дном, а згори – вільною поверхнею. В результаті аналізу першої лінійної задачі отримано вирази для потенціалів швидкостей у верхньому та нижньому шарах, а також вирази для відхилень вільної поверхні та поверхні контакту рідких середовищ. Отримано дисперсійне рівняння, яке задає умови лінійної стійкості хвильових пакетів у розглядуваній системі.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Особливості хвильових пакетів у двошаровій рідині // Каразінські природознавчі студії. Матеріали міжнародної наукової конференції 14-16 червня 2004 р. – Харків: Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2004. – С.168.
2. Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Фізичний зміст параметру багатомасштабного розвинення // Наукові записки.- Випуск 66. – Серія: Математичні науки: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2007. - С. 3-5.
3. Авраменко О.В., Селезов И.Т. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред // Прикладна гідромеханіка.- 2002.- Т.4(76), №4.- С.3-13.
4. Найфэ А. Методы возмущений.- М.: Мир, 1976.
5. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикладна гідромеханіка.- 2001.- Т.3(75), №4.- С.38-46.
6. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта // Мат. методи та фіз.-мех. поля.- 2000.- 44, №2. - С. 113-122.
7. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины // Прикладна гідромеханіка. – 2005. – Том 7(79), № 1. - С. 80-89.
8. Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Устойчивость волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе //Прикладна гідромеханіка. - 2006, - 8(90), №4. - С.60-65.
9. Nayfeh A.H. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME., Ser. E.- 1976.- 43, N4.- P. 584-588.

УДК 517.51

УЗАГАЛЬНЕНА ГЕНЕРАТРИСА БЕЗ'Є

Ю.І. Волков

В этой статье рассматриваются свойства обобщенного преобразования Безье, его применение для приближения функций и построения кривых.

In this paper we consider properties of generalized Bezer's transformation, its using for the approximation of functions and curves tracing.

1. Вступ

Позначатимемо: через $\{y\}$ (або просто y) числову послідовність $\{y_0, \dots, y_{2n}\}$;

$$b = b(x, a) := \left(1 - \frac{2a(1-x)}{a + \sqrt{1 + (a^2 - 1)(2x - 1)^2}} \right), 0 \leq x \leq 1, a > 0;$$

$$C(n, k, a) := \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (1 + 2az + z^2)^n \Big|_{z=0} = \sum_{i+2j=k} \frac{n!(2a)^i}{i!(n-i-j)!}, k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Означення 1. Функция

$$B_n(y, x, a) := \sum_{k=0}^n y_k C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2}$$

називається узагальненою генератрисою Без'є послідовності $\{y\}$.

Зокрема, якщо $a=1$, то

$$C(n, k, 1) = C_{2n}^k, B_n(y, x, 1) = B_{2n}(y, x) = \sum_{k=0}^n y_k C_{2n}^k x^k (1-x)^{2n-k},$$

тобто, $B_n(y, x, 1)$ це звичайна функція Без'є, яка породжена послідовністю $\{y\}$ (див., наприклад, [1], стор. 44-62); якщо $a=0$, то

$$C(n, k, 0) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \text{ непарне} \\ C_{n-k/2}, & \text{якщо } k \text{ парне,} \end{cases}$$

а $B_n(y, x, 0)$ це звичайна функція Без'є, яка породжена послідовністю $\{y\} = \{y_0, \dots, y_{2n}\}$.

Метою даної роботи є вивчення функцій $B_n(y, x, a)$ та їхніх застосувань для апроксимації неперервних функцій і побудови кривих.

1. Допоміжні пропозиції.

Лема 1. Числа $C(n, k, a)$ задовольняють рекурентному співвідношенню:

$$C(n, k, a) = C(n-1, k, a) + 2aC(n-1, k-1, a) + C(n-1, k-2, a), C(0, 0, a) = 1, C(0, k, a) = 1, C(1, 1, a) = 2a, C(2, 1, a) = 1.$$

Лема випливає з співвідношення

$$(1 + 2az + z^2)^n = (1 + 2az + z^2)^{n-1} (1 + 2az + z^2) \text{ , бо } C(n,k,a) \text{ це коефіцієнти}$$

многочлена $(1 + 2az + z^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} C(n,k,a)z^k$.

Таблиця чисел $C(n,k,a)$ для $n=1, 2, 3, 4$.

1	2a	1						
1	4a	2+4a ²	4a	1				
1	6a	3+12a ²	12a+8a ³	3+12a ²	6a	1		
1	8a	4+24a ²	24a+32a ³	6+48a ² +16a ⁴	24a+32a ³	4+24a ²	8a	1

Далі використовуватимемо таке позначення:

$$w = w(x,a) := \sqrt{1 + (a^2 - 1)(1 - 2x)^2} = \sqrt{4x(1 - x) + a^2(1 - 2x)^2}.$$

Лема 2. Функція $b(x,a)$, її перша і друга похідні по x невід’ємні і $b(x,a) \leq 1, 0 \leq x \leq 1, a \geq 0$.

Дійсно,

$$b'(x,a) = \frac{w(x,a) + a(2x - 1)}{w(x,a)} \geq \frac{a|2x - 1| + a(2x - 1)}{w(x,a)} \geq 0.$$

Тому функція $b(x,a)$ не спадає, а через те, що $b(0,a)=0, b(1,a)=1$, то $0 \leq b(x,a) \leq 1$.

Далі,

$$b''(x,a) = 2a(w(x,a))^{-3} \geq 0, \tag{1}$$

тому функція $b'(x,a)$ не спадає, а через те, що

$$b'(0,a) = 0, b'(1,a) = 2, \text{ то } 0 \leq b'(x,a) \leq 2.$$

Лема 3. Має місце подання

$$B_n(y,x,a) = b(1-x,a)^n \sum_{k=0}^{2n} y_k C(n,k,a) a^k \left(\frac{b(x,a)}{x-b(x,a)} \right)^k \tag{2}$$

Випливає з означення функції $b(x,a)$.

З (2) слідує, що операція переходу від послідовності $\{y\}$ до функції $B_n(y,x,a)$ лінійна і додатня.

Нехай E - оператор зсуву, I - одиничний оператор, Δ - різницевий оператор. Тоді $E^k y_0 = y_k, Iy_k = y_k, \Delta^k y_0 = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y_i, k = 0,1,\dots$

Лема 4. Мають місце подання

$$B_n(y,x,a) = (b(1-x,a) + 2(x-b(x,a))E + b(x,a)E^2)^n y_0, \tag{3}$$

$$B_n(y, x, a) = (1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^n y_0 = \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i (b(x, a))^j \Delta^{i+2j} y_0. \tag{4}$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} B_n(y, x, a) &= (b(1-x, a) + 2(x-b(x, a))E + b(x, a)E^2)^n y_0 \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} b(1-x, a)^{n-i-j} 2^i (x-b(x, a))^i b(x, a)^j E^i E^{2j} y_0 \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} b(1-x, a)^n (2a)^i \left(\frac{a}{x-b(x, a)}\right)^{i+2j} b(x, a)^{i+2j} y_{i+2j} \\ &= b(1-x, a)^n \sum_{k=0}^{2n} y_k C(n, k, a) a^k \left(\frac{b(x, a)}{x-b(x, a)}\right)^k = B_n(y, x, a). \end{aligned}$$

Співвідношення (4) впливає з (1), якщо врахувати, що $E = \Delta + I$.

Наслідок 1. Нехай $y_k^{(0)} = y_k, k = 0, 1, \dots, 2n$;

$$y_k^{(m)} = y_k^{(m-1)} + 2x\Delta y_k^{(m-1)} + b(x, a)\Delta^2 y_k^{(m-1)}, m = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, \dots, 2(n-m).$$

Тоді

$$B_n(y, x, a) = B_{n-m}(y^{(m)}, x, a),$$

де

$$\{y^{(m)}\} = \{y_0^{(m)}, y_1^{(m)}, \dots, y_{2(n-m)}^{(m)}\}.$$

Дійсно, з (4) випливає

$$B_n(y, x, a) = (1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-m} ((1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^m y_0),$$

а звідси випливає наслідок.

Лема 5. Нехай $\{y\} = \{0^m, 1^m, \dots, (2n)^m\}, m \in N$. Тоді

$$B_n(y, x, a) = \sum_{k=0}^m k! S(m, k) \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i b(x, a)^j, \tag{5}$$

де $S(m, k)$ числа Стірлінга другого роду.

Дійсно,

$$\begin{aligned} B_n(y, x, a) &= (1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^n 0^m \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i b(x, a)^j \Delta^{i+2j} 0^m \\ &= \sum_{k=0}^m \Delta^k 0^m \sum_{0 \leq i+j=k} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i b(x, a)^j, \end{aligned}$$

а звідси випливає (5), бо $S(m, k) = \Delta^k 0^m / k!$.

Наслідок 2. Нехай $\{y\} = \{1, 1, \dots, 1\}$. Тоді $B_n(y, x, a) = 1$.

Наслідок 3. Нехай $\{y\} = \{0, 1, 2, \dots, (2n)\}$. Тоді $B_n(y, x, a) = 2nx$. (6)

Наслідок 4. Нехай $\{y\} = \{0^2, 1^2, 2^2, \dots, (2n)^2\}$. Тоді
 $B_n(y, x, a) = 2nx + 4n(n-1)x^2 + 2nb(x, a)$. (7)

Наслідок 5. Нехай $\{y\} = \{0^3, 1^3, 2^3, \dots, (2n)^3\}$. Тоді
 $B_n(y, x, a) = 2nx + 12n(n-1)x^2 + 6nb(x, a) + 8n(n-1)(n-2)x^3 + 12n(n-1)b(x, a)$.

2. Властивості узагальненої генератрисы Без'є

Теорема 1. Якщо послідовність $\{y\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{2n}\}$ не спадає (не зростає), то функція $B_n(y, x, a)$ не спадає (не зростає).

Доведення. Нехай $\{\tilde{y}\} = \{\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{2n}\}$, де

$$\tilde{y}_k = (2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)y_k = b'(1-x, a)\Delta y_k + b'(x, a)\Delta y_{k+1}, k = 0, 1, \dots, 2n-2.$$

Скористаємося (4) та (3). Отримаємо

$$\frac{d}{dx} B_n(y, x, a) = n(1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-1} (2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)y_0 = B_{n-1}(\tilde{y}, x, a) \geq 0 (\leq 0), \text{ б}$$

о $b'(x, a) \geq 0$ і $2 - b'(x, a) = 1 - a(2x - 1)w^{-1} \geq 0$, а послідовність $\{y\}$ не спадає (не зростає).

Теорема 2. Якщо послідовність $\{y\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{2n}\}$ опукла, то функція $B_n(y, x, a)$ опукла.

Доведення. Нехай $\{\hat{y}\} = \{\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{2n-4}\}$, де

$$\hat{y}_k = (2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)^2 y_k = b'(x, a)^2 \Delta^2 y_{k+2} + 2b'(x, a)(2 - b'(x, a))\Delta^2 y_{k+1} + (2 - b'(x, a))^2 \Delta^2 y_k, k = 0, 1, \dots, 2n-2,$$

а $\{\bar{y}\} = \{\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{2n-2}\}$, де

$$\bar{y}_k = b''(x, a)(1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)y_k = b(1-x, a)\Delta^2 y_k + 2(x - b(x, a))\Delta^2 y_{k+1} + b(x, a)\Delta^2 y_k, k = 0, 1, \dots, 2n-4.$$

Скористаємося (4) і (3). Отримаємо:

$$\frac{d^2}{dx^2} B_n(y, x, a) = n(n-1)(1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-2} (2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)^2 y_0 +$$

$nb''(x, a)(1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-1} \Delta y_0 = n(n-1)B_{n-2}(\hat{y}, x, a) + nB_{n-1}(\bar{y}, x, a) \geq 0$, бо $b''(x, a) \geq 0$ (див. (1)), $(2 - b'(x, a)) \geq 0$, $(1 - 2x + b) \geq 0$, $(x - b(x, a)) \geq 0$, а послідовність $\{y\}$ опукла.

Теорема 3. Нехай $t = \{0, 1, \dots, 2n\}$. Тоді

$$(x(1-2x) + b(x, a)) \frac{d}{dx} B_n(y, x, a) = B_n((t-2nx)y, x, a). \quad (8)$$

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_n(y, x, a) &:= \sum_{k=0}^n y_k C(n, k, a) b(x, a)^{k/2-1} b(1-x, a)^{n-k/2-1} \\ &\cdot \left(\frac{k}{2} (b'(x, a) b(1-x, a) + b(x, a) b'(1-x, a)) \right) - n b(x, a) b'(1-x, a), \\ &= \sum_{k=0}^n y_k C(n, k, a) b(x, a)^{k/2-1} b(1-x, a)^{n-k/2-1} \frac{2x(1-x)}{w(x, a)(a+w(x, a))} (k-2nx), \end{aligned}$$

а звідси випливає співвідношення (8), бо

$$\frac{2x(1-x)}{w(x, a)(a+w(x, a))} = \frac{x(1-2x) + b(x, a)}{w^2(x, a)}.$$

3. Апроксимаційні властивості

Візьмемо в якості членів послідовності $\{y\}$ значення функції $f(x)$, яка визначена і неперервна на проміжку $[0, 1]$:

$$\left\{ f(0), f\left(\frac{1}{2n}\right), \dots, f\left(\frac{k}{2n}\right), \dots, f(1) \right\}.$$

Тоді послідовність функцій $B_n(y, x, a)$ рівномірно збігається до функції $f(x)$ на проміжку $[0, 1]$. Цей результат є наслідком того, що додатні лінійні оператори $B_n(y, x, a)$, в силу теореми 3, задовольняють співвідношенню:

$$B_n((\cdot - x)f(\cdot), x, a) = \frac{v(x, a)}{2n} \frac{d}{dx} B_n(f(\cdot), x, a),$$

де $v(x, a) = x(1-2x) + b(x, a)$, а тому оператори належать до класу **B** (див.[2]), і, отже, результати цієї роботи можна застосувати й до операторів $B_n(y, x, a)$.

Якщо $a=0$, то $B_n(y, x, 0) = B_n(f, x)$ – звичайні многочлени Бернштейна функції $f(2t)$, а якщо $a=1$, то це многочлени Бернштейна $B_{2n}(f, x)$.

Теорема 4. *Нехай функція f неперервна на проміжку $[0, 1]$ і її модуль неперервності $\omega(\delta)$ опуклий (вгору). Тоді*

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq \omega\left(\sqrt{\frac{v(x, a)}{2n}}\right).$$

Доведення.

$$\begin{aligned} |B_n(f, x, a) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{2n} \left| f\left(\frac{k}{2n}\right) - f(x) \right| C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2n} \omega\left(\left|\frac{k}{2n} - x\right|\right) C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2} \end{aligned}$$

$$\leq \omega \left(\left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(\frac{k}{2n} - x \right)^2 C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2} \right)^{1/2} \right) = \omega \left(\sqrt{\frac{v(x, a)}{2n}} \right).$$

Наслідок 6. Для всякого x з проміжку $[0, 1]$

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq \omega \left(\frac{1}{2\sqrt{(a+1)n}} \right), \text{ якщо } 0 \leq a \leq 2,$$

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq \omega \left(\frac{a}{2\sqrt{(a^2-1)n}} \right), \text{ якщо } a > 2.$$

Дійсно,

$$\frac{d}{dx} v(x, a) = (1-2x) \left(2 - \frac{a}{\sqrt{1+(a^2-1)(2x-1)^2}} \right),$$

а звідси випливає: якщо $0 \leq a \leq 2$, то найбільше значення функції $v(x, a)$ досягається в точці $x=0,5$; якщо $a > 2$, то найбільше значення функції досягається в точках $0,5 \pm 0,25\sqrt{(a^2-4)(a^2-1)}$.

Наслідок 6. Нехай виконуються умови теореми 4. Тоді

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq \omega \left(\sqrt{\frac{2x(1-x)}{n} \left(\frac{|2x-1|}{1+|2x-1|} + \frac{1}{a} \right)} \right).$$

Доведення. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial a} v(x, a) = -\frac{8x^2(1-x)^2}{w(a+w)^2} \leq 0,$$

то при кожному фіксованому x функція $v(x, a)$, як функція від a , спадає і

$$\lim_{a \rightarrow \infty} v(x, a) = \frac{2x(1-x)|2x-1|}{1+|2x-1|}.$$

Тому

$$v(x, a) = 2x(1-x) \left(\frac{|2x-1|}{1+|2x-1|} + \left(\frac{w}{a+w} - \frac{|2x-1|}{1+|2x-1|} \right) \right) \leq 2x(1-x) \left(\frac{|2x-1|}{1+|2x-1|} + \frac{1}{a} \right).$$

Звернемо увагу на те, що похибка наближення зменшується не тільки біля кінців проміжку $[0, 1]$ (як у випадку многочленів Бернштейна), але і в околі середини проміжка при збільшенні параметра a .

Для отримання точних оцінок порядку наближення функцій операторами $B_n(f, x, a)$ у випадку довільного модуля неперервності скористаємося результатами Сіккеми з роботи [3](стор.74-75). Після відповідних обчислень отримаємо такий результат.

Теорема 5. Нехай $\omega(\delta)$ модуль неперервності функції $f(x)$. Тоді

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq$$

$$\left(1 + \sum_{k=0}^{2n} \left[\sqrt{2n} \left| \frac{k}{2n} - x \right| \right] C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2} \right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \leq K(a) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right),$$

де

$$K(a) = 1 + \begin{cases} K1(a), \text{ якщо } a_1 \leq a \leq a_2 \\ K2(a), \text{ якщо } 0 \leq a \leq a_1 \text{ або } a \geq a_2 \end{cases},$$

$$K1(a) = b\left(\frac{5-\sqrt{6}}{6}, a\right)^3 + 6a \sqrt{b\left(\frac{5-\sqrt{6}}{6}, a\right)^5 b\left(\frac{1+\sqrt{6}}{6}, a\right) + b\left(\frac{1+\sqrt{6}}{6}, a\right)^3},$$

$$K2(a) = b\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, a\right)^3 + 6a \sqrt{b\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, a\right)^5 b\left(\frac{6-\sqrt{6}}{6}, a\right) + b\left(\frac{6-\sqrt{6}}{6}, a\right)^3},$$

$a_1=0.319483292\dots, a_2=2.147963138\dots$ корені рівняння $K1(a)=K2(a)$.

Зокрема, якщо $a=1$, то отримуємо константу Сіккеми ([3], стор.63)

$$\kappa = 1 + K1(1) = \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832} = 1.089887331\dots$$

Якщо функція диференційовна на проміжку $[0,1]$, то має місце таке твердження.

Теорема 6. Нехай $\omega_1(\delta)$ модуль неперервності функції $f'(x)$. Тоді

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq c_n(x, a) \omega_1(x),$$

де

$$c_n(x, a) = \frac{1}{2} x(1-2x) + \frac{1}{2} b(x, a) + \frac{1}{2n} (2nx - [2nx])(1-2nx + [2nx]).$$

Крім того,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} c_n(x, a) = \frac{1}{2} b\left(\frac{1}{2} + t, a\right) + \frac{1}{2} t - (2n+1)t^2,$$

де t єдиний дійсний корінь рівняння

$$1 + \frac{at}{\sqrt{1+4(a^2-1)t^2}} = 2(1+2n)t.$$

А звідси

$$\max_{0 \leq x \leq 1} c_n(x, a) \leq \frac{1}{4(a+1)} + \frac{1}{8n}, \text{ якщо } 0 \leq a \leq 2,$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} c_n(x, a) \leq \frac{a^2}{16(a^2-1)} + \frac{1}{8n}, \text{ якщо } a > 2.$$

Таблиця значень $\max_{0 \leq x \leq 1} c_n(x, a)$

$n \backslash a$	1	2	3	4	5
1	0.225000	0.201106	0.194045	0.191281	0.189949
2	0.180556	0.145188	0.130633	0.123699	0.120005
3	0.163462	0.124863	0.107267	0.097953	0.092575
4	0.154412	0.114539	0.095617	0.085076	0.078666
5	0.148810	0.108315	0.088729	0.077524	0.070505
6	0.145000	0.104158	0.084198	0.072609	0.065208
7	0.142241	0.101186	0.080997	0.069168	0.061527
8	0.140152	0.098955	0.078616	0.066631	0.058829
9	0.138514	0.097220	0.076778	0.064684	0.056770
10	0.137195	0.095832	0.075315	0.063143	0.055149

Випишемо ще одне твердження, як частинний випадок більш загального, яке було отримано в [2] (стор. 668, співвідношення (31)).

Теорема 7. Нехай функція f має неперервні похідні до $(m+2)$ -го порядку включно. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{d^m}{dx^m} B_n(f, x, a) - f^{(m)}(x) \right) = \frac{1}{2} \frac{d^m}{dx^m} (f^{(m)}(x) v(x, a)).$$

4. Узагальнені криві Без'є

Означення 2. Нехай

$$\{A\} = \{A_0(x_0, y_0, z_0), A_1(x_1, y_1, z_1), \dots, A_{2n}(x_{2n}, y_{2n}, z_{2n})\}$$

множиса контрольних точок у просторі, $\{x\}$ множина абсцис, $\{y\}$ множина ординат, $\{z\}$ множина аплікат цих точок.

Узагальненою кривою Без'є, яка породжена послідовністю $\{A\}$, називається крива з параметричними рівняннями

$$(x(t), y(t), z(t)) = (B_n(x, t, a), B_n(y, t, a), B_n(z, t, a)), 0 \leq t \leq 1.$$

Теорема 8. Нехай $A_0(t=0)$ початкова точка кривої Без'є, а $A_{2n}(t=1)$ кінцева точка. Тоді відрізки $A_0A_1, A_{2n-1}A_{2n}$ дотикаються до кривої, відповідно, в точках A_0, A_{2n} .

Дійсно, вектор

$$\left(\left. \frac{d}{dt} B_n(x, t, a) \right|_{t=0}, \left. \frac{d}{dt} B_n(y, t, a) \right|_{t=0}, \left. \frac{d}{dt} B_n(z, t, a) \right|_{t=0} \right) \\ = (2n(x_1 - x_0), 2n(y_1 - y_0), 2n(z_1 - z_0))$$

колінеарний до вектора $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, а вектор

$$\left(\left. \frac{d}{dt} B_n(x, t, a) \right|_{t=1}, \left. \frac{d}{dt} B_n(y, t, a) \right|_{t=1}, \left. \frac{d}{dt} B_n(z, t, a) \right|_{t=1} \right) \\ = (2n(x_{2n} - x_{2n-1}), 2n(y_{2n} - y_{2n-1}), 2n(z_{2n} - z_{2n-1}))$$

колінеарний до вектора $(x_{2n} - x_{2n-1}, y_{2n} - y_{2n-1}, z_{2n} - z_{2n-1})$.

5. Багатовимірна узагальнена генератриса Без'є

Нехай $x = (x_1, \dots, x_m)$ точка в m -мірному просторі, $|x| = x_1 + \dots + x_m$, $k = (k_1, \dots, k_m)$ - m -мірний індекс, $|k| = k_1 + \dots + k_m$, $k! = k_1! \dots k_m!$, $x^k = x_1^{k_1}, \dots, x_m^{k_m}$, T_m - одиничний m -мірний симплекс.

Означення 3. Нехай $a \geq 0$, n - натуральне число, $\{y\} = \{y_k\}, 0 \leq |k| \leq 2n$, довільна t - кратна послідовність, $x \in T_m$. Функція

$$B_n(y, x, a) := \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k C(n, |k|, a) \frac{|k|!}{k!} b(|x|, a)^{|k|/2} b(1 - |x|, a)^{n - |k|/2}$$

називається узагальненою t -мірною генератрисою Без'є послідовності $\{y\}$.

Теорема 9. Нехай $V(x, a) = \{v_{ij}\}$ матриця з елементами

$$v_{ij} = \delta_{ij} x_i - x_i x_j \frac{|x| - v(|x|, a)}{|x|^2}, i, j = 1, \dots, m.$$

Тоді

$$V(x, a) \cdot \begin{pmatrix} \partial B_n(y, x, a) / \partial x_1 \\ \dots \\ \partial B_n(y, x, a) / \partial x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_n((k_1 - 2nx_1)y, x, a) \\ \dots \\ B_n((k_m - 2nx_m)y, x, a) \end{pmatrix}.$$

Доведення. Введемо позначення:

$$p_k(x) := C(n, |k|, a) \frac{|k|!}{k!} \left(\frac{x}{|x|} \right)^k b(|x|, a)^{|k|/2} b(1 - |x|, a)^{n - |k|/2}.$$

Тоді

$$B_n(y, x, a) = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k p_k(x), \quad \partial B_n(y, x, a) / \partial x_j = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k \partial p_k(x) / \partial x_j = \\ = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k \left(\frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \right) p_k(x), j = 1, 2, \dots, m.$$

Знайдемо добуток i -го рядка матриці V на стовпець $dB_n(y, x, a) / dx, i = 1, 2, \dots, m$.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} x_i y_k \left(\frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \right) p_k(x) - \\ & \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k p_k(x) \sum_{j=1}^m x_i x_j \left(\frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \right) \frac{|x| - v(|x|, a)}{|x|^2} \\ & = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} x_i y_k p_k(x) \left(\frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \left(1 - \frac{|x| - v(|x|, a)}{|x|^2} \right) \right) \\ & = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} x_i y_k p_k(x) \left(\frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \right) = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k p_k(x) (k_i - 2nx_i) \\ & = B_n((k_i - 2nx_i)y, x, a), \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

Нехай на симплексі T_m задана неперервна функція $y=f(x)$. Тоді, як і в одновимірному випадку, оператори $B_n(y, x, a), \{y\} = \{f(k_1/(2n)), \dots, f(k_m/(2n))\}, 0 \leq k_1 + \dots + k_m \leq 2n$, можуть служити для апроксимації функції f на симплексі T_m . Якщо $a=1$, то $B_n(y, x, 1) = B_{2n}(y, x)$ симплеціальні поліноми Бернштейна. Через те, що оператори $B_n(y, x, a)$ задовольняють співвідношення

$$V(x, a) \cdot \frac{d}{dx} B_n(y, x, a) = 2n B_n((\cdot - x)f(\cdot), x, a),$$

то вони - оператори типу **B**. Їхні властивості вивчені в [4].

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Шенен П., Коснар М., Гардан И. и др., *Математика и САПР: кн.1* – М.:Мир, 1988.-204.
2. Волков Ю.И., О некоторых линейных положительных операторах. – *Матем. заметки*, 1978, т.23, №5, с.659-669.
3. Sikkema P.C. and van der Meer P.J.C., The exact degree of local approximation involving the modulus of continuity. – *Proc.Kon.ned.akad.wetensch*, 1979, A82, №1, p.63-76.
4. Волков Ю.И., Многомерные аппроксимационные операторы, порожденные мерами Лебега-Стилтьеса. – *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, 1983, т.47, №3, с.435-454.

УДК 532.59

ЕВОЛЮЦІЯ І АСИМЕТРІЯ НЕСТІЙКИХ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ В ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ

Ю.В.Гуртовий.

Стаття присвячена проблемі поширення слабконелінійних хвильових пакетів на межі розділу двох рідких шарів з різною густиною. Виявлено і чисельно досліджено умову модуляційної стійкості слабконелінійного хвильового пакету. Встановлено, що у разі модуляційної нестійкості слабконелінійний хвильовий пакет еволюціонує в послідовність солітонів обвідної, розміри і число яких залежать від початкових умов. Врахування другого наближення для відхилення межі розділу двох рідких шарів приводить до виникнення асиметрії хвильового пакету.

The thesis is devoted to the problem of propagation of weakly nonlinear wave packets at the interface of two layers with different density. The solution and nonlinear evolutionary Schrödinger equation are obtained using the method of multiple scales. Condition of modulation instability is found and numerically investigated. Geometrical and physical parameters of two fluid systems in which unstable solution leads to creation of envelope solitons are investigated. Areas where the second-harmonic resonance of internal wave packets appears that leads to the asymmetry of wave packets are found.

Вступ. Розглядається поширення періодичних хвильових пакетів в гідродинамічній системі «шар-шар». Верхня і нижня рідини є ідеальними, нестисливими. Хвильові рухи є потенціальними, і характеризуються малою, але скінченою амплітудою (рис. 1).

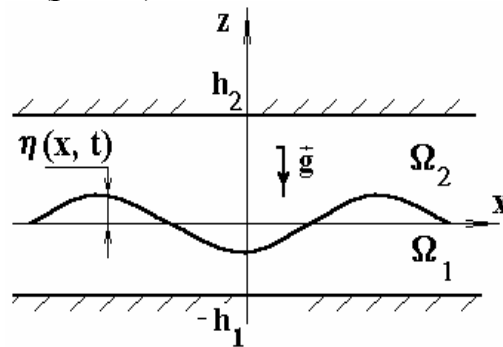


Рис. 1 Постановка задачі

Незважаючи на інтенсивність вивчення, дана проблема вирішена далеко не повністю. У багатьох роботах виведені і досліджені еволюційні рівняння типу рівняння Кортевега-де Вріза, зокрема в [1-2], проте діапазон частот, в якому вони придатні, недостатньо широкий, оскільки довжини можуть бути не тільки великими, але і малими або порівнянними з параметрами рідини. У роботі [3] розглядається поширення і стійкість хвильових пакетів в системі „шар-напівпростір”. В цій статті досліджується проблема стійкості в системі „шар-шар” і аналізується еволюція і форма обвідної хвильового пакета залежно від відношень товщин та густин двох рідких середовищ.

Постановка задачі. Математична модель задачі про поширення хвильових пакетів уздовж поверхні контакту двох рідких шарів $\Omega_1 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, -h_1 < z < 0\}$ і $\Omega_2 = \{(x, y, z), |x| < \infty, |y| < \infty, 0 < z < h_2\}$ у безрозмірному вигляді визначається системою рівнянь:

$$\nabla^2 \varphi_j \equiv \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в } \Omega_j (j=1,2) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{при } z = \alpha \eta(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1-\rho)\eta + \frac{1}{2}\alpha[(\bar{\nabla} \varphi_1)^2 - (\bar{\nabla} \varphi_2)^2] - T \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } z = \alpha \eta(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_2,$$

де $\alpha = a/L$ - коефіцієнт нелінійності, φ_i ($i = 1, 2$) - потенціали швидкостей в рідких середовищах, η - відхилення поверхні контакту, $\rho = \rho_2 / \rho_1$ - відношення густин.

Аналіз модуляційної стійкості. На основі розв'язку, отриманого методом багатомасштабних розвинень [4] до третього порядку, отримано нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ) для обвідної хвильового пакету в системі „шар-шар”

$$A_t + \omega' A_x - 0.5\omega'' A_{xx} = -ik\omega^{-1}\alpha^2 (\text{cth} kh_1 + \rho \text{cth} kh_2)^{-1} I A^2 \bar{A}, \quad (1)$$

де

$$I = \Lambda \omega^2 [3 \text{cth}^2 kh_1 - 1 - \rho(3 \text{cth}^2 kh_2 - 1)] + 2k\omega^2 [2 \text{cth} kh_1 - \text{cth}^3 kh_1 + \rho(2 \text{cth} kh_2 - \text{cth}^3 kh_2)] - 1.5Tk^4 - \omega^4 (1-\rho)^{-1} [1 - \text{cth}^2 kh_1 - \rho(1 - \text{cth}^2 kh_2)]^2.$$

Після переходу до системи, яка рухається з груповою швидкістю, а також після нормування НРШ можна подати в канонічному вигляді

$$q_\tau = iq_{xx} + 2isq^2 \bar{q},$$

де $s = \text{sign}(I_0 \omega'')$, $I_0 = -k(\text{cth} kh_1 + \text{cth} kh_2)I$.

В якості одного із розв'язків НРШ (1) містить незалежний від x розв'язок $A = a \exp(i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} I_0 t)$, але це розв'язок нестійкий, коли $I_0 \omega'' > 0$. Модуляційна нестійкість (нестійкість Бенджаміна - Фейра) [5] широко поширена у фізиці (нелінійна оптика, хвилі в плазмі). При даній нестійкості рівняння Шредінгера має розв'язок у вигляді солітонов обвідної або групових солітонов [6]. При хвилюванні нелінійність і дисперсія протидіють один одному і обвідної пакету хвиль модулюється до утворення солітонов, після чого відбувається баланс нелінійності і дисперсії. Обвідна такого солітона описується гіперболічним секансом

$$A(x, t) = 2i\delta \frac{\sqrt{\omega\omega''} \exp(-2i\vartheta(x - \omega't) - 4i(\vartheta^2 - \delta^2)t - i\varphi_0)}{\alpha^2 I_0 \operatorname{ch} 2\delta(x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0)} \quad (2)$$

Знайдені криві, які визначають межі областей модуляційної стійкості і нестійкості, які визначаються співвідношеннями $I_0\omega'' = 0$, $I_0\omega'' \rightarrow \infty$.

На рис.2 побудовані криві, що визначаються рівняннями

$I_0\omega'' = 0$ (криві з індексами "2"- "4") та

$I_0\omega'' \rightarrow \infty$ (криві з індексами "1", "5", "6").

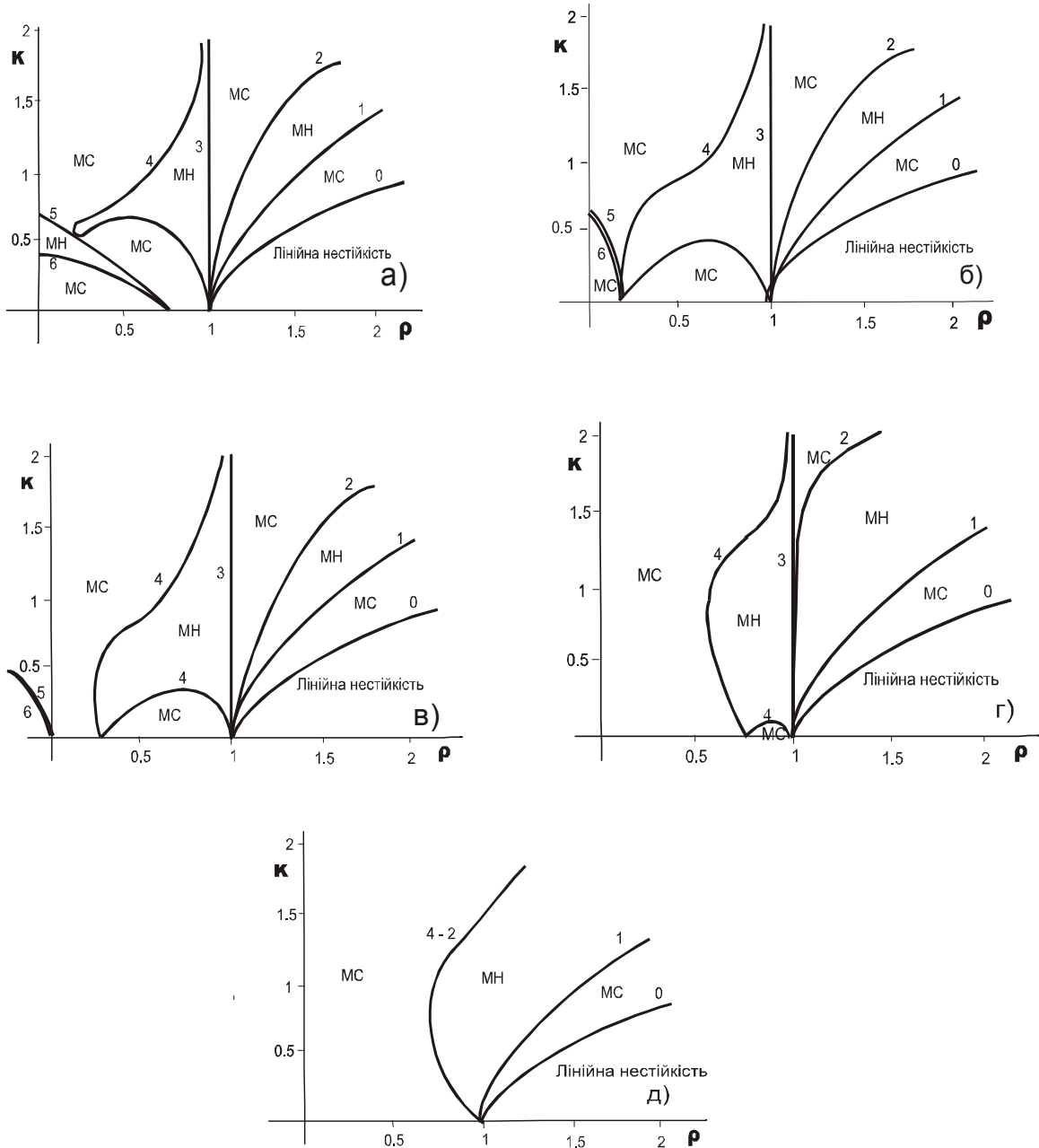


Рис. 2. Діаграми стійкості при $h_2 = 1$ і при товщині нижнього шару

а) $h_1 = 10$, б) $h_1 = 2.23$, в) $h_1 = 1.73$, г) $h_1 = 1.1$, д) $h_1 = 1$

Графіки цих кривих були побудовані в системі координат (ρ, k) на основі чисельного розв'язку приведених вище рівностей. Дані криві визначають межі областей нелінійної модуляційної стійкості та нестійкості при різних значеннях параметру $h_1 \in \{10; 2.23; 1.73; 1.1; 1\}$ та фіксованому значенні $h_2 = 1$. Область лінійної нестійкості відділена кривою з індексом „0”. Области модуляційної стійкості (МС) і модуляційної нестійкості (МН) чергуються.

При $h_1 = 10$ виявлено шість кривих, що розділяють область нелінійної стійкості та нестійкості. В даному випадку при $\rho < 1$ маємо дві області стійкості як для гравітаційних так і для капілярних хвиль (рис.2а).

При зменшенні h_1 до значення 2.23 криві „5” і „6” майже співпадають, а гострий кінець кривої „4” знижується на вісь ρ (рис.2б). При $h_1 = 1.73$ число кривих, що потрапляють у перший квадрант площини (ρ, k) , зменшується (криві „5” і „6” зміщуються вліво), а гострий кінець кривої „4” поступово рухається вправо по вісі ρ (рис.2в). Це, в свою чергу, приводить до збільшення області модуляційної стійкості, що обмежена координатними вісями.

Процес звуження областей нестійкості добре видно при (рис. 2г). В граничному випадку, коли товщини шарів рівні, тобто при $h_1 = 1$, нижня дуга кривої «4» вироджується в точку $(1,0)$. Вертикальна пряма $\rho = 1$ в граничному випадку відсутня, оскільки на неї накладається нижня частина кривої «2» і верхня частина кривої «4», при цьому ті частини цих кривих, що залишились, утворюють нову межу розділу областей модуляційної стійкості і модуляційної нестійкості (рис. 2д). Слід відмітити значне спрощення дисперсійної діаграми при однаковій товщині шарів. Крім того, розгляд фізично важливої вузької ділянки біля прямої $\rho = 1$ вказує на те, що модуляційна нестійкість майже повністю покриває її. Таким чином, хвильові пакети внутрішніх хвиль є нестійкими для широкого спектру хвильових чисел в умовах, коли відношення густин двох шарів є близьким до одиниці.

Еволюція форми обвідної. У разі модуляційної нестійкості дослідження еволюції форми слабо нелінійного хвильового пакету внутрішніх хвиль в дисперсійному середовищі приводить до утворення солітонів обвідної, розміри і число яких залежать від початкових параметрів хвильового пакету. Солітони обвідної є кінцевим утворенням еволюції скінченного хвильового пакету і є стійкими щодо взаємодій з іншими хвильовими пакетами.

Якщо ж на початку маємо неперервний хвильовий пакет, то процес утворення солітонів не є остаточним, і форма хвильового пакету періодично еволюціонує до початкової форми (повернення ФПУ).

Параметри солітона $\delta, \vartheta, x_0, \varphi_0$ визначаються початковими умовами $A(x, 0)$. Швидкість поширення солітона обвідної не залежить від амплітуди.

Якщо підставити (2) у вираз для двох складових розв'язків відхилення поверхні контакту рідких середовищ, то розклад $\eta(x,t)$ в другому наближенні має вигляд

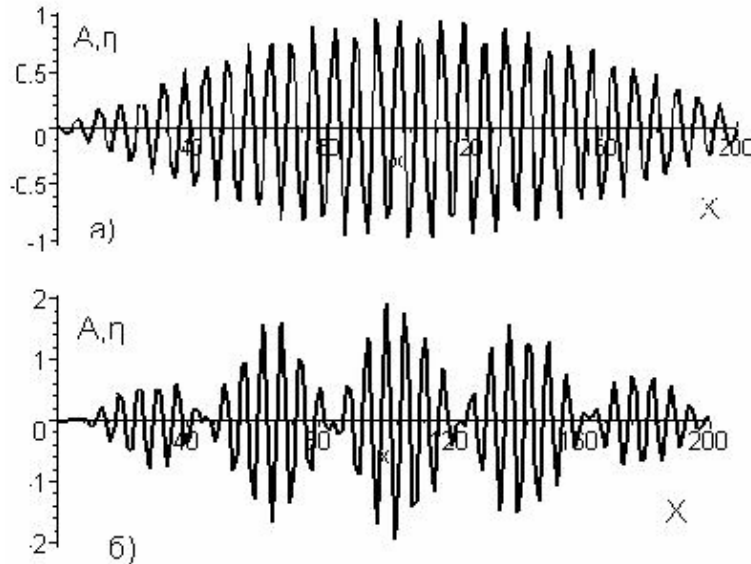


Рис. 3 Еволюція нестійкого хвильового пакету
а) початковий стан, б) кінцевий стан

$$\eta(x,t) = \delta \sqrt{\frac{\omega \omega''}{\alpha^2 I_0}} \frac{\cos(\tilde{k}x - \tilde{\omega}t - i\varphi_0)}{\operatorname{ch} 2\delta(x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0)} + \frac{\delta^2 \omega \omega''}{\alpha I_0 \operatorname{ch}^2 2\delta(x - (\omega' - 4\vartheta)t - x_0)} \times$$

$$\times \left[\frac{\omega^2 (1 - \operatorname{cth}^2 kh_1 - \rho(1 - \operatorname{cth}^2 kh_2))}{1 - \rho} + 0.5\Lambda \cos 2(\tilde{k}x - \tilde{\omega}t) \right] + O(\alpha^3), \quad (3)$$

де $\tilde{k} = k - 2\vartheta$, $\tilde{\omega} = \omega - 2\vartheta\omega' + 4(\vartheta^2 - \delta^2)$.

З виразу (3) видно, що для визначення форми поверхні контакту $\eta(x,t)$ важливий знак величини, який змінюється за умови переходу через криву, уздовж якої $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) = 0$, або під час переходу через криву $L_2 = 0$, уздовж якої $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) \rightarrow \infty$. Рівняння цих кривих в неявній формі мають вигляд

$$L_1 = 0: [1.5 \operatorname{cth}^2(kh_1) - 0.5 - \rho(1.5 \operatorname{cth}^2(kh_2) - 0.5)]\omega^2 = 0$$

$$L_2 = 0: 2\omega^2(\operatorname{cth}(2kh_1) + \rho \operatorname{cth}(2kh_2)) - k(1 - \rho + 4Tk^2) = 0$$

Досліджуючи формулу (3) приходимо до висновку, що у разі модуляційної нестійкості існують такі параметри двошарової гідродинамічної системи, що вплив амплітуди другої гармоніки приводить до загострення або затуплення форм солітонів обвідної.

На рис.3 зображено два варіанти форми солітонів обвідної з урахуванням другої гармоніки для значень товщини і відношення щільності двох рідких шарів, при яких відношення амплітуд першої і другої гармоніки дорівнює 5. Коли $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) > 0$, то верхня обвідна загострюється, а нижня навпаки

затуплюється (рис. 3а). На рис.3б показаний аналогічний ефект впливу другої гармоніки на форму солітонів обвідної за умови $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) < 0$. В цьому випадку вже верхня обвідна затуплюється, а нижня стає загостреною.

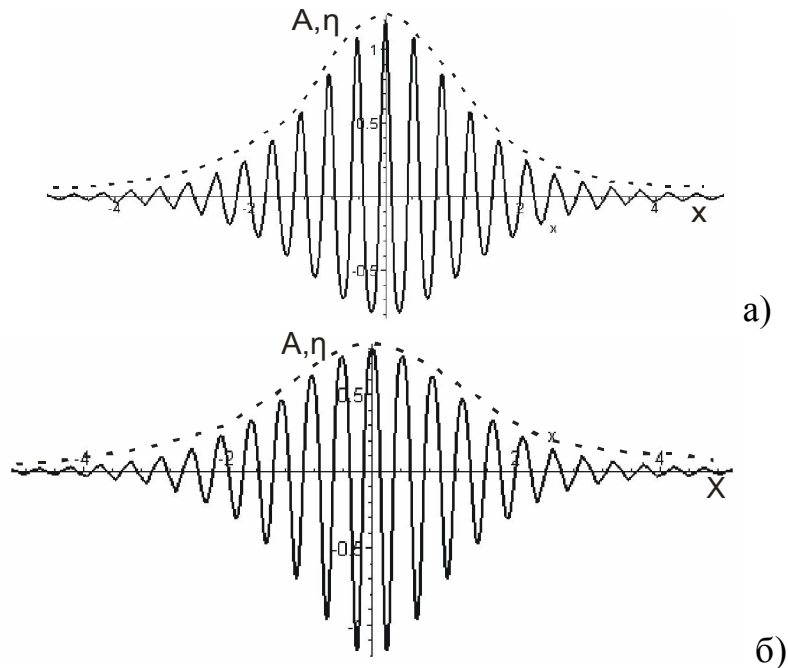


Рис.3. Форма солітона обвідної при а) $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) > 0$, б) $\Lambda(\rho, k, h_1, h_2) < 0$.

Висновок. Таким чином, знайдені області, де еволюція скінченного слабконелінійного хвильового пакету приводить до утворення послідовності солітонів обвідної. Врахування другого наближення для відхилення межі розділу двох рідких шарів у разі модуляційної нестійкості виявляє наявність ефекту асиметрії форми обвідної хвильового пакету.

БІБЛОГРАФІЯ

1. Kakutani T., Jamasaki N. Solitary waves in two-layer fluid // J. Physical Soc. Japan.-1978.- Vol. 45, № 2, P. 674-679.
2. Segur H., Hammack J.L. Solitary model of long internal waves // J. Fluids Mechanics.-1982.- Vol. 118.- P. 285-304.
3. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикладна гідромеханіка.- 2001.- Т.3, №.4.- С.38-46
4. Найфэ А. Методы возмущений.- М.: Мир, 1976.- 446 с.
5. Фейр Дж. Некоторые результаты опытов с волновыми импульсами// В сб. Нелинейная теория распространения волн.- М.: Мир, 1970.- С.77-105.
6. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ.- 1971.-61.- С.118-134.

УДК 518.3 / 681.142.2

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ КОШИ ПО А-МЕТОДУ

П. Н. Денисенко

Аннотация

В работе построено та досліджено алгоритм розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь порядку k виду $D[y] = f(y, y', \dots, y^{(k-1)})$, де $D[y]$ лінійний диференціальний оператор з многочленними коефіцієнтами, на проміжку $[a, b]$. Цей алгоритм композиція методу простої ітерації [1], інтерполювання $U_n[f(y, y', \dots, y^{(k-1)})]$ по вузлам Чебишева [1] та диференціального алгоритму [2] а-методу Дзядика [3]. Результати дослідження доводять: цей алгоритм і реалізуюча його APLAN-процедура обчислюють многочлен y_n — апроксимацію розв'язку задачі Коші для диференціальних рівнянь досить широкого класу і цей многочлен оптимальний для символьних перетворень в системах комп'ютерної алгебри.

We constructed the algorithm of solving the initial-value problem within the interval $[a, b]$ for the differential equations of order k and of form $D[y] = f(y, y', \dots, y^{(k-1)})$, where $D[y]$ linear differential operator with polynomial coefficients. This algorithm is a composition of the simple iterations method, the Chebyshev nodes interpolation method $U_n[f(y, y', \dots, y^{(k-1)})]$ and the Dzyadyk a-method differential algorithm. The research results prove that this algorithm and the respective procedure in the APLAN programming language compute the polynomial y_n the initial-value problem solution approximation for the wide enough class of differential equations. Also, this polynomial is optimal for symbolic transformations in the computer algebra systems.

Введение

Задача. Построить алгоритм решения на отрезке $[a, b]$ задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$D[y] = f(y, y', \dots, y^{(k-1)}), \quad D[y] = A \cdot y^{(k)} + \dots + C \cdot y \quad -- \quad (1)$$

линейный дифференциальный оператор с многочленными коэффициентами,

$$init_cond(y, d) = \{ y(d) = Y_0, \dots, y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1} \}, \quad d \in [a, b], \quad (2)$$

в системах компьютерной алгебры (СКА). Решение задачи Коши по этому алгоритму оптимально для символьных преобразований в СКА.

Возможности СКА. СКА вычисляют аналитическое решение обыкновенных дифференциальных уравнений в следующем виде:

- композицию специальных математических функций (существует не часто),
- частную сумму ряда Тейлора решения задачи Коши порядка n . Обычно $n < 10$. Этот многочлен, как правило, не удовлетворяет основной критерий эффективности математических моделей — **точность**.

Актуальность задачи. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений являются классическим аппаратом математического моделирования [1]. Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab и другие компьютерные

системы стали средой математического моделирования. Они символично преобразуют функции и уравнения. Дифференциальные уравнения (1) применяются в математических моделях более часто, чем уравнения других типов.

1 Алгоритм 1

Вход: Задача Коши *task* вида (1), (2), отрезок аппроксимации $[a, b]$ и порядок n искомого многочлена.

Выход: Многочлен

$$y_n = c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_n \cdot x^n = \text{algorithm}(\text{task}, [a, b], n). \quad (3)$$

Этот многочлен аппроксимирует единственное точное решение y задачи Коши (1), (2) оптимально по точности — в пространстве $C_{[a,b]}$ ограничен коэффициент оптимальности алгоритма

$$C_n(\text{algorithm}, \text{task}, C_{[a,b]}) = \|y - y_n\|_{C_{[a,b]}} / \inf_{c_0, \dots, c_n} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[a,b]}}.$$

Преобразования:

1. Вычислить начальное приближение к решению задачи Коши (1), (2)

$$y_n(0, x) = Y_0 + Y_1 \cdot (x - d) + \dots + Y_{k-1}/(k-1)! \cdot (x - d)^k. \quad (4)$$

2. Для $s = 1, 2, \dots$:

2.1. Вычислить линейное дифференциальное уравнение с многочленными коэффициентами (ЛДУМК)

$$D[y] = F_s, \quad F_s = U_n[f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})|_{y=y_n(s-1, x)}], \quad (5)$$

где $U_n[f]$ — оператор алгебраического интерполирования по узлам Чебышева $\{\cos(i \cdot \pi/n), i = 0, \dots, n\}$ линейно перенесенным на отрезок $[a, b]$.

2.2. Решить систему из условий (2) и ЛДУМК (5) по дифференциальному алгоритму [2] а-метода [3] на отрезке $[a, b]$ и вычислить многочлен $y_n(s, x)$.

3. Вычислить искомую аппроксимацию решения задачи Коши (1), (2)

$$y_n = \lim_{s \rightarrow \infty} y_n(s, x).$$

По дифференциальному алгоритму а-метода решают систему уравнений

$$(A(d) \cdot (y_n \in P_n) + (E_{m,n}(z(x)) \in H_{m \setminus n}))(i)|_{x=d} = A(d) * Y_i, \quad i = 0, \dots, k-1,$$

$$D[y_n \in P_n] + (E_{m,n}(z(x)) \in H_{m \setminus n})^{(k)} = F_s, \quad (6)$$

где $y_n \in P_n$ — многочлен общего вида множества P_n ,

$E_{m,n}(z(x)) \in H_{m \setminus n}$ — многочлен общего вида пространства $H_{m \setminus n}$.

Многочлен $y_n \in P_n$ имеет вид (3) и символные коэффициенты c_1, \dots, c_n .
 Дополнительный многочлен имеет вид

$$(E_{m,n}(z(x)) \in H_{m \setminus n}) = \tau_1 \cdot cheb(n + 1, z(x)) + \dots + \tau_{m-n} \cdot cheb(m, z(x)) ,$$

символьные коэффициенты $\tau_1, \dots, \tau_{m-n}$, порядок

$$m = \deg(D[y_n \in P_n] - F_s) + k$$

и ортогональный базис пространства Гильберта $L_2(a, b; \rho)$ — многочлены Чебышева первого рода линейно перенесенные на отрезок $[a, b]$

$$cheb(i, x) = \cos(i \cdot \arccos(x)) , \quad z(x) = 2 \cdot (x - a) / (b - a) - 1 : [a, b] \rightarrow [-1, 1] .$$

Замечание 1. Итерационным методом Ньютона или методом более высокого порядка и интерполяцией можно преобразовать дифференциальное уравнение (1) в последовательность ЛДУМК

$$D[y] = E_s \cdot y + \dots + K_s \cdot y^{(k-1)} + L_s , \quad s = 1, 2, \dots ,$$

где коэффициенты E_s, \dots, K_s, L_s итерационный метод определяет по функции f (1) и решению полученному на предыдущей итерации $y_n(s - 1, x)$. Решить задачу Коши (2) для этих ЛДУМК по дифференциальному алгоритму а-метода, как правило, значительно сложнее, чем задачу (5), (2).

2 Алгоритм 1 и метод ряда Тейлора

Модельная задача Коши — уравнение физического маятника

$$y'' = -\sin(y), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 . \tag{7}$$

Эта задача имеет единственное решение

$$y(x) = solve(task (7)) \approx sin(x) . \tag{8}$$

Функция y (8) — аналитическая в окрестности отрезка $[-1, 1]$ комплексной плоскости. Отличные от нуля коэффициенты Фурье - Чебышева функции y (8) на отрезке $[-1, 1]$ только нечетные

$$\{a_{2 \cdot i + 1}(y, [-1, 1])\}_{i=2}^6 = \{0.001, -0.00005, 2 \cdot 10^{-6}, -8 \cdot 10^{-8}, 3 \cdot 10^{-9}\} \tag{9}$$

и, с ростом параметра $n = 2 \cdot i + 1$, регулярно убывают к нулю

$$|a_{2 \cdot i + 1}(y, [-1, 1])| = o(q^i), \quad q < 0.04 .$$

Поэтому для величины наилучшего приближения функции y (8) алгебраическими многочленами порядка n в пространстве $C_{[-1,1]}$ справедливо тождество

$$\inf_{c_0, \dots, c_n} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[-1,1]}} = (1 + o(1)) \cdot |a_{2 \cdot [(n-1)/2] + 3}(y, [-1, 1])| . \tag{10}$$

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1. Решение задачи Коши (7) по алгоритму 1 на отрезке $[-1, 1]$ является нечетным многочленом и справедливо тождество

$$y_n = algorithm_1(task(7), [-1, 1], n) = y_{2 \cdot [(n-1)/2] + 1}.$$

Норма погрешности аппроксимации этим многочленом точного решения $y(8)$ задачи Коши (7) в пространстве $C_{[-1,1]}$ удовлетворяет тождества

$$\{ \|y - y_{2 \cdot i + 1}\| \}_{i=1}^5 = \{0.0012, 5.6 \cdot 10^{-5}, 2.7 \cdot 10^{-6}, 8.5 \cdot 10^{-8}, 3.5 \cdot 10^{-9}\}. \quad (11)$$

С ростом параметра n алгоритма эта норма погрешности монотонно убывает к нулю. Скорость убывания этой нормы погрешности тождественна скорости убывания нечетных коэффициентов Фурье - Чебышева (9) функции $y(8)$ на отрезке $[-1, 1]$ и имеют место тождества

$$\begin{aligned} \|y - y_n\|_{C_{[-1,1]}} / |a_{2 \cdot [(n-1)/2] + 3}(y, [-1, 1])| &= 1 + \alpha_n = 1 + \alpha_{2 \cdot [(n-1)/2] + 1}, \\ \{\alpha_{2 \cdot i + 1}\}_{i=1}^5 &= \{0.21, 0.14, 0.11, 0.09, 0.07, 0.04\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из них и тождества (10) можно сделать следующее заключение.

Вывод 1. Коэффициент оптимальности решения по алгоритму 1 задачи Коши (7) в пространстве $C_{[-1,1]}$ убывает к единице (с ростом параметра)

$$C_n(algorithm_1, task(7), C_{[-1,1]}) = (1 + o(1)) \cdot (1 + \alpha_{2 \cdot [(n-1)/2] + 1}). \quad (13)$$

Коэффициент оптимальности метода ряда Тейлора. Отличные от нуля коэффициенты Тейлора функции $y(8)$ в точке ноль только нечетные

$$\begin{aligned} \{t_{2 \cdot i + 1}(y), i = 0, \dots, 7\} &= \{1, -0.1(6), 0.01(6), -0.0026, \\ &0.00044, -7.7 \cdot 10^{-5}, 1.4 \cdot 10^{-5}, -2.6 \cdot 10^{-6}, 4.6 \cdot 10^{-7}\}. \end{aligned} \quad (14)$$

С ростом параметра $n = 2 \cdot i + 1$ эти коэффициенты Тейлора регулярно убывают к нулю и удовлетворяют тождества

$$|t_{2 \cdot i + 1}(y)| = o(q^i), \quad q < 0.2, \quad t_{2 \cdot i + 1}(y) = (1 + o(1)) \cdot 2^{2 \cdot i} \cdot a_{2 \cdot i + 1}(y, [-1, 1]).$$

Знаки этих коэффициентов Тейлора чередуются. Поэтому норма погрешности аппроксимации функции $y(8)$ частной суммой ее ряда Тейлора — $T_n[y]$ — в пространстве $C_{[-1,1]}$ удовлетворяет тождества

$$\|y - T_n[y]\|_{C_{[-1,1]}} = A_n \cdot |t_{2 \cdot [(n-1)/2] + 3}(y)|, \quad A_n = A_{2 \cdot [(n-1)/2] + 1} < 1, \quad (15)$$

$$\{\|y - T_{2 \cdot i + 1}[y]\|\}_{i=1}^5 = \{0.012, 0.0016, 0.00026, 4.1 \cdot 10^{-5}, 6.5 \cdot 10^{-6}\} \quad (16)$$

и, с ростом параметра i , монотонно убывает к нулю. Скорость убывания этой нормы погрешности тождественна скорости убывания нечетных коэффициентов Тейлора (14) функции y (8) и имеет место тождество (15) и тождество

$$\|y - T_n[y]\|_{C_{[-1,1]}} / |a_{2 \cdot [(n-1)/2] + 3}(y, [-1, 1])| = (1 + \gamma_{2 \cdot [(n-1)/2] + 1}) \cdot 2^{2 \cdot [(n-1)/2] + 1}, \quad (17)$$

$$\{\gamma_{2 \cdot i + 1}\}_{i=1}^5 = \{0.5, 0.04, 0.03, 0.02, 0.01\}.$$

Из них и тождества (10) можно сделать следующее заключение.

Вывод 2. Коэффициент оптимальности метода ряда Тейлора на функции (8) в пространстве $C_{[-1,1]}$ в $O(2^n) \approx 2^n$ больше коэффициента оптимальности (13) решения по алгоритму 1 задачи Коши (7) и равен $O(2^n)$

$$C_n(\text{Taylor, task (8)}, C_{[-1,1]}) = (1 + o(1)) \cdot (1 + \gamma_{2 \cdot [(n-1)/2] + 1}) \cdot 2^{2 \cdot [(n-1)/2] + 1}. \quad (18)$$

3 Алгоритм 1 и метод Галеркина с возмущением

Метод 1.

1. Преобразовать задачу (1), (2) в интегродифференциальное уравнение

$$V^k[D[y]] = V^k[f(y, y', \dots, y^{(k-1)})], \quad (19)$$

где $V[D[y]] = \int D[y] dx - \text{subs}(\text{init_cond}(y, d), \int D[y] dx|_{x=d})$ — композиция операторов интегрирования и подстановки начальных значений (2).

2. Вычислить аппроксимацию уравнения (19) по методу Галеркина

$$S_n[V^k[D[y_n]]] = S_n[V^k[U_n[f(y_n, y'_n, \dots, y_n^{(k-1)})]]] \quad (y_n \in P_n) \quad (20)$$

с возмущением, где оператор $S_n[y]$ вычисляет частную сумму порядка n ряда Фурье - Чебышева функции y на отрезке $[a, b]$,

$U_n[f]$ — оператор алгебраического интерполирования по узлам Чебышева $\{\cos(i \cdot \pi/n), i = 0, \dots, n\}$ линейно перенесенным на отрезок $[a, b]$.

3. Решить уравнение (20) по методу простой итерации:

3.1. Вычислить начальное приближение — многочлен $y_n(0, x)$ (4).

3.2. Для $s = 1, 2, \dots$ вычислить многочлены

$$G_s = U_n[f(y, y', \dots, y^{(k-1)})|_{y=y_n(s-1, x)}], \quad g_s = V^k[G_s], \quad (21)$$

уравнение

$$V^k[D[y]] = g_s, \quad V^k[D[y]] = L[y] + g, \quad (22)$$

и решение $y_n(s, x)$ аппроксимации уравнения (22) по методу Галеркина

$$S_n[V^k[D[y_n]] - g_s] = 0 \quad (y_n \in P_n), \quad (23)$$

где оператор $S_n[y]$ вычисляет частную сумму порядка n ряда Фурье - Чебышева функции y на отрезке $[a, b]$.

4. Вычислить искомую аппроксимацию решения уравнения (19)

$$y_n = \lim_{s \rightarrow \infty} y_n(s, x) . \quad (24)$$

Теорема 1. Пусть:

– система из условий (2) и ЛДУМК

$$D[y] = G, \quad G \in P_n ,$$

где $D[y]$ – линейный оператор уравнения (1), эквивалентна линейному интегральному уравнению с многочленными коэффициентами (ЛИУМК)

$$V^k[D[y]] = V^k[G] , \quad V^k[D[y]] = L[y] + g , \quad (25)$$

– существует и единственно решение аппроксимации уравнения (25) по методу Галеркина

$$S_n[V^k[D[y_n \in P_n]]] = S_n[V^k[G]] ,$$

где оператор $S_n[y]$ вычисляет частную сумму порядка n ряда Фурье - Чебышева функции y на отрезке $[a, b]$,

– последовательность решений уравнения (23) сходится (24),

– для оператора $D[y]$ уравнения (1) имеют место тождества

$$V^k[D[y_n \in P_n]]^{(i)}|_{x=d} = A(d) \cdot (i! \cdot c_i - Y_i), \quad i = 0, \dots, k-1 , \quad (26)$$

– параметр алгоритма 1 $n \geq k$.

Тогда существует решение y_n задачи Коши (1), (2) по алгоритму 1 и это решение тождественно многочлену (24).

Доказательство. Согласно результатов исследования а-метода Дзядыка [3], уравнение (23) (дополненное тождествами) эквивалентно аппроксимации уравнения (22) по а-методу Дзядыка

$$V^k[D[y_n]] - V^k[G_s] + E_{m,n}(z(x)) = 0 \quad (y_n \in P_n, E_{m,n}(z(x)) \in H_{m \setminus n}) , \quad (27)$$

где

$$m = \deg(V^k[D[y_n \in P_n]] - V^k[G_s]) .$$

Для произвольного многочлена G справедливы тождества

$$V[G] = \int_d^x G(t) dt , \quad V[G]|_{x=d} = 0 .$$

Поэтому правая часть уравнения (25) является многочленом и для этого многочлена справедливы тождества

$$V^k[G]^{(i)}|_{x=d} = V^{k-i}[G]|_{x=d} = 0 , \quad i = 0, \dots, k-1 .$$

Согласно этих тождеств, тождеств (26) и результатов исследования дифференциального алгоритма а-метода Дзядыка [2], если $n \geq k$, то уравнение (27) эквивалентно системе уравнений вида (6)

$$(A(d) \cdot (y_n \in P_n) + (E_{m,n}(z(x)) \in H_{m \setminus n}))(i)|_{x=d} = A(d) * Y_i, \quad i = 0, \dots, k - 1,$$

$$D[y_n \in P_n] + (E_{m,n}(z(x)) \in H_{m \setminus n})^{(k)} = G_s. \quad (28)$$

Начальные приближения $y_n(0, x)$ (4) алгоритма 1 и метода 1 тождественны. Следовательно:

- на первой итерации ($s = 1$) алгоритм 1 вычисляет:
 - многочлен F_1 (5) тождественный многочлену G_1 (21),
 - систему уравнений (6) тождественную системе уравнений (28) и, следовательно, эквивалентную уравнению (27) и уравнению (23),
 - многочлен $y_n(1, x)$ тождественный решению уравнения (23) метода 1,
- на следующих итерациях эти тождества сохраняются.

4 Сходимость алгоритма 1

Из теоремы 1, оценок [4] (с. 77 – 95) оптимальности операторов S_n и U_n

$$\|S_n\|_{L_2(a,b,\rho)} = 1, \quad \|y - S_n[y]\|_{L_2(a,b,\rho)} = E_n(y, L_2(a, b, \rho)),$$

$$\|S_n\|_{C_{[a,b]}} = (4/\pi^2) \cdot \ln(n) + O(1), \quad O(1) \leq 3, \quad n > 0,$$

$$\|U_n\|_{C_{[a,b]}} = (2/\pi) \cdot \ln(n) + O(1), \quad O(1) \leq 1, \quad n > 0$$

как аппарата аппроксимации можно сделать следующее заключение.

Вывод 3. В случае решения по алгоритму 1 задачи Коши (2) для достаточно широкого класса дифференциальных уравнений вида (1), результаты исследования метода Галеркина [5] (теоремы 19.1 – 19.3) доказывают:

- существование решения системы аппроксимирующих уравнений (6),
- сходимость последовательности решений y_k, y_{k+1}, \dots задачи Коши (1), (2) по алгоритму 1 к точному решению y этой задачи,
- ограниченность коэффициента оптимальности алгоритма 1.

5 Оценки погрешности алгоритма 1

Для пункта 2 алгоритма 1 имеют место результаты исследования дифференциального алгоритма а-метода Дзядыка [2]. На достаточно широком классе операторов $D[y]$ (1) эти результаты доказывают:

- точные и конструктивные априорные и апостериорные оценки нормы погрешности решения задачи Коши (5), (2) по дифференциальному алгоритму а-метода Дзядыка [2] в пространстве $C_{[a,b]}$,
- ограниченность коэффициента оптимальности дифференциального алгоритма а-метода Дзядыка [2] в пространстве $C_{[a,b]}$ на задаче Коши (5), (2) — этот коэффициент зависит только от оператора $D[y]$.

Если последовательность оценок погрешности решения задачи Коши (2) для ЛДУМК (5) ($s = 0, 1, \dots$) по дифференциальному алгоритму а-метода Дзядыка [2] сходится, то естественно принять ее предел за оценку погрешности алгоритма 1 на задаче (1), (2).

6 Алгоритм 2

Вход: $task = \{D[y]+G = f(y, \dots, y^{(k-1)}) (1), init_cond(y, d) (2)\}, [a, b], n, q$.

Выход: Оценка погрешности алгоритма 1.

Преобразования:

1. Для оператора L (22) по а-методу [3] вычислить многочлены

$$W_{i,q}(x) = a-method(L[u] = cheb(i, z(x)), [a, b], q), \quad i = n + 1, \dots, m,$$

и норму этих многочленов $\|W_{n+1,q}(x)\|_{C_{[a,b]}} \dots, \|W_{m,q}(x)\|_{C_{[a,b]}}$.

2. На итерации $s = 1, 2, \dots$ алгоритма 1 вычислить коэффициенты дополнительного многочлена $\tau_1(n, s), \dots, \tau_{m-n}(n, s)$ и оценку погрешности решения по алгоритму 6.2 задачи Коши для ЛДУМК (5), (2) — задачи $task_s$

$$R_{n,q}(task_s, C_{[a,b]}) =$$

$$|\tau_1(n, s)| \cdot \|W_{n+1,q}(x)\|_{C_{[a,b]}} + \dots + |\tau_{m-n}(n, s)| \cdot \|W_{m,q}(x)\|_{C_{[a,b]}}.$$

3. Вычислить искомую оценку погрешности алгоритма 1 на задаче (1), (2)

$$R_{n,q}(task((1), (2)), C_{[a,b]}) = \lim_{s \rightarrow \infty} R_{n,q}(task_s, C_{[a,b]}). \quad (29)$$

Пример 1. (Иллюстрация эффективности алгоритма 2). Задача Коши

$$y'' + y = U_n[y_n(s-1, x) - \sin(y_n(s-1, x))], \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad (30)$$

где $y_n(0, x) = x$, $y_n(s, x) = algorithm[2](task (30), [a, b], n)$, $s = 1, 2, \dots$, имеет:

— оператор уравнения (25)

$$V^2[D[y]] = L[y] - x, \quad L[y] = y(x) - K[y], \quad K[y] = - \int_0^x (x-t) \cdot y(t) dt, \quad (31)$$

— функцию

$$W_n(x) = L^{-1}[cheb(n, x)] = cheb(n, x) + K[cheb(n, x)] + K^2[cheb(n, x)] + \dots,$$

— норму этой функции в пространстве $C_{[-1,1]}$

$$W_{2 \cdot i + 3} = \|L^{-1}[cheb(2 \cdot i + 3, x)]\|_{C_{[-1,1]}} = 1 + \beta_{2 \cdot i + 3}, \quad (32)$$

$$\{ \beta_{2 \cdot i + 3} \}_{i=0}^5 = \{ 0.28, 0.17, 0.12, 0.09, 0.08, 0.04 \},$$

- один отличный от нуля коэффициент дополнительного многочлена $\tau(n, s)$,
- оценку погрешности решения по дифференциальному алгоритму а-метода Дзядыка [2] задачи (30)

$$\|y(s, x) - y_n(s, x)\|_{C_{[-1,1]}} = |\tau(n, s)| \cdot \|W_{2 \cdot [(n-1)/2] + 3}(x)\|_{C_{[-1,1]}} \cdot$$

Если $q > n$, то а-метод [3] с параметром q вычисляет многочлен

$$W_{n,q}(x) \approx W_n(x), \quad \|W_{n,q}(x) - W_n(x)\|_{C_{[-1,1]}} < 2 \cdot |\tau(n, q)|$$

и $|\tau(n, s)| \cdot \|W_{2 \cdot [(n-1)/2] + 3, q}(x)\|$ аппроксимирует оценку $\|y(s, x) - y_n(s, x)\|$ с погрешностью

$$\begin{aligned} & \left| \|y(s, x) - y_n(s, x)\|_{C_{[-1,1]}} - |\tau(n, s)| \cdot \|W_{2 \cdot [(n-1)/2] + 3, q}(x)\|_{C_{[-1,1]}} \right| \\ & < 2 \cdot |\tau(n, s)| \cdot |\tau(2 \cdot [(n-1)/2] + 3, q)|, \quad |\tau(i, q)| = o(u^{q-i}), \quad u < 0.1. \end{aligned}$$

Поведение коэффициента $\tau(i, q)$ иллюстрируют его значения при $q = 25$

$$\begin{aligned} & \{\tau(2 \cdot j + 1, 25) = \tau(2 \cdot j + 1, 26), \quad j = 0, \dots, 13\} = \\ & \{-1 \cdot 10^{-36}, 4 \cdot 10^{-35}, -3 \cdot 10^{-33}, 5 \cdot 10^{-31}, -1 \cdot 10^{-28}, 6 \cdot 10^{-26}, -4 \cdot 10^{-23}, \\ & 3 \cdot 10^{-20}, -3 \cdot 10^{-17}, 4 \cdot 10^{-14}, -7 \cdot 10^{-11}, 10^{-7}, -3 \cdot 10^{-4}, 1\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Мы решили задачу Коши (7) по алгоритму 1 для $n = 3, \dots, 11$ и вычислили последовательности значений отличного от нуля коэффициента дополнительного многочлена $\{\tau(n, 1), \tau(n, 2), \dots\}$. Если $s > 2$, то элементы этих последовательностей не изменяются. Так последовательность

$$\{\tau(5, 1), \tau(5, 2), \dots\} = \{9 \cdot 10^{-6}, -2.4987 \cdot 10^{-5}, \dots, -2.4987 \cdot 10^{-5}, \dots\}.$$

Эти последовательности имеют пределы

$$\{\tau(3), \tau(5), \dots, \tau(11)\} = \{0.007, -2.5 \cdot 10^{-5}, 1.8 \cdot 10^{-6}, -3.9 \cdot 10^{-8}, 1.6 \cdot 10^{-9}\}.$$

Поэтому полученная по алгоритму 2 оценка погрешности алгоритма 1 на задаче Коши (7) в случае $q = 25$

$$\{R_{2 \cdot i + 1, q}((7), C_{[-1,1]})\}_{i=1}^5 = \{0.001, 3 \cdot 10^{-5}, 2 \cdot 10^{-6}, 4 \cdot 10^{-8}, 2 \cdot 10^{-9}\}$$

хорошо аппроксимирует погрешности (11) алгоритма 1 на этой задаче.

7 Алгоритм 3

Вход: $task = \{D[y] (1), init_cond(y, d) (2)\}, [a, b], n, q.$

Выход: Оценка коэффициента оптимальности алгоритма 1.

Преобразование: Вычислить оценку коэффициента оптимальности решения по дифференциальному алгоритму а-метода Дзядыка [2] задачи Коши

(2) для ЛДУМК (5) (с оператором $D[y]$ (1)) и принять ее за искомую оценку коэффициента оптимальности решения по алгоритму 1 задачи Коши (1), (2)

$$C_{n,q}(task((1), (2)), C_{[a,b]}) = C_{n,q}(task((5), (2)), C_{[a,b]}) .$$

Пример 2. (Иллюстрация эффективности алгоритма 3). Задача Коши (30) имеет оператор (31) и функцию $W_n(x) = L^{-1}[cheb(n, x)]$ с нормой (32). Коэффициент Фурье - Чебышева порядка n этой функции на отрезке $[-1, 1]$ имеет значения

$$\{ a_i(W_i(x), [-1, 1]) \}_{i=0}^{13} = \{0.76, 0.88, 1.15, 1.06,$$

$$1.04, 1.02, 1.015, 1.01, 1.008, 1.006, 1.005, 1.004, 1.0035, 1.003, 1.0026\} .$$

Поэтому

$$1/a_{2 \cdot i+1}(W_{2 \cdot i+1}(x), [-1, 1]) = 1 - \delta_{2 \cdot i+1} , \tag{34}$$

$$\{\delta_{2 \cdot i+1}, i = 1, \dots, 6\} = \{0.05, 0.02, 0.01, 0.006, 0.004, 0.003\} .$$

Аппроксимация (6) задачи Коши (30) имеет один отличный от нуля коэффициент дополнительного многочлена $\tau(n, s)$ — коэффициент при многочлене Чебышева нечетного порядка. Поэтому оценка коэффициента оптимальности решения задачи Коши (30) по дифференциальному алгоритму а-метода Дзядыка [2] имеет вид

$$\|y(s, x) - y_n(s, x)\|_{C_{[-1,1]}} / |a_{2 \cdot [(n-1)/2]+3}(y(s, x), [-1, 1])| = 1 + \alpha_{2 \cdot [(n-1)/2]+3} =$$

$$\|W_{2 \cdot [(n-1)/2]+3}(x)\|_{C_{[-1,1]}} \cdot 1/a_{2 \cdot [(n-1)/2]+3}(W_{2 \cdot [(n-1)/2]+3}(x), [-1, 1]) ,$$

$$\{ \alpha_{2 \cdot i+1} \}_{i=1}^5 = \{0.21 , 0.14 , 0.11 , 0.09 , 0.07 , 0.04\} .$$

Эта оценка практически тождественна коэффициенту оптимальности (12) алгоритма 1 на задаче (7).

Если $q > n$, то а-метод вычисляет многочлен

$$W_{n,q}(x) \approx W_n(x) , \quad \|W_{n,q}(x) - W_n(x)\|_{C_{[-1,1]}} < 2 \cdot |\tau(n, q)| .$$

Коэффициент Фурье - Чебышева порядка n этого многочлена

$$a_n(W_{n,q}(x), [-1, 1]) , \quad |a_n(W_{n,q}(x), [-1, 1]) - a_n(W_n(x), [-1, 1])| < 2 \cdot |\tau(n, q)| ,$$

и аппроксимация $C_{n,q}(task(30), C_{[-1,1]})$ оценки коэффициента оптимальности (12) алгоритма 1 на задаче (7)

$$\|W_{2 \cdot [(n-1)/2]+3,q}(x)\|_{C_{[-1,1]}} \cdot 1/a_{2 \cdot [(n-1)/2]+3}(W_{2 \cdot [(n-1)/2]+3,q}(x), [-1, 1]) ,$$

$$|1 + \alpha_{2 \cdot i+1} - \|W_{2 \cdot i+3,q}(x)\|_{C_{[-1,1]}} \cdot 1/a_{2 \cdot i+3}(W_{2 \cdot i+3,q}(x), [-1, 1])| = O(|\tau(2 \cdot i + 3, q)|) ,$$

где $|\tau(2 \cdot i + 3, q)|$ удовлетворяет тождества (33).

8 Программирование алгоритма 1 в СКА

Мы запишем алгоритм 1 на языке APLAN системы алгебраического программирования APS и исследуем полученную процедуру. Результаты этого исследования оценивают эффективность реализации алгоритма 1 в СКА.

9 Программирование алгоритма 1 в APS

Структура данных на входе.

1. Линейный дифференциальный оператор с многочленными коэффициентами $D[y]$ — левая часть уравнения (1) — имеет вид

$$A * \text{dif}(y, k) + \dots + C * y,$$

где y — атом, коэффициенты A, \dots, C — многочлены переменной x . Эти многочлены являются термами и имеют вид естественный для математики. Переменная x является атомом.

2. Функция $f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$ — правая часть уравнения (1) — имеет вид обычный для СКА и аргументы $x, y, y_1 = y', y_2 = y'', \dots$.
3. Начальные условия (2) определяют:
 - начальная точка $\text{InitPoint} := d$;
 - список тождеств (2) (в этой точке) относительно атома y

$$\text{init_cond} := (y = Y_0, \dots, \text{dif}(y, k-1) = Y_{\{k-1\}});$$

4. Отрезок аппроксимации $[a, b]$ определяет список (a, b) .
5. Параметр n алгоритма является целым числом.

Структура данных на выходе. Многочлен y_n (3) имеет коэффициенты — числа и вид естественный для математики $d + \dots + f * x^n$.

APLAN - процедура.

Алгебраическая спецификация п. 2 алгоритма 1.

```

y1_n := d_x(y_n);           /* y'_n */
y2_n := d_x(y1_n);         /* y''_n */
....
fy_n := subs((y = y_n, y1 = y1_n, ...), fy); /* f(x, y_n, ...) */
F_s := Cheb_interpol(fy_n, interval, n);    /* U_n[fy_n] */
LDUMK := (Dy + (-1) * F_s = 0);
    
```

APLAN - процедура реализующая
дифференциальный алгоритм а-метода Дзядыка [2].

Структура выхода операторов APLAN-процедуры.

Процедура вычисляет начальное приближение $y_n(0, x)$ (4) — многочлен с числовыми коэффициентами вида естественного для математики.

На каждой итерации процедура вычисляет:

- производные многочлена $y_n(s-1, x)$ вида естественного для математики,
- функцию $f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})|_{y=y_n(s-1, x)}$ естественного вида,
- многочлен $U_n[f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})|_{y=y_n(s-1, x)}]$ естественного вида,
- ЛДУМК (5) вида принятого в процедуре [2]

$$A * \text{dif}(y, k) + \dots + C * y + -1 * F_s = 0, \quad ,$$

- следующее приближение $y_n(s, x)$ к решению задачи (1), (2) — многочлен с числовыми коэффициентами вида естественного для математики.

10 Исследование APLAN - процедуры

Теорема 2. Сложность выполнения одной итерации алгоритма 1 APLAN-процедурой полиномиальная по параметру n

$$(m+1) \cdot Q(\text{capplf}, m) + O(n^3), \quad m = \max\{\deg(D[y_n \in P_n]), n\} + k, \quad (35)$$

где $Q(\text{capplf}, m)$ — сложность преобразования оператором capplf многочлена P : многочлен $\text{capplf}(P)$ является суммой мономов вида

$$c(i) * x^j * b, \quad i = n+1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, m, \quad m = n + O(1).$$

Доказательство. Процедура вычисления одной итерации решения линейная. Поэтому, вычислительная сложность этой процедуры тождественна сумме вычислительной сложности операторов этой процедуры. Вычислительная сложность APLAN - процедуры реализующей дифференциальный алгоритм а-метода Дзядыка [2] полиномиальная (35). Остальные операторы процедуры имеют по параметру n полиномиальную сложность $O(n^s)$, $s \leq 3$.

11 Вычислительный эксперимент с APLAN-процедурой

Описание задачи (7) на языке APLAN.

```
process[1] := ( Dy := dif(y, 2) + y ; fy := y + -1 * sin(y) ;
               InitPoint := 0 ;
               init_cond := ( y = 0 , dif(y, 1) = 1 ) ;
               interval := (-1, 1) ; ... );
```

Результаты решения задачи (7) процедурой ($n = 3$).

```
fy_n := subs((y = y_n, y1 = y1_n, ...), fy) = x + -1 * sin(x);
F_s := Cheb_interpol(fy_n, interval, n) = 0.156507 * x^3 +
                                           0.00202223 * x ;
LDUMK := ( Dy + -1 * F_s = 0 ) = ( dif(y, 2) + y +
                                   -0.156507 * x^3 + -0.00202223 * x = 0 );
... y_n := ser(n, Coef) = -0.146596 * x^3 + 0.995264 * x ;
```

```

F_s := Cheb_interpol(fy_n , interval , n) = 0.0826425 * x ^ 3
                                             + 0.0156247 * x ;
LDUMK := ( Dy + -1 * F_s = 0 ) = ( dif (y , 2) + y +
                                   -0.0826425 * x ^ 3 + -0.0156247 * x = 0 );
... y_n := ser(n,Coef) = -0.148983 * x ^ 3 + 0.996381 * x ;
...
... y_n := ser(n,Coef) = -0.148988 * x ^ 3 + 0.996391 * x ;
    
```

Вывод 4. *Результаты вычислительного эксперимента хорошо иллюстрируют эффективность теоремы 2.*

12 Алгоритм 1 и методы Рунге - Кутта

Модельная задача Коши для методов Рунге - Кутта [6] , с (106)

$$y' = x \cdot (x + 2) \cdot y^3 + (x + 3) \cdot y^2 , \quad y(0) = -8/5 . \quad (35)$$

Эта задача имеет единственное решение

$$y(x) = solve(task (35)) = -2/(x \cdot (x + 2)) . \quad (36)$$

Функция y (36) — аналитическая в комплексной плоскости и имеет два полюса. Коэффициенты Фурье - Чебышева функции y (36) на отрезке $[0.5, 1]$

$$\{a_n(y, [0.5, 1])\}_{n=0}^6 = \{-1, 0.45, -0.08, 0.014, -0.002, 0.0004, -7.2 \cdot 10^{-5}, 1.2 \cdot 10^{-5}, -2.1 \cdot 10^{-6}, 3.6 \cdot 10^{-7}, -6.2 \cdot 10^{-8}, 10^{-8}, -1.8 \cdot 10^{-9}, 3.1 \cdot 10^{-10}, -5.4 \cdot 10^{-11}, 9.3 \cdot 10^{-12}, -1.6 \cdot 10^{-12}\} , \quad (37)$$

с ростом параметра n регулярно убывают к нулю

$$|a_n(y, [0.5, 1])| = o(u^n), \quad u < 0.2 .$$

Поэтому для величины наилучшего приближения функции y (8) многочленами порядка n в пространстве $C_{[0.5,1]}$ справедливо тождество

$$\inf_{c_0, \dots, c_n} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_n \cdot x^n)\|_{C_{[0.5,1]}} = (1 + o(1)) \cdot |a_{n+1}(y, [0.5, 1])| . \quad (38)$$

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1. Норма погрешности аппроксимации многочленом

$$y_n = algorithm_1(task (35) , [0.5, 1] , n) \quad (39)$$

точного решения y (36) задачи Коши (35) в пространстве $C_{[0.5,1]}$ удовлетворяет тождества

$$\{\|y - y_n\|\}_{n=1}^7 = \{0.21, 0.025, 0.004, 0.00074, 10^{-4}, 1.8 \cdot 10^{-5}, 3.2 \cdot 10^{-6}\}.$$

С ростом параметра n алгоритма эта норма погрешности монотонно убывает к нулю. Скорость убывания этой нормы погрешности тождественна скорости убывания нечетных коэффициентов Фурье - Чебышева (37) функции y (36) на отрезке $[0.5, 1]$ и имеют место тождества

$$\|y - y_n\|_{C_{[0.5,1]}}/|a_{n+1}(y, [0.5, 1])| = Const + \alpha_n, \quad (40)$$

$$\{Const + \alpha_n\}_{n=1}^7 = \{2.6, 2.8, 2, 1.8, 1.4, 1.5, 1.5\}.$$

Из них и тождества (38) можно сделать следующее заключение.

Вывод 5. Коэффициент оптимальности решения по алгоритму 1 задачи Коши (35) в пространстве $C_{[0.5,1]}$ убывает к константе $Const \approx 1.5$ (с ростом параметра n)

$$C_n(\text{algorithm_1, task (38), } C_{[0.5,1]}) = (1 + o(1)) \cdot (Const + \alpha_n). \quad (41)$$

Погрешность методов Рунге - Кутта на задаче Коши (35). По методу Рунге - Кутта порядка m ($m = 3, 4, 6$) решают задачу Коши (1), (2) первого порядка, разрешенную относительно y' , [6] (с. 103 - 105) на отрезке $[d, d + H]$ с шагом h и вычисляют сеточную функцию

$$y_h = \text{Runge_Kutta_m}(y' = f(x, y), y(d) = y_0, [d, d+H], h) = \{y_h(x_i)\}_{i=0}^{[H/h]}. \quad (42)$$

Если шаг этого метода $h > h_m$, то его погрешность [6] (с. 103 - 105) удовлетворяет тождество

$$\max_{i=0, \dots, [H/h]} |y(x_i) - y_h(x_i)| = A_m \cdot h^m. \quad (43)$$

Погрешность решения задачи Коши (35) на отрезке $[0.5, 1]$ по методу Рунге - Кутта порядка $m = 3, 4, 6$ с шагом h , соответственно, равным $1/50, 1/20, 1/10$ равна $3 \cdot 10^{-6}$. Это погрешность алгоритма 1 с параметром $n = 7$ на задаче (35). Следовательно, для вычисления решения задачи (35) на отрезке $[0.5, 1]$ с точностью $3 \cdot 10^{-6}$ число узлов сетки решений, полученных методами Рунге - Кутта, больше порядка многочлена, вычисленного по алгоритму 1.

Метод интерполяции сеточной функции метода Рунге - Кутта. Композиция метода Рунге - Кутта и алгебраического интерполирования P_q сеточной функции y_h (42) является методом вычисления многочленов

$$(P_q, \text{Runge_Kutta_m})(y' = f(x, y), y(d) = y_0, [d, d + H])P_q[y_h] \quad (44)$$

порядка $q = [H/h]$. Норма погрешности этого метода в пространстве $C_{[d, d+H]}$ не меньше погрешности метода Рунге - Кутта

$$\max_{x \in [d, d+H]} |y(x) - P_q[y_h]| \geq \max_{i=0, \dots, q} |y(x_i) - y_h(x_i)|.$$

Поэтому коэффициент оптимальности метода (44) в пространстве $C_{[d,d+H]}$

$$C_q((P_q, Runge_Kutta_m), task(1), (2), C_{[d,d+H]}) \geq \max_{i=0,\dots,q} |y(x_i) - y_h(x_i)| / \inf_{c_0,\dots,c_q} \|y(x) - (c_0 + \dots + c_q \cdot x^q)\|_{C_{[d,d+H]}}.$$

Для задачи Коши (35) из этого неравенства и тождеств (37), (38), (43) можно сделать следующее заключение.

Вывод 6. Коэффициент оптимальности метода (44) в пространстве $C_{[0.5,1]}$ на задаче Коши (35):

- решающего эту задачу с точностью $2 \cdot 10^{-8}$ не меньше 10000,
- растет с ростом параметра $q = [0.5/h]$

$$C_q((P_q, Runge_Kutta_m), task(35), C_{[0.5,1]}) = O(h^m / |a_q(-2/(x \cdot (x + 2)), [0.5, 1])|) > O(v^q/q^m), \quad v > 5.$$

Заключение.

Построенные в работе алгоритм и APLAN-процедура решают задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка k вида (1), (2) на отрезке $[a, b]$ и вычисляют алгебраический многочлен y_n (3). Эта аппроксимация решения задачи Коши оптимальна для символьных преобразований в системах компьютерной алгебры — коэффициент оптимальности алгоритма в пространстве $C_{[a,b]}$ ограничен на достаточно широком классе дифференциальных уравнений вида (1). Этот алгоритм реализует идею В. К. Дзядыка:

построить на основании a -метода эффективные численные методы решения функциональных уравнений.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Lanczos S. (Ланцош К.) *Практические методы прикладного анализа.* — М.: Физматгиз, 1961 — 524 с.
- [2] Денисенко П. М. *Модифікований метод Дзядыка розв'язування задачі Коші.* // Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету, вип. 12 (1997), с. 44 — 51.
- [3] Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* — Киев: Наукова думка, 1988 — 304 с.
- [4] Paszkowski S. (Пашковский С.) *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* — М.: Наука, 1983 — 384 с.
- [5] Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* — М.: Наука, 1969 — 456 с.
- [6] Babuska I., Prager M., Vitasek E. (Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.) *Численные процессы решения дифференциальных уравнений.* — М.: Мир, 1969 — 368 с.

УДК 519.6

АЛГОРИТМ СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ СКЛАДНИХ КОЛИВАНЬ

О.М. Дреєв, З.Ю. Філер

Разработаны алгоритм и программа регрессионного анализа почти периодических процессов, используемая для экстраполяции-прогноза поведения стационарных случайных процессов. С её помощью анализируются солнечная активность и её последствия.

An algorithm and program of regressive analysis of almost batches processes, in-use for extrapolation-prognosis of conduct of stationary casual processes, is developed. With its help sun activity and its consequences is analyzed.

Вступ. Прогнозуючи сонячну активність (СА) та її наслідки – погодні зміни та врожаї [2], З.Ю. Філер звертав увагу своїх помічників – учнів Р.С. Шапоренка та Є.В. Білецького, враховувати, перш за все, коливальний характер відповідних числових рядів. Будучи прихильником *планетної* гіпотези про причини періодичності СА, він спочатку вибирав частотний спектр даних з кругових частот планет та періоду обертання Сонця навколо своєї осі. Відповідний регресійний аналіз на прохання З.Ю. Філера річних чисел Вольфа здійснив у Донецькій політехніці ще в 1979 р. В.В. Карабчевський. Аналіз показав наявність складових з такими частотами, але дисперсія виявилася дуже великою. Це свідчило про наявність інших, неврахованих частот та суттєвої випадкової складової. Будучи фахівцем з теорії нелінійних коливань, Філер розумів необхідність врахування й комбінаційних частот типу $k_1\omega_1+k_2\omega_2$, де k_i є якісь *цілі* числа. Зокрема, для пари наймасивніших планет Юпітера й Сатурна суттєвою є комбінація з $k_1=1$ й $k_2=-1$, яка має період, близький до 20 років, бо відповідна частота їх відносного обертання $\omega = \omega_1 - \omega_2$ при $\omega = 2\pi/T$. Очевидна наявність дуже великого комбінаційного періоду T_k з малою частотою $5\omega_1 - 2\omega_2$, бо на 2 періоди Сатурна (58,92 років) припадає 5 періодів обертання навколо Сонця Юпітера (59,36 р.). Інакше важко пояснити наявність 22-річного періоду змін СА з урахуванням зміни *орієнтації* магнітних полів сонячних плям, коли *кількість* їх (число Вольфа) змінюється з періодом, близьким до 11-річного. «Вертикальна» складова відповідного моменту сил змінюється через різний нахил їх орбіт до екліптики.

Стала зрозумілою необхідність пошуку не тільки *амплітудного*, а й *частотного* спектру. Таку задачу Філер поставив перед своїм учнем О.М.Дреєвим, з яким вдалося ще у 90-ті роки реалізувати гармонічний аналіз (Фур'є) за допомогою узагальненої формули Сімпсона *чисельного* інтегрування коливних функцій. Відомо, що коефіцієнти Ейлера-Фур'є знаходяться за допомогою інтегралів від коливних функцій – добутків аналізованої функції $f(x)$ на $\cos(k\omega x)$ чи $\sin(k\omega x)$. При великих k класичні

методи гармонічного аналізу не придатні, бо не враховують коливальність підінтегральних функцій і тому вимагають дуже малого кроку. Але тоді основна частота ω вважалася заданою. Для аналізу Фур'є достатньо даних про зміну величини протягом одного (самого довгого, основного) періоду, бо всі періоди кратних частот укладаються на основному періоді ціле число раз. Відоме, що коефіцієнти Ейлера-Фур'є мінімізують суму квадратів відхилень даної функції від тригонометричного поліному; через ортогональність системи функцій $1, \cos(k\omega x), \sin(k\omega x)$ при цілих k , ці коефіцієнти не залежать від довжини полінома й визначаються незалежно.

Для полігармонічного сигналу, у якого частоти не є кратними однієї основної частоти, такий підхід не є достатнім. Але навіть для ірраціонального відношення частот при чисельному аналізі вони будуть наближуватися скінченими десятковими дробами, тому їх відношення при розрахунку буде числом раціональним. Через це наближено такий сигнал буде періодичним з періодом, який є найбільшим спільним кратним всіх періодів. Його можна визначити, знаючи всі частоти гармонічних складових сигналу. Це вимагатиме довгого ряду спостережень.

Пошук основної частоти коливань квазіперіодичного сигналу . Основною ідеєю є вилучення неперіодичного *тренду* з наступним гармонічним аналізом нової функції $z(t)$ – різниці між даною функцією та трендом [3]. Множину пар $(t_i; z_i)$ будемо наближати функцією $u(t)=A+a\cdot\cos(\omega t)+b\cdot\sin(\omega t)$ зі сталими A, a, b, ω , шукаючи найкраще наближення в середньому квадратичному, тобто мінімізуючи суму квадратів відхилень табличних пар $(t_i; z_i)$ від значень функції $u(t_i)$:

$$S(A,a,b,\omega)=\sum_{i=1}^N [z_i - u(t_i)]^2 - \min \Rightarrow \tag{1}$$

тобто, коли

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \omega} = 0. \tag{2}$$

Система рівнянь (2) нелінійна і має не один розв'язок; серед цих розв'язків потрібно вибрати той, який дає найменше значення $S(A,a,b,\omega)$.

Якщо задати якесь ω , то з перших трьох рівнянь системи (2) можна знайти відповідні значення A, a, b , які мінімізують суму (1) при цьому ω . Вибравши розумний інтервал для значень ω , виходячи з відповідних фізичних умов (з урахуванням кроку значень часу t_i й теореми Котельникова про обмеженість вищих частот), при значеннях ω_k , взятих з якимсь кроком $\Delta\omega$, виділимо ту частоту ω_1 , яка дає найменшу суму $S(A,a,b,\omega)$. Далі ми обчислимо нову функцію $u_1(t)=A_1+a_1\cdot\cos(\omega_1 t)+b_1\cdot\sin(\omega_1 t)$ для нових різниць за тією ж ідеологією мінімізації з новим найкращим ω_2 й т. д. Кількість складових гармонік N визначається заданою точністю наближення й встановлюється в процесі аналізу. При проведенні аналізу, пошук нових доданків припиняється при

різкому уповільнені зменшення чергового мінімального значення функції $S(A,a,b,\omega)$.

За описаним алгоритмом О.М. Дреєвим розроблена програма **Extrapol**. Для користувачів ним написана інструкція, яка дозволяє отримати частотно-амплітудний спектр заданого числового ряду й застосувати його для прогнозів.

Інструкція

*до частотно-амплітудного аналізу числових рядів
за допомогою програми EXTRAPOL-08*

Програма EXTRAPOL створена для частотно-амплітудного аналізу, вона пристосована для зручного використання з електронною таблицею Excel.

Вхідними даними є дві колонки чисел: перша – значення аргументу; друга – відповідні значення залежної величини «функції» (наслідку).

Процес аналізу відбувається послідовно. Треба:

1. Виділити вхідні дані та скопіювати їх у буфер обміну.
2. Перейти до програми аналізування, й у лівому вікні вставити вхідні дані (через контекстне меню, або комбінацією клавіш Ctrl+v).
3. Знизу форми повзунком вибираємо бажану кількість N гармонік .
4. Клацаємо кнопку «Аналізувати».
5. Для побудови прогнозу клацаємо кнопку «Розрах. прог.».
6. Встановлюємо початкове та кінцеве значення аргументу, крок між послідовними значеннями аргументу.
7. Клацаємо кнопку «Пуск». У лівому боці форми для проведення розрахунків матимемо таблицю прогнозованих (чи наближених) даних.

Вікна для інтерактивних розрахунків мають вигляд:

Головне вікно програми

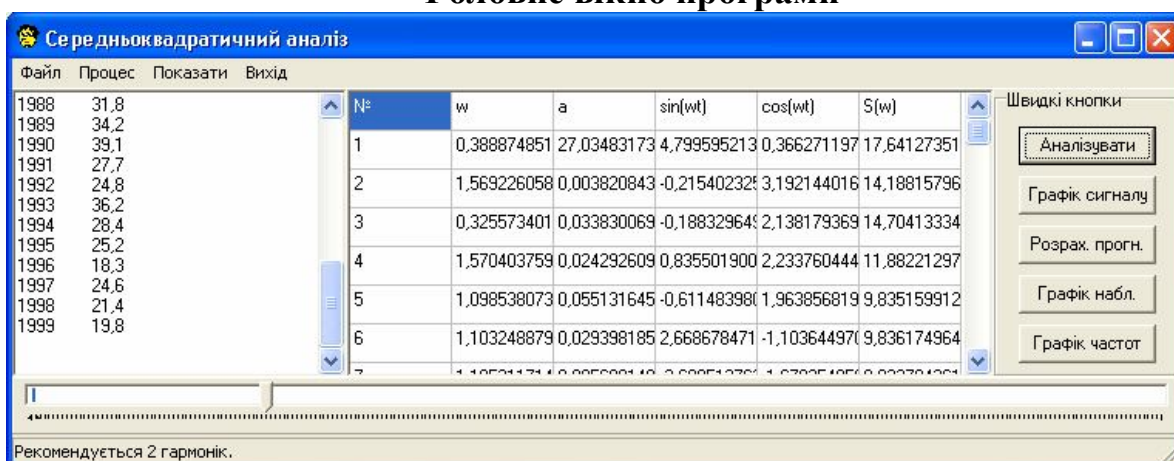


Рис. 1

Результати розрахунків можуть бути перенесені до текстового файлу, або копіюватися до таблиці Excel для подальшої обробки (зіставлення з іншими даними чи прогнозами, побудові графіків).

Під час розкладання на тригонометричні складові вхідних даних, програма спостерігає за якістю наближення (величиною мінімального значення суми $S(A,a,b,\omega)$ порівняно з попередніми кроками. На основі цього спостереження пропонується верхня межа, після якої якість наближення мало покращується при зростанні кількості N гармонік. Наведений приклад (рис. 1) показує наявність лише двох значимих тригонометричних складових. Відсутність значимих тригонометричних складових означає неперіодичність послідовності отриманих різниць. Головною особливістю програми є знаходження довгоперіодичних складових, період яких перевищує час спостережень у 5-10 разів. Ці довгоперіодичні складові утворюють досить складні тренди, відмінні від поліноміальних, які передбачені в Excel (до 6-го степеня).

Вікно для обчислення прогнозу чи наближення

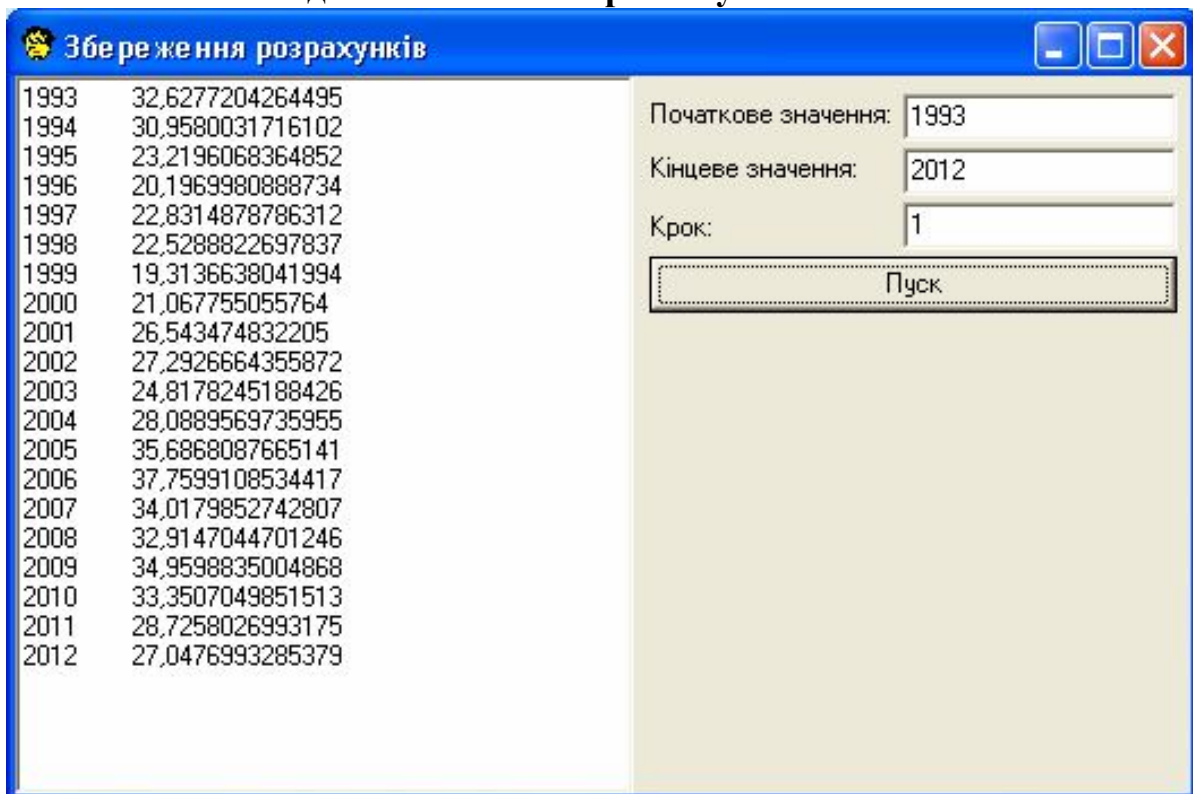


Рис. 2

Як приклад використання програми EXTRAPOL для побудови тренду (наближення тригонометричним поліномом) у порівнянні з трендом, побудованим Excel, ми провели аналіз чисел Вольфа. Поліноміальний тренд шостого степеня має сім коефіцієнтів; пошук двох тригонометричних складових зводиться до знаходження також семи величин: однієї сталої,

чотирьох коефіцієнтів при синусах та косинусах гармонік двох частот. Якість наближення трендів до вхідних даних можна оцінити візуально на рис.3. *Поліноміальний* тренд, знайдений програмою Excel, навіть якісно не спроможний передати наявність місячного циклу СА, який пов'язаний із власним обертанням Сонця; тим більш він не здатний показати розвиток процесів в майбутньому чи в минулому й високочастотні складові. *Тригонометричний* тренд, отриманий за допомогою програми EXTRAPOL, непогано передає фази коливань СА; амплітудні значення можуть відрізнятися суттєво, бо вони є випадковими величинами, пов'язаними з турбулентним характером руху плазми у конвективній зоні Сонця. Це дає змогу прогнозувати етапи спаду та зростання в місячному циклі змін СА, обумовленими обертанням Сонця навколо своєї осі. Але навіть цей *період* є змінним, бо Сонце не є твердим тілом і його обертання є диференційованим – період обертання екваторіальної зони 27 діб менше періоду обертання середніх широт (29-30 діб). Плями у період максимуму спостерігаються у широтах 30-40°. На спаді СА вони спостерігаються у низьких широтах, наближаючись до широт 5-8° у період перед мінімумом СА. На середині 3-річного етапу мінімуму багато днів, коли плям узагалі не видно; після проходження точки мінімуму, вони змінюють орієнтацію магнітних полів й з'являються у верхніх широтах. Якраз зараз є ознака закінчення «старого» 23 циклу СА й початку «нового» 24 циклу СА (при спостереженнях з 1749 р.). Тому навіть найвища частота ω_1 для щодобових даних СА підлягає знаходженню в процесі аналізу щоденних даних СА для побудови прогнозу коротко періодичних наслідків СА. Такий аналіз для чисел Вольфа з вересня 2006 р. до січня 2007 р. проведено за допомогою описаної програми EXTRAPOL і показано на рис. 3. Очевидно непоганий прогноз *фаз* змін СА (етапів зростання та спадання, днів максимуму та мінімуму), хоча «амплітудні» значення відрізняються помітно. Це й не дивно, бо числа Вольфа є типовим прикладом стаціонарних випадкових процесів з детермінованим частотним спектром і випадковим розподілом амплітуд окремих гармонік. Чітко видно по тригонометричному тренду майже періодичний процес з основним періодом, близьким до 1 місяця. Наведений там же поліноміальний тренд 6 степеня навіть у середньому не передає характеру цих складних коливань. Це й зрозуміло, бо многочлен 6 степеня має похідну 5-го степеня, яка дасть не більше 5 точок екстремуму. На рис. 3 чітко видна наявність 3 точок максимуму й 2 точок мінімуму, хоча дані величини чисел Вольфа мають не менше 10 точок максимуму (навіть, вважаючи 2 близьких максимуми за один) й не менше 8 точок мінімуму, якщо вважати за одну точку цілий тиждень нульових значень W .

**Числа Вольфа та їх поліноміальний (6 степiнь)
та тригонометричний (2 гармонiки) тренди**

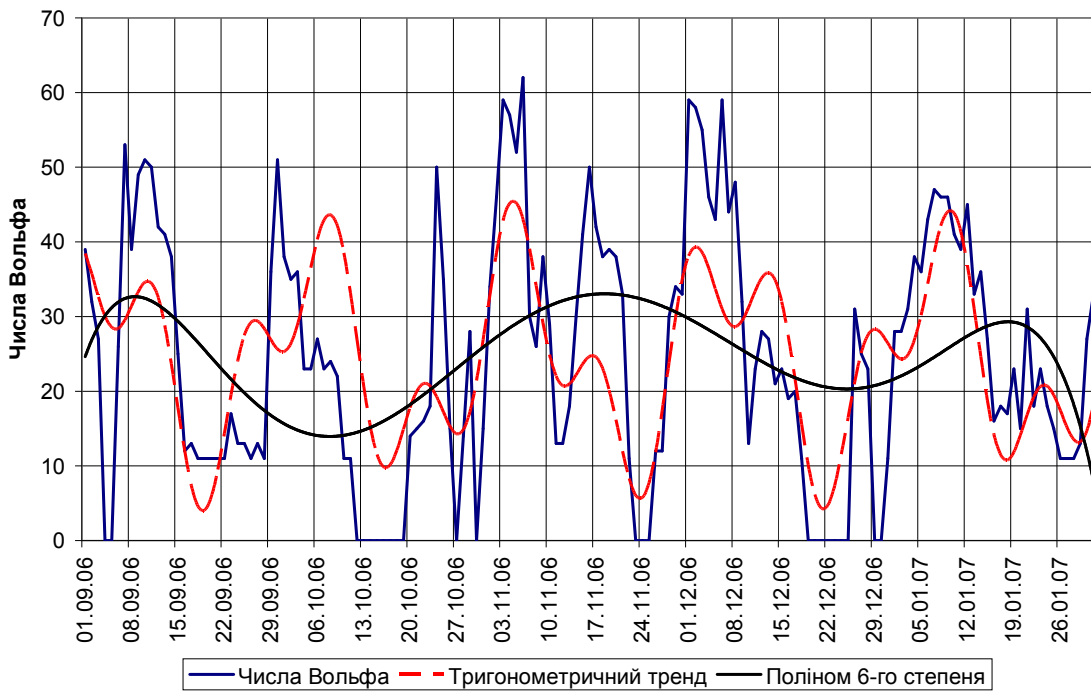


Рис. 3

Такий же складний характер мають зміни середньомісячних чисел Вольфа протягом одного циклу (рис. 4). Прогноз НАСА побудовано за середньомісячними даними чисел Вольфа, які були до квітня 2008 р. Вони показані зліва від початку 1995 р., коли ще йшов етап спаду СА у 22 циклі. Він закінчився восени 1996 р. На березень місяць 2008 р. прогнозувався з літа 2007 р. мінімум СА 23 циклу. 4 січня 2008 р. [5] вперше спостерігалася група плям протилежної орієнтації у верхніх широтах, що свідчило про можливий кінець 23-го циклу й початок 24-го циклу. Але, одна ластівка весни не приносить: деякий час на етапі мінімуму спостерігаються плями властиві «старому» й «новому» циклам – на різних широтах та різної орієнтації. Знову така ж комбінація ознак нового циклу з’явилася 14 квітня. Прогноз НАСА, зображений на рис. 4, зроблений експертами, які враховують різні якісні ознаки тривалості та висоти 11-річного циклу й дають «довірчі» допуски, у яких повинні міститися середньомісячні дані. Очевидно суттєве відхилення цих значень від указаних для них смуг. Більше того, у кінці 2000 р. автор сайту НАСА Д. Хатавей писав про початок спаду СА після проходження максимуму. Але реальна дійсність не оправдала його прогнозів: з кінця 2000 до середини 2001 року СА знову почала зростати. Цей максимум став «двоголовим». 9 вересня 2001 р. СА знову досягла високого максимуму. Можливо, це стало безпосередньою причиною вибору дати нападу терористів на американські міста? Одним з наслідків швидких змін СА є збудження психіки й прийняття давно підготовлених рішень («перейти Рубікон») [1].

Середньомісячні числа Вольфа 23 циклу СА та їх прогноз на 24-й цикл

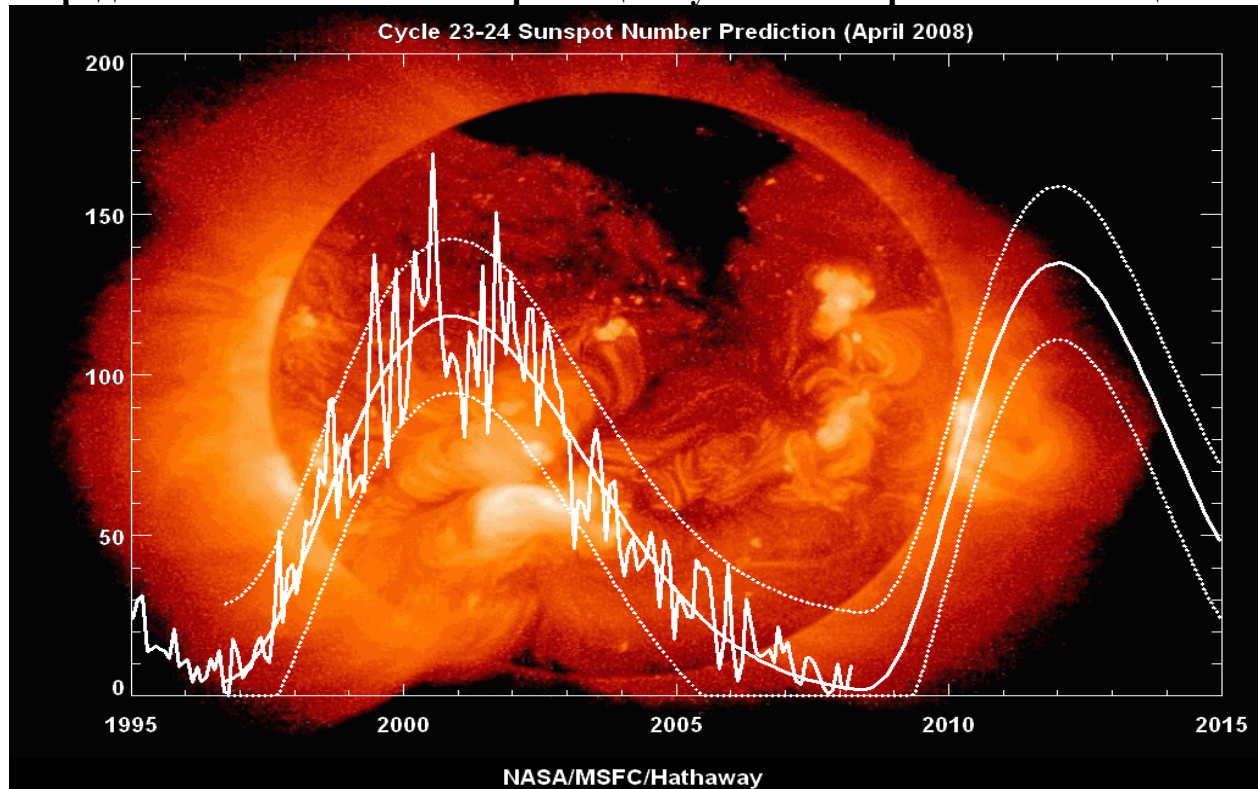


Рис. 4

Прогнозисти НАСА не враховують зміну орієнтації магнітних торів при переході через мінімум, розглядаючи лише 11-річні цикли. Ми вже з кінця 80-х років враховуємо цю зміну, розглядаючи як основний 22-річний цикл зміни чисел Вольфа, приписуючи знак мінус їм у непарних циклах (рис. 5).

Очевидно, такий графік має значно закономірнішу структуру, він достатньо близький до синусоїди з періодом у 22 роки. Етап мінімуму при переході від одного 11-річного до наступного 11-річного напівциклу припадає на нульову величину СА. Рисунок типу рис. 4 отримують «випрямленням» рис. 5, як це відбувається зі струмом при проходженні його через двонапівперіодний випрямляч. Навіть точна синусоїда періоду T при цьому дасть нескінченний спектр з чітко вираженим періодом $T/2$ й сталою складовою $2/T$ й вищими гармоніками з косинусними амплітудами парних частот величини $4/(k^2-1)/T$. Тому й важливо для знаходження середньорічних прогнозів брати масив чисел Вольфа з відповідними знаками. Такий масив дасть і довгоперіодичні коливання з періодами 44, 66, 88 та 110 років. Короткі періоди, пов'язані з переміщенням ближніх планет (Меркурія, Венери, Землі з Місяцем, Марса) й пояснюють відхилення від «синусоїди» протягом 3-4 років. Після публікації Д.Хатавеєм прогнозів експертів НАСА на наступний 24 цикл у липні 2007 р., ми розробили свій прогноз за допомогою програми EXTRAPOL.

Він разом з експертними прогнозами НАСА показаний на рис. 6.

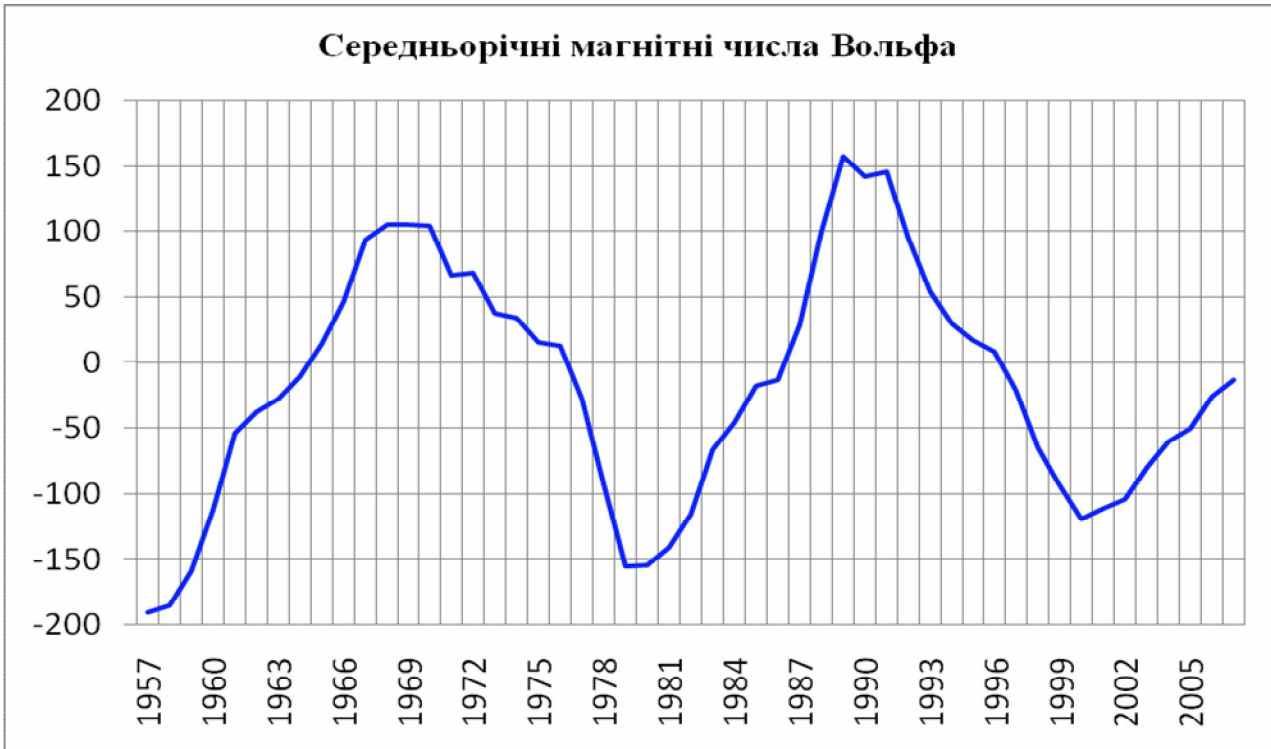


Рис. 5

Дві «половинки» 22-річного циклу – «додатня»(парний 11-річний цикл) і «від’ємна» (непарний наступний 11-річний цикл) мають різну тривалість, створюючи цілий «22-річний» магнітний цикл Д.Хейла.

ПРОГНОЗИ НАСА Й НАШ НА НАСТУПНИЙ 24-Й ЦИКЛ СА

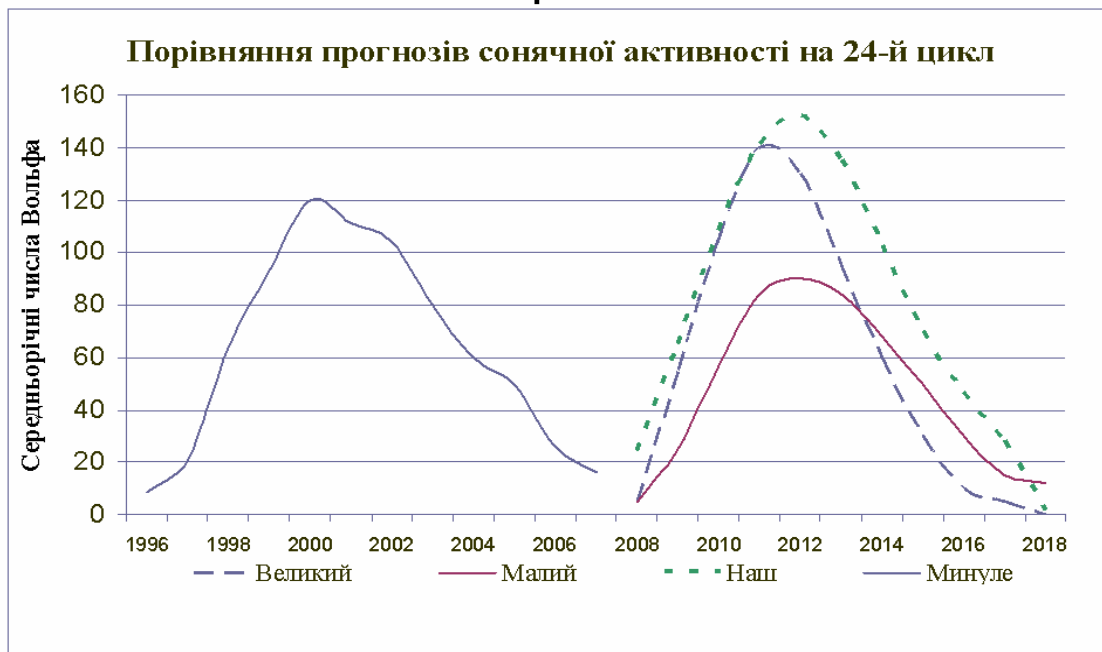


Рис. 6

Очевидно, що наш прогноз за положенням максимуму СА в 2012 р. близький для «малого» прогнозу НАСА, а за величиною максимуму – до «великого» прогнозу НАСА. Повільніший характер змін СА як на етапі зростання в 2009 – 2010 рр., так і на етапі спаду в 2014 – 2017 рр. обіцяє більш спокійний характер соціальних наслідків змін СА, ніж у 2004 р.

Висновки

1. Розроблені алгоритм та програма для знаходження рівняння регресії числових рядів із можливо нерівномірними в часі значеннями, які мають майже періодичний характер.

2. Програма EXTRAPOL дозволяє проводити наближення тригонометричним поліномом з пошуком відповідних некратних частот (на відміну від Фур'є-аналізу) та прогнозування в інтерактивному режимі.

3. Зіставлені степеневі тренди в Excel та тригонометричні, знайдені за допомогою EXTRAPOL; показано, що тригонометричні тренди значно краще передають характер майже періодичних сигналів, тоді як поліноміальний тренд непридатний для опису коливань на достатньо довгому інтервалі.

4. Тригонометричний тренд можна застосовувати для якісного та кількісного прогнозування характеру змін сигналу, що досліджується, як в майбутнє так і в минуле.

5. Розроблена методика та програма застосовуються для вивчення та прогнозування змін сонячної активності, врожайності сільськогосподарських культур, змін стану здоров'я [4; 3] та соціальної активності людства.

6. Інструкція для користувача доступна навіть для студентів, як показав досвід її використання для аналізу тривалості життя, кількості пожеж, урожайності культур на Кіровоградщині, демографічних показників й т.п.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Чижевський О.Л. Фізичні фактори історичного процесу/ Пер. з доп. З.Ю.Філера та О.М.Дреєва. – Кіровоград: "КОД". – 2007.
2. Філер З.Ю. Прогнози сонячної активності та її наслідків на 1997 р. -Кіровоград : КДПУ, 1996.- 60 с.
3. Філер З.Е., Дреєв А.Н. Развитие идей Чижевского: от познания до прогноза//Юбилейные Чтения памяти Александра Леонидовича Чижевского, посвящённые 110-летию учёного. Сб. тр. конференции 27-30.11.2007. – Санкт-Петербург: Политехн. ун-т, 2007. – С. 160-164.
4. Філер З.Ю., Дреєв О.М. Людина і Сонце. Погода і здоров'я.//Моя Батьківщина/Моя Родина. – Кожного числа з осені 2003 р. – С.8.
5. News and information about the Sun – Earth environment// <http://www/Spaceweather.com>.

УДК 517.9

ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ МНОЖИН СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Г.В. Завізіон, І.Г. Ключник

Доведено існування диференційованих інваріантних торів систем інтегро-диференціальних рівнянь.

Доказано существование дифференцируемых инвариантных торов систем интегро-дифференциальных уравнений.

Prove existence of differentiate invariant tori of the system of integral-differential equation.

В [1-3] досліджуються динамічні системи в $\mathfrak{T}_m \times E^n$ і зроблено огляд результатів в [4]. В [5] доводяться теореми існування інваріантних множин для систем із запізненням, а в [6] доводиться існування липшицевих торів нелінійних систем із запізненням. В даній статті, використовуючи ідеї [7], доводяться теореми існування інваріантних множин системи інтегро-диференціальних рівнянь і вказується алгоритм їх побудови.

Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} = & -b(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s))ds, y(t), \int_0^T f(s, y(t), y(s))ds, \varepsilon)y(t) - \\ & -b_1(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s))ds, y(t), \int_0^T f(s, y(t), y(s))ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, y(t), y(s))ds) + c(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s))ds, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = & a(\varphi(t), y(t), \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

де $y = (y_1 \dots y_n), \varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_m), a, b, a_1, b_1, c, f$ періодичні функції по φ , $\psi = \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s))ds$ з періодом 2π , ці функції визначені для всіх y , $z = \int_0^T f(s, y(t), y(s))ds, \varepsilon$, які належать області

$$\|y\| \leq d, \|z\| \leq d, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \tag{2}$$

T – число. Припустимо, що $c(\varphi, \psi, 0) = 0$, тобто при $\varepsilon = 0$ система (1) має інваріантний тор $y = 0$.

Згідно [7], інваріантну множину системи (1) будемо шукати у вигляді $y = u(\varphi, \varepsilon)$, де $u(\varphi, \varepsilon)$ – неперервна функція, періодична по φ з періодом 2π . Нехай $\varphi_t = \varphi_t(\varphi), \varphi_\tau(\varphi) = \varphi$ розв'язок системи рівнянь $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, u(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)$, де τ, φ – довільні сталі, $u(\varphi, \varepsilon)$ – деяка періодична функція з періодом 2π . Функцію

$u(\varphi, \varepsilon)$ будемо визначати, як інваріантну множину системи (1), якщо для всіх $-\infty < t < \infty$ виконується тотожність

$$\begin{aligned} \frac{du(\varphi_t, \varepsilon)}{dt} = & -b(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, u(\varphi_t, \varepsilon), \int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times u(\varphi_t, \varepsilon) - b_1(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, u(\varphi_t, \varepsilon), \int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, \varepsilon). \end{aligned}$$

Для відшукування інваріантної множини $\mathfrak{Z}(\varepsilon)$ застосуємо ітераційний метод, який дає можливість знаходити $\mathfrak{Z}(\varepsilon)$, як границю послідовності торів $\mathfrak{Z}^0(\varepsilon) = \mathfrak{Z}(0), \mathfrak{Z}^1(\varepsilon) \dots \mathfrak{Z}^i(\varepsilon) \dots$ кожний з яких є інваріантним тором

$$\mathfrak{Z}^{i+1}(\varepsilon) : y = u^{i+1}(\varphi, \varepsilon), i = 0, 1, \dots, \tag{3}$$

відповідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & a(\varphi(t), u^i(\varphi(t), \varepsilon), \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} = & -b(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s)) ds, u^i(\varphi(t), \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi(t), \varepsilon), u^i(\varphi(s), \varepsilon)) ds, \varepsilon) y(t) - \\ & - b_1(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s)) ds, u^i(\varphi(t), \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi(t), \varepsilon), u^i(\varphi(s), \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, u^i(\varphi(t), \varepsilon), u^i(\varphi(s), \varepsilon)) ds) + c(\varphi(t), \int_0^T f_1(s, \varphi(t), \varphi(s)) ds, \varepsilon). \end{aligned} \tag{4}$$

Можливість знаходити тор $\mathfrak{Z}(\varepsilon)$ таким шляхом обґрунтовує лема 1 з [7]. Згідно цієї леми, якщо функція $a(\varphi, y, \varepsilon), b(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon), b_1(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon), c(\varphi, \psi, \varepsilon)$ є неперервними по φ, ψ, y, z на множині (2), а також $z(t)$ неперервні по t для довільного скінченного відрізка T_1 прямої $-\infty < t < \infty$, то якщо послідовність (3) рівномірно збігається, для довільного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, до граничної функції $u = \lim_{i \rightarrow \infty} u^i(\varphi, \varepsilon)$, то $u(\varphi, \varepsilon)$ означає інваріантний тор $\mathfrak{Z}(\varepsilon)$. Дійсно, так як $y = u^{i+1}(\varphi, \varepsilon)$ інваріантний тор системи (4), то для траєкторій φ_t^i, y_t^i , які лежать на ньому, виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \varphi_t^i = & \varphi + \int_a^t a(\varphi_t^i, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), \varepsilon) dt, \\ u^{i+1}(\varphi_t^i, \varepsilon) = & u^{i+1}(\varphi, \varepsilon) + \int_\tau^t (-b(\varphi_t^i, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^i, \varphi_s) ds, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), u^i(\varphi_s^i, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times u^{i+1}(\varphi_t^i, \varepsilon) - b_1(\varphi_t^i, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^i, \varphi_s^i) ds, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), u^i(\varphi_s^i, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, u^i(\varphi_t^i, \varepsilon), u^i(\varphi_s^i, \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t^i, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^i, \varphi_s^i) ds) dt. \end{aligned} \tag{5}$$

З співвідношення (5) випливає рівномірна обмеженість і рівностепенна неперервність послідовності $\varphi_t^i (i = 0, 1, \dots)$ для довільного скінченного відрізка T_1 .

Значить існує рівномірно збіжна підпослідовність $\varphi_t^{i_k}$ і позначивши $\varphi_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_t^{i_k} (t \in T_1)$, і перейшовши в (5) при $i = i_k$ до границі, то одержимо, що

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \varphi + \int_{\tau}^t a(\varphi_t, u(\varphi_t, \varepsilon), \varepsilon) dt, \quad (t \in T_1), \\ u(\varphi_t, \varepsilon) &= u(\varphi, \varepsilon) + \int_{\tau}^t (-b(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, u(\varphi_t, \varepsilon), \int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ &\times u(\varphi_t, \varepsilon) - b_1(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, u(\varphi_t, \varepsilon), \int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ &\times (\int_0^T f(s, u(\varphi_t, \varepsilon), u(\varphi_s, \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t, \int_0^T f_1(s, \varphi_t, \varphi_s) ds, \varepsilon)) dt, \end{aligned}$$

що достатньо, щоб $y = u(\varphi, \varepsilon)$ визначала інваріантний тор системи (1). Таким чином, питання існування інваріантного тора системи (1) зв'язаний з питанням існування інваріантного тора системи (4). Для цього розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -b(\varphi_t(\varphi), \int_0^T f_1(s, \varphi_t(\varphi), \varphi_s(\varphi)) ds, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), u^i(\varphi_s(\varphi), \varepsilon)) ds, \varepsilon) y(t) - \\ &- b_1(\varphi_t(\varphi), \int_0^T f_1(s, \varphi_t(\varphi), \varphi_s(\varphi)) ds, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), u^i(\varphi_s(\varphi), \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \quad (6) \\ &\times (\int_0^T f(s, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), u^i(\varphi_s(\varphi), \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t(\varphi), \int_0^T f_1(s, \varphi_t(\varphi), \varphi_s(\varphi)) ds, \varepsilon), \end{aligned}$$

де $u^i(\varphi, \varepsilon)$ задана 2π – періодична по φ функція, $\varphi_t(\varphi) = \varphi_t^i(\varphi, \varepsilon) (\varphi_0(\varphi) = \varphi)$ загальний розв'язок першого рівняння (4). Позначимо $G_t^i(\tau, \varphi, \varepsilon)$ функцію Гріна задачі про обмежені розв'язки системи (6), припускаючи, що вона існує. Тоді співвідношення

$$y_t(\varphi, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t^i(\tau, \varphi, \varepsilon) c_1(\varphi_\tau(\varphi), \psi_\tau(\varphi), z_\tau(\varphi), \varepsilon) d\tau,$$

де

$$\begin{aligned} c_1(\varphi_t(\varphi), \psi_t(\varphi), z_t(\varphi), \varepsilon) &= -b_1(\varphi_t(\varphi), \psi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), \int_0^T f(s, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), u^i(\varphi_s, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ &\times (\int_0^T f(s, u^i(\varphi_t(\varphi), \varepsilon), u^i(\varphi_s(\varphi), \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t(\varphi), \psi_t(\varphi), \varepsilon), \end{aligned}$$

визначає сімейство обмежених розв'язків системи (6), яке залежить від φ і ε як від параметрів. Ці розв'язки заповнюють інваріантну множину

$$y = u^{i+1}(\varphi, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi, \varepsilon) c_1(\varphi_\tau(\varphi), \psi_\tau(\varphi), z_\tau(\varphi), \varepsilon) d\tau,$$

яка є інваріантною тороїдальною множиною системи (4).

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= a_0(\varphi(t)) + a_1(\varphi(t)), \\ \frac{dy}{dt} &= -(b_0(\varphi(t), \psi(t)) + b_1^0(\varphi(t), \psi(t)))y(t) + c_0(\varphi(t), \psi(t)), \end{aligned} \quad (7)$$

де $a_0, b_0, b_1^0, c_0 \in C^r(\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m) = C^r(\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m : 0 \leq \varphi_i \leq 2\pi, 0 \leq \psi_i \leq 2\pi, i = \overline{1, m})$, a_0, b_0 - фіксовані, a_1, b_1^0, c_0 - довільні, але малі в смислі норми $C^r(\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m)$ функції. Вірною є лема, доведення якої аналогічно приведенному в [7].

Лема 1. Припустимо, що система рівнянь (7) така, що знайдуться ціле r і сталі M, α, K , такі, що при всіх $a_1(\varphi), b_1^0(\varphi)$ виконується нерівність $\max\{|a_1|_r, |b_1^0|_r\} \leq M$, де система рівнянь (7) має функцію Гріна про інваріантні тори $G_0(\tau, \varphi)$, яка для кожного $\tau \in (-\infty, +\infty)$ задовольняє умові

$$|G_0(\tau, \varphi, \varepsilon)c_0(\varphi_\tau(\varphi), \psi_\tau(\varphi))|_r \leq K \exp(-\alpha|\tau|)|c_0(\varphi, \psi)|_r. \quad (8)$$

Тоді система рівнянь (7) має інваріантний тор $\mathfrak{S} : u = u(\varphi, \varepsilon)$, для якого вірна оцінка

$$|u(\varphi, \varepsilon)|_r \leq \frac{2K}{\alpha} |c_0(\varphi, \psi)|_r \quad (9)$$

Застосуємо лему до послідовності торів (3). Покладемо $a_0(\varphi) = a(\varphi, 0, 0), b_0(\varphi, \psi) = b(\varphi, \psi, 0, 0, 0), a'(\varphi, y, \varepsilon) = a(\varphi, y, \varepsilon) - a(\varphi, 0, 0), b'(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon) = b(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon) - b(\varphi, \psi, 0, 0, 0)$, і будемо припускати, що $c(\varphi, \psi, \varepsilon), a(\varphi, y, \varepsilon), b(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon), b_1(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon) \in C^r(D)$, для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, де D - область $\|y\| \leq d, \|z\| \leq d, (\varphi, \psi) \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m$. Припустимо також, що вірні нерівності

$$\begin{aligned} \max\{|a'(\varphi, y, \varepsilon)|_r, |b'(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon)|_r, |b_1|_r \cdot PT + |c|_r\} &\leq L_r(d, \varepsilon_0), \\ \frac{4K}{\alpha} M_1 T |b_1|_r &\leq R < 1, \end{aligned} \quad (10)$$

де $L_r(d, \varepsilon_0)$ - додатня монотонно спадна функція одного із своїх аргументів при фіксованому значенні іншого, яка має властивість $L_r(d, \varepsilon_0) \rightarrow 0$ при $d \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0, R < 1; P = \max_t \|f(t, 0, 0)\|, \|f'_y(t, y, y)\| \leq M_1$. Існування послідовності торів (3) встановлює наступна теорема.

Теорема 1. Нехай функції $a_0(\varphi), b_0(\varphi, \psi)$, такі, що система рівнянь (6) задовольняє умовам лемі 1. Тоді можна вказати, таке $\varepsilon^0, 0 < \varepsilon^0 \leq \varepsilon_0$, щоб при $\varepsilon < \varepsilon^0$ послідовність (3) є послідовністю інваріантних торів, кожний з яких належить простору $C^r(\mathfrak{S}_m)$ і виконується нерівність

$$|u^i(\varphi, \varepsilon)|_r \leq \frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)} \quad (11)$$

Доведення. Оскільки $u^0 = 0$, то теорема справедлива при $i = 0$. Припустимо, що вона має місце для $i = k$ і доведемо, що інваріантний тор $\mathfrak{S}^{k+1}(\varepsilon) : y = u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$ існує і задовольняє нерівність (11). Для цього покладемо в (6) $i = k$ і тора $y = u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$ отримаємо систему

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_t^k}{dt} &= a_0(\varphi_t^k) + a'(\varphi, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= -(b_0(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds) + \\ &+ b'(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon) \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon))y(t) + \\ &+ c_1(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} c_1(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) = \\ = -b_1(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ \times (\int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, \varepsilon). \end{aligned}$$

В силу того, що функції a', b' задовольняють нерівність (10), а $u^k(\varphi, \varepsilon)$ нерівність (11), то при достатньо малому ε^0 для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon^0$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \max_{\varepsilon} \left\{ |a'(\varphi_t^k, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \varepsilon)|_r, |b'(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon)|_r \right\} \leq \\ \leq L_r \left(\frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)}, \varepsilon_0 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Так як $L_r(0, \varepsilon^0) \rightarrow 0$ при $\varepsilon^0 \rightarrow 0$, то завжди можна вважати ε^0 настільки малим, щоб крім нерівності (13) виконувалися нерівності

$$L_r \left(\frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)}, \varepsilon_0 \right) \leq M, \frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)} \leq d \quad (14)$$

При такому наборі ε^0 , для всіх $\varepsilon \leq \varepsilon^0$ до системи (12) можна застосовувати лему 1, згідно якої існує тор $\mathfrak{S}^{k+1}(\varepsilon) : y = u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$, для якого вірна оцінка

$$|u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)|_r \leq \frac{2K}{\alpha} |c_1(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon)|_r \leq \frac{2K}{\alpha} (|b_1|_r (2M_1 T |u^k|_r + PT) + |c|_r) \quad (15)$$

Але, згідно (10) і монотонного спадання $L_r(d, \varepsilon_0)$ по змінній d , маємо

$$|b_1|_r PT + |c|_r \leq L_r(0, \varepsilon_0). \quad (16)$$

Тоді з (10), (25), (26) одержимо

$$\begin{aligned} |u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)|_r \leq \frac{2K}{\alpha} (2|b_1|_r M_1 T |u^k|_r + L_r(0, \varepsilon_0)) \leq \frac{2K}{\alpha} \left(\frac{\alpha \cdot R \cdot 2M_1 T}{4KM_1 T} \times \right. \\ \left. \times \frac{2L_r(0, \varepsilon^0)K}{\alpha(1-R)} + L_r(0, \varepsilon_0) \right) \leq \frac{2KL_r(0, \varepsilon_0)}{\alpha} \left(\frac{R}{1-R} + 1 \right) = \frac{2KL_r(0, \varepsilon_0)}{\alpha(1-R)} \leq d. \end{aligned}$$

Рівності (27), (29), (30) із [5] показують спосіб вибору ε^0 для випадку $r = 0$. Теорема доведена.

Вірною є така допоміжна лема.

Лема 2. *Мають місце нерівності*

$$\|\varphi_t^k - \varphi\| \leq e^{k_1|t|} - 1, \tag{17}$$

$$\left| \varphi_t^k - \varphi_t^{k-1} \right|_0 \leq \frac{\left| \omega^k(\varphi, \varepsilon) \right|_0 (e^{k_1|t|} - 1)}{1 + ld}, \tag{18}$$

де $\omega^k(\varphi, \varepsilon) = u^k(\varphi, \varepsilon) - u^{k-1}(\varphi, \varepsilon)$, $k_1 = l|a|_1(1 + ld)$. Доведення нерівності (17) впливає з наступних нерівностей

$$\begin{aligned} \|\varphi_t^k - \varphi\| &\leq \int_0^{|t|} \|a(\varphi_s^k, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon)\| dt \leq \int_0^{|t|} (\|a(\varphi_s^k, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon)\| + \\ &+ \|a(\varphi, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)\| + \|a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, 0, \varepsilon)\| + \|a(\varphi, 0, \varepsilon)\|) ds \leq \\ &\leq \|a_1\| \left(\int_0^{|t|} \|\varphi_s^k - \varphi\| ds + l \int_0^{|t|} \|u^k(\varphi_s^k, \varepsilon) - u^k(\varphi, \varepsilon)\| ds + l|u^k|_1 |t| + |t| \right) \leq k_1|t| + k_1 \int_0^{|t|} \|\varphi_s^k - \varphi\| ds \end{aligned}$$

Застосовуючи до останньої нерівності теорему 1.2 із [8] одержуємо нерівність (17). З (17) випливає справедливність наступної нерівності

$$\int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi\| ds \leq \frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T$$

Застосовавши до нерівностей (36),(37) з [5] теорему 1.2 із [8] впливає виконання нерівності (18).

Доведемо збіжність послідовності інваріантних торів (3). Так як функція $u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$ задає інваріантний тор системи (5) при $i = k$, то вона задовольняє тотожності

$$\begin{aligned} \frac{du^{k+1}(\varphi_t^k, \varepsilon)}{dt} &\equiv \frac{\partial u^{k+1}(\varphi_t^k, \varepsilon)}{\partial \varphi_t^k} \cdot a(\varphi_t^k, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \varepsilon) \equiv \\ &\equiv -b(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) u^{k+1}(\varphi_t^k, \varepsilon) - \\ &- b_1(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon), \varepsilon) \times \\ &\times \int_0^T f(s, u^k(\varphi_t^k, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds) + c(\varphi_t^k, \int_0^T f_1(s, \varphi_t^k, \varphi_s^k) ds, \varepsilon) \end{aligned} \tag{19}$$

При $t = 0$ нерівність набирає вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{k+1}(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} \cdot a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) &\equiv \\ &\equiv -b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) u^{k+1}(\varphi, \varepsilon) - \\ &- b_1(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ &\times \left(\int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds \right) + c(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, \varepsilon), \end{aligned} \tag{20}$$

де $\varphi_0^k(\varphi) = \varphi$.

З (20) випливає тотожність

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} \cdot a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) + \frac{\partial u^k(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} (a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)) \equiv \\ & \equiv -b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon) - \\ & - (b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) - \\ & - b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon) \mu^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds, \varepsilon)) u^k(\varphi, \varepsilon) - \\ & - b_1(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) (\int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds) \\ & + b_1(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), u^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), u^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds) + c(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, \varepsilon) - c(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, \varepsilon). \end{aligned} \quad (21)$$

Тотожність (21) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} \cdot (a(\varphi, 0, 0) + (a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, 0, 0))) + \\ & + (b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, 0, 0, 0) + (b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) - \\ & - b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, 0, 0, 0))) \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon) = c_k(\varphi, \varepsilon), \end{aligned} \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} c_k(\varphi, \varepsilon) = & - \frac{\partial u^k(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} \cdot (a(\varphi, u^k(\varphi, \varepsilon), \varepsilon) - a(\varphi, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)) - \\ & - b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) - \\ & - b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon) \mu^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds, \varepsilon)) u^k(\varphi, \varepsilon) - \\ & - b_1(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) (\int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon) \mu^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds) + \\ & + b_1(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon) \mu^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds, \varepsilon) \times \\ & \times (\int_0^T f(s, u^{k-1}(\varphi, \varepsilon) \mu^{k-1}(\varphi_s^{k-1}, \varepsilon)) ds) + c(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, \varepsilon) - c(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^{k-1}) ds, \varepsilon). \end{aligned} \quad (23)$$

З співвідношення (22) випливає, що $y = \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$ є інваріантним тором системи

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv a(\varphi, 0, 0) + (a(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s) ds, \varepsilon) - a(\varphi, 0, 0)),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -(b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, 0, 0, 0) +$$
(24)

$$b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, u^k(\varphi, \varepsilon), \int_0^T f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) ds, \varepsilon) - b(\varphi, \int_0^T f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) ds, 0, 0, 0))y + c(\varphi, \varepsilon)$$

В силу того, що система (24) має вигляд системи (12), то $y = \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)$ можна записати через функцію Гріна задачі про інваріантні тори системи (24) у вигляді

$$y = \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0^k(\tau, \varphi) c_k(\varphi_\tau(\varphi), \varepsilon) d\tau,$$

причому для $\varepsilon \leq \varepsilon^0$, в силу нерівності (9), вірною є оцінка

$$|\omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)|_0 \leq \frac{2K}{\alpha} |c_k(\varphi, \varepsilon)|_0.$$

Враховуючи вигляд функції $c_k(\varphi, \varepsilon)$ визначений рівністю (23) маємо оцінку

$$|\omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)|_0 \leq \frac{2K}{\alpha} \{ l|u^k|_1 |a|_1 |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + l|c|_1 |f|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds + (l|b|_1 |f|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds +$$

$$+ l|b|_1 |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + l^2 |b|_1 |f|_1 (2T |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + |u^k|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds) \cdot |u^k(\varphi, \varepsilon)|_0 +$$

$$+ (l|b|_1 |f|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds + l|b|_1 |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + l^2 |b|_1 |f|_1 (2T |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + |u^k|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds)) \times$$

$$\times (2l|f|_1 |u^k|_0 + PT) + (2lT|f|_1 |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 + l|f|_1 |u^k|_1 \int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi_s^{k-1}\| ds) \times$$
(25)

$$\times (l|b|_1 \int_0^T \|f_1(s, \varphi, \varphi_s^k)\| ds + l|b|_1 |u^k|_0 + l|b|_1 \cdot \int_0^T \|f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon))\| ds + \|b_1(\varphi, 0, 0, 0, \varepsilon)\|) \}$$

Знайдемо наступні оцінки

$$\int_0^T \|f_1(s, \varphi, \varphi_s^k)\| ds \leq \int_0^T (\|f_1(s, \varphi, \varphi_s^k) - f_1(s, \varphi, \varphi)\| + \|f_1(s, \varphi, \varphi)\|) ds \leq |f|_1 (\int_0^T \|\varphi_s^k - \varphi\| ds +$$

$$+ T), \int_0^T \|f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon))\| ds \leq \int_0^T (\|f(s, u^k(\varphi, \varepsilon), u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) - f(s, 0, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon))\| +$$
(26)

$$+ \|f(s, 0, u^k(\varphi_s^k, \varepsilon)) - f(s, 0, 0)\| + \|f(s, 0, 0)\|) ds \leq 2l|f|_1 |u^k|_0 T + PT$$

Підставляючи (26) в (25) і використовуюючи лему 2 одержимо

$$|\omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon)|_0 \leq \frac{2K}{\alpha} |\omega^k(\varphi, \varepsilon)|_0 \left\{ dl|a|_1 + \frac{l^2 |c|_1 |f|_1}{1+ld} \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T \right) + \frac{l^2 |b|_1 |f|_1}{1+ld} \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T \right) +$$

$$+ l|b|_1 + 2TL^2 |b|_1 |f|_1 + \frac{dl^3 |b|_1 |f|_1}{1+ld} \cdot \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T \right) + (2l|f|_1 d + PT) \cdot \left(\frac{l^2 |b|_1 |f|_1}{1+ld} \cdot \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -T) + l|b_{11}| + 2TL^2|b_{11}| |f|_1 + \frac{dl^3|b_{11}| |f|_1}{1+ld} \cdot \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T \right) + \left(2lT|f|_1 + \frac{l^2|f|_1}{1+ld} \cdot \left(\frac{1}{k_1} (e^{k_1 T} - 1) - T \right) \right) \times \\
 & \times \left(\frac{l|b_{11}| |f|_1}{k_1} \cdot (e^{k_1 T} - 1) + l|b_{11}| d + l|b_{11}| (2l|f|_1 dT + PT) + |b_{11}| \right) \Bigg\} \quad (27)
 \end{aligned}$$

Враховуючи (10) з нерівності (27) знаходимо

$$\left| \omega^{k+1}(\varphi, \varepsilon) \right|_0 \leq \rho \left| \omega^k(\varphi, \varepsilon) \right|_0 \leq \rho^{k-1} \left| u^1(\varphi, \varepsilon) \right|_0,$$

де ρ — додатня константа, менша одиниці, при малих ε . Остання нерівність доводить збіжність послідовності інваріантних торів (3) в просторі $C^0(\mathfrak{Z}_m)$ і неперервність граничної функції по ε в точці $\varepsilon = 0$.

Поклавши $\lim_{k \rightarrow \infty} u^k(\varphi, \varepsilon) = u(\varphi, \varepsilon)$ і використовуючи лему Арцела методом з [1] можна довести $u(\varphi, \varepsilon) \in C^{r-1}(\mathfrak{Z}_m)$. З леми 1 [7] і збіжності послідовності $u^k(\varphi, \varepsilon)$ в $C^{r-1}(\mathfrak{Z}_m)$ випливає наступна теорема.

Теорема 2. Нехай функції $a(\varphi, y, \varepsilon), b(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon), b_1(\varphi, \psi, y, z, \varepsilon) \in C^r(D)$ і виконуються нерівності (10), а також для достаньо малих по нормі в $C^r(\mathfrak{Z}_m \times \mathfrak{Z}_m)$ функцій $a_1(\varphi), b_1^0(\varphi, \psi), c_0(\varphi, \psi)$ система рівнянь (7) має функцію Гріна $G_0(\tau, \varphi)$ задачі об інваріантних торах, яка задовольняє нерівність (8). Тоді можна вказати таке $0 < \varepsilon^0 \leq \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$ система рівнянь (1) має інваріантний тор $\mathfrak{Z}(\varepsilon): y = u(\varphi, \varepsilon), u(\varphi, \varepsilon) \in C^{r-1}(\mathfrak{Z}_m)$, для якого $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| u(\varphi, \varepsilon) \right|_{r-1} = 0$.

Таким чином, вказані умови існування інваріантних тороїдальних множин системи інтегро- диференціальних рівнянь і пропонується алгоритм їх побудови.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. - М.: Наука, 1987. - 302 с.
2. Самойленко А.М. О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. - 1994. - 46, №12. -С. 1665 - 1699.
3. Самойленко А.М. К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе // Укр. мат. журн. - 2001. - 53, №4. - С. 513 - 521.
4. Самойленко А.М. Динамические системы в $\mathfrak{Z}_m \times E^n$ // Укр. мат. журн. - 1991. - 43, №10. - С. 1283 - 1297.
5. Мартынюк Д.И., Самойленко А.М. Существование инвариантных многообразий систем с запаздыванием // Укр. мат. журн. - 1974. - 26, №5. - С. 611 - 620.
6. Цидыло К.В. Колебания нелинейных систем с запаздыванием: Автореф. дис. ... кан. фіз. - мат. наук. - Київ, 1973. - 14 с.
7. Самойленко А.М. О сохранении инвариантного тора при возмущении. Изв. АН СССР. сер. матем., т. 34, №6, 1970. - С. 1219 - 1240.
8. Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1976. - 151 с.

УДК 532.59

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ КОРИСНОСТІ ВІД ЗАТРАТ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Г.А. Кушнір, В.А. Кушнір

У статті розглядаються моделі підтримки прийняття рішень у вигляді нелінійних задач програмування.

In the article the support models of taking decisions in the kind of non-linear programming problems are considered.

Багато економічних проблем вимагає створення моделей, які визначали б ефективність затрат. Досить часто такі моделі будуються на основі моделі задач математичного програмування, частковими випадками якого є лінійне, квадратичне, випукле, цілочисельне програмування. У самому загальному випадку задача математичного програмування має вигляд:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

$$G_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq r_i, \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, i=1,2,\dots, k, \quad (3)$$

де (1) – цільова функція (функція корисності), (2) і (3) – обмеження у вигляді нерівностей. Величиною цільової функції може бути величина різної природи: кошти, якість життя, якість праці, моральне задоволення тощо. Розв'язком задачі математичного програмування є вектор (x_1, x_2, \dots, x_n) , числові координати якого дають оптимальне значення цільової функції.

Для здійснення певного проекту, оптимальний розрахунок якого ведеться за моделлю задачі математичного програмування (1) – (3), потрібні відповідні затрати, обчислення котрих відбувається за визначеною формулою:

$$y = s(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4)$$

Такими затратами можуть бути кошти, матеріали, час, людські затрати тощо. Зазвичай на затрати у накладаються певні обмеження b . Тоді до задачі математичного програмування (1) – (3) добавиться ще одна нерівність

$$s(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b. \quad (5)$$

Модель (1) – (3), (5) по суті буде оптимальною моделлю розподілу затрат b . Якщо затрати можуть змінюватися в межах від 0 до b , то, надаючи дискретних значень b_i з цього проміжку і кожного разу розв'язуючи відповідну задачу математичного програмування (1) – (3) з обмеженням

$$s(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, i=1,2,\dots, n, \quad (6)$$

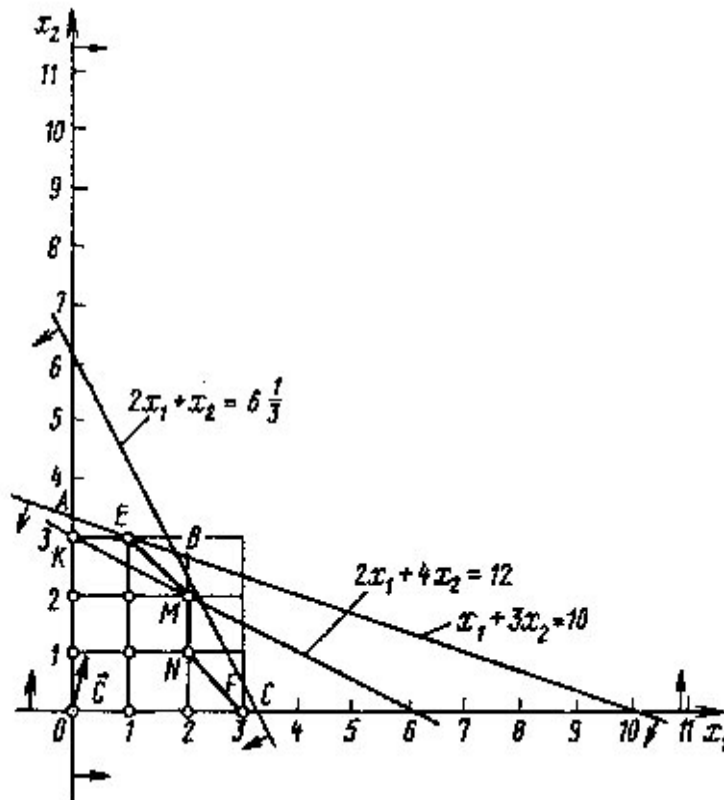
отримаємо функціональну залежність у вигляді таблиці між затратами b та корисністю Z .

Як уже відзначалося математичною моделлю може виступати модель задачі цілочисельного програмування, яка формулюється так:

знайти вектор (x_1, x_2, \dots, x_n) що мінімізує цільову функцію

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (6)$$

і задовольняє систему обмежень



Мал. 1. Многокутник рішень ОКЕМНF.

Приклад. $z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$ (цільова функція)

при обмеженнях

$$0 \leq x_1 \leq 5; \quad 0 \leq x_2 \leq 10;$$

$$x_1 + x_2 = c;$$

$$0 \leq c \leq 20;$$

x_1, x_2 – цілі числа.

Затрати c можуть змінюватися від 0 до 20. Змінюючи c в цих межах з певним кроком h , одержимо функціональну залежність значення цільової функції від затрат c_i . Дана модель реалізується за допомогою інформаційної Еxсел-технології, що й дозволяє побудувати у програмованому режимі функціональну залежність між можливими затратами і корисністю Z у табличному вигляді [1]. Зауважимо, що на кожному кроці здійснюється оптимальний розподіл затрат c_i .

У таблиці 1 відображена математична модель у Еxсел-технології [1;2] та розв’язана наведена вище задача цілочисельного програмування.

Таблиця 1

	x1	x2			
значення	0	1			
НГ	0	0			
ВГ	5	10			
коефіцієнти	1	1	1		
	Обмеження				
	1	1	0	дор	1

Таблиця 2

значення			якість
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	1	2
3	2	1	3
4	2	2	4
5	3	2	5
6	3	3	6
7	4	3	7
8	4	4	8
9	5	4	9
10	5	5	10
11	5	6	11
12	5	7	12
13	5	8	13
14	5	9	14
15	5	10	15
16	5	10	15
17	5	10	15
18	5	10	15
19	5	10	15
20	5	10	15

У таблиці 2 показано динаміку змін оптимального розподілу затрат та залежність цільової функції від затрат. Оптимізація задачі цілочисельного програмування відбувається тільки у послідовному використанні x_1, x_2 , що впливає з таблиці 2. Можна побудувати у середовищі Excel графік функції корисності (затрати) за точками з таблиці 2 (мал. 2).

Приклад. $z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

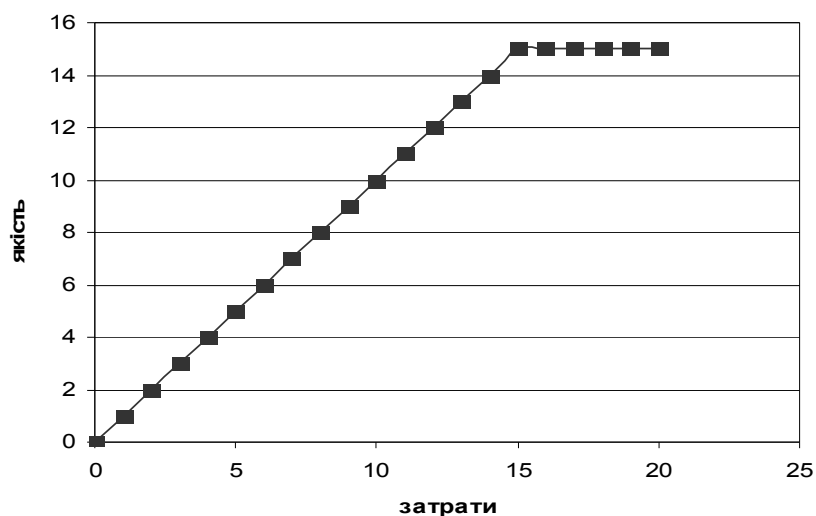
При обмеженнях

$$0 \leq x_1 \leq 5; 0 \leq x_2 \leq 9;$$

$$2x_1 + x_2 = c;$$

$$0 \leq c \leq 20;$$

x_1, x_2, x_3 - цілі числа.



Мал. 2.

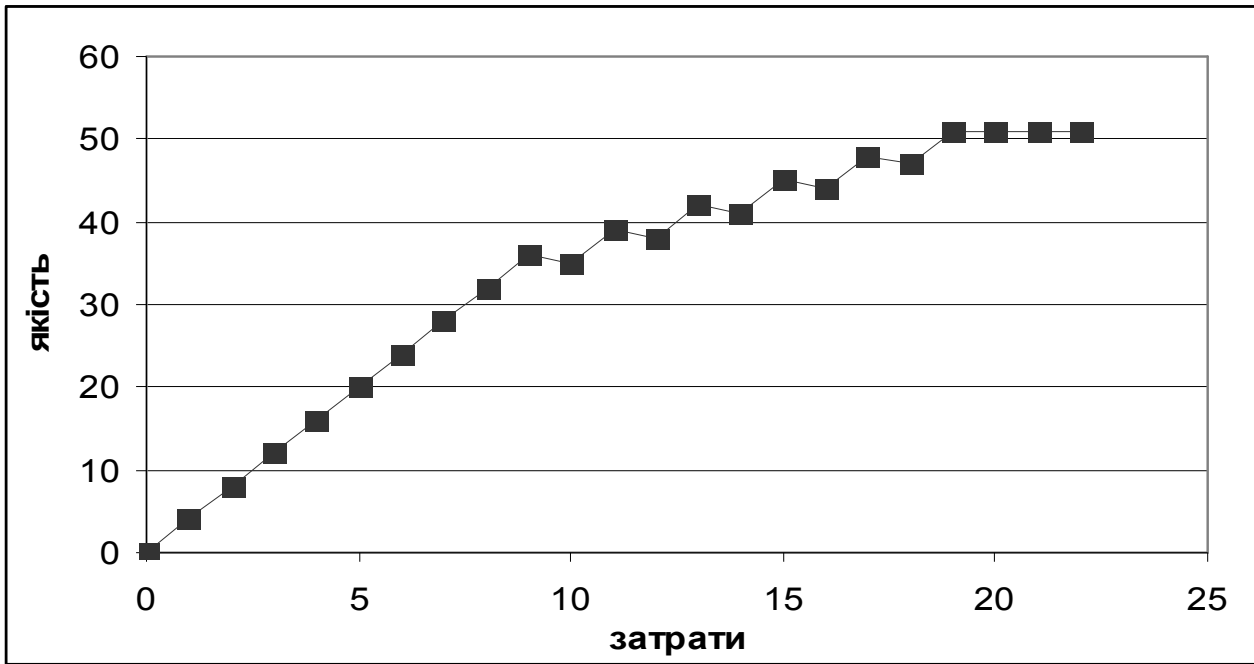
У таблиці 3 відображено постановка задачі в Excel-технології. Таблиця 4 відображає залежність корисності від затрат, а на мал. 3 зображена відповідна геометрична ілюстрація.

Таблиця 3

	x1	x2			
значення	0	0			
НГ	0	0			
ВГ	5	9			
коефіцієнти	3	4	0		
	Обмеження				
	2	1	0	дор	1

Таблиця 4

затрати			якість
0	0	0	0
1	0	1	4
2	0	2	8
3	0	3	12
4	0	4	16
5	0	5	20
6	0	6	24
7	0	7	28
8	0	8	32
9	0	9	36
10	1	8	35
11	1	9	39
12	2	8	38
13	2	9	42
14	3	8	41
15	3	9	45
16	4	8	44
17	4	9	48
18	5	8	47
19	5	9	51
20	5	9	51
21	5	9	51
22	5	9	51



мал. 3.

На мал. 3 зображений графік залежності корисності від затрат.

Приклад. $z = 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \rightarrow \max$

При обмеженнях

$$0 \leq x_1 \leq 5; 0 \leq x_2 \leq 4; 0 \leq x_3 \leq 4;$$

$$x_1 + 10x_2 + 11x_3 = c;$$

$$0 \leq c \leq 94;$$

x_1, x_2, x_3 - цілі числа.

У таблиці 5 відображено постановку задачі оптимізації в Excel-технології. Таблиця 6 відображає процес реалізації математичної моделі для кожного c_i , а мал. 4 відповідну графічну ілюстрацію.

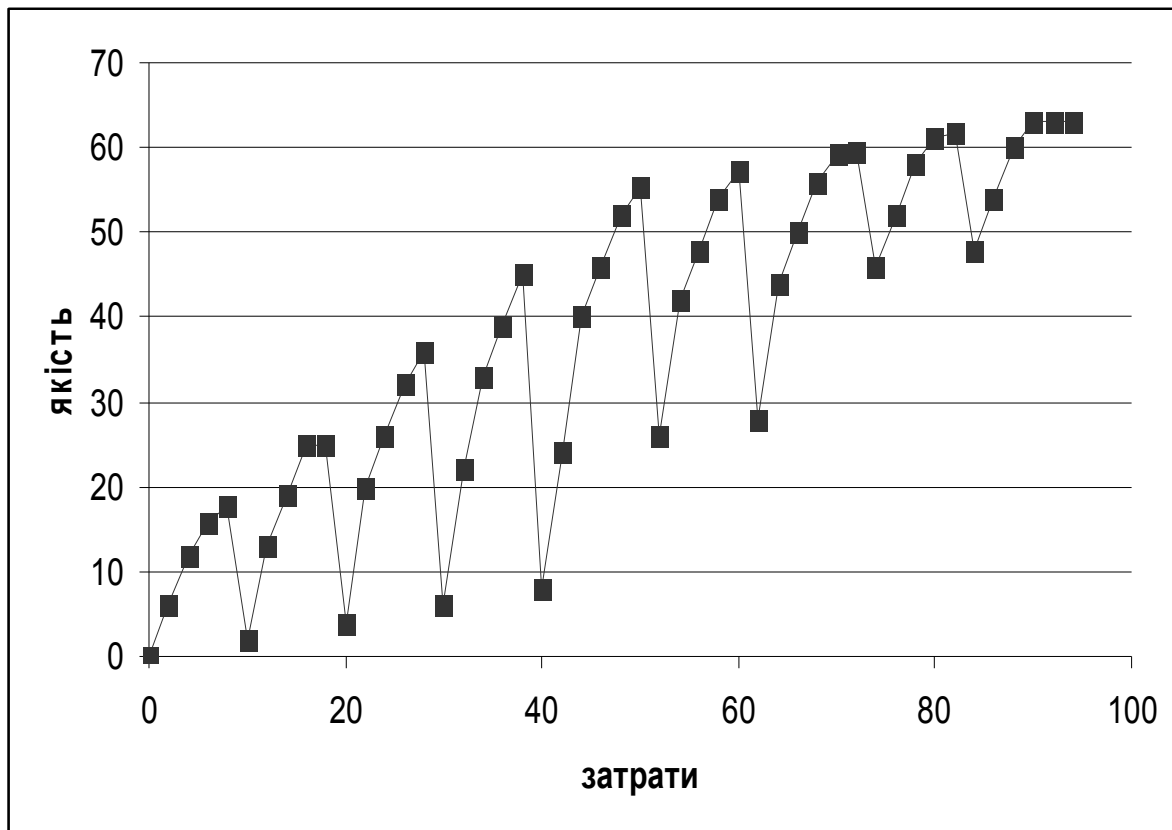
Таблиця 5

	x1	x2	x3	
значення	5	0	1	
НГ	0	0	0	
ВГ	5	4	4	
коефіцієнти	3	2	10	25

	обмеження		значення		
1	10	11	16	дорівнює	16

Таблиця 6

затрати				якість
0	0	0	0	0
2	2	0	0	6
4	4	0	0	12
6	5	0	0	16
8	5	0	0	18
10	0	1	0	2
12	1	0	1	13
14	3	0	1	19
16	5	0	1	25
18	5	0	1	25
20	0	2	0	4
22	0	0	2	20
24	2	0	2	26
26	4	0	2	32
28	5	0	2	36
30	0	3	0	6
32	0	1	2	22
34	1	0	3	33
36	3	0	3	39
38	5	0	3	45
40	0	4	0	8
42	0	2	2	24
44	0	0	4	40
46	2	0	4	46
48	4	0	4	52
50	5	0	4	55
52	0	3	2	26
54	0	1	4	42
56	2	1	4	48
58	4	1	4	54
60	5	1	4	57
62	0	4	2	28
64	0	2	4	44
66	2	2	4	50
68	4	2	4	56
70	5	2	4	59
72	5	2	4	60
74	0	3	4	46
76	2	3	4	52
78	4	3	4	58
80	5	3	4	61
82	5	3	4	62
84	0	4	4	48
86	2	4	4	54
88	4	4	4	60
90	5	4	4	63
92	5	4	4	63
94	5	4	4	63



Мал. 4.

Побудова залежності значення цільової функції від затрат допоможе прийняти рішення про виділення ресурсів для реалізації відповідного проекту. Таке рішення приймає особа, що приймає рішення (ОПР). Експериментальне дослідження за допомогою Excel-технології [2] виду залежності корисності від затрат висвітлює особливості такого процесу, а саме: зі зміною затрат с змінюється тільки одна змінна із x_1, x_2, \dots, x_n від мінімального її значення до верхнього допустимого значення, а потім змінюється інша і т.д. Особливістю залежності корисності від затрат є те, що така функціональна залежність має тенденцію до зменшення швидкості зростання значень функції цінності при зростанні затрат.

По суті нами розроблена технологія дослідження залежності корисності від затрат з використанням моделей математичного програмування [2], зокрема – цілочисельного, за допомогою комп'ютерного експерименту.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Кушнір Г.А., Кушнір В.А. Визначення виду функціональної залежності корисності від затрат на певні проекти шляхом машинного експерименту //Наукові записки. – Випуск 66. – Серія: Математичні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2007. – С. 53 – 58.
2. Мур Д., Уэдерфорд Л. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. – М.: Изд. Дом Вильямс, 2004. – 1024 с.

УДК 519.53 + 517.987

ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЕКТОРНЫХ МЕР

В.А. Романов

Доведено, що для векторної міри простори напрямів варіаційної, напівваріаційної та поточної неперервності є повними відносно деяких метрик, які породжуються мірою.

It is proved that for a vector measure the spaces of its directions of variational, semivariational and pointness continuity are complete with respect to some metrics that generated by the measure .

1. Введение. В публикации [1] исследовано понятие направления непрерывности скалярной меры, в [2] – [5] получены его применения к пределам мер и линейных операторов. В связи с развитием теории векторных мер и их пределов [6] – [8] представляет интерес исследование соответствующих пространств непрерывности.

2. Постановка задачи. Пусть X - сепарабельное гильбертово пространство, d - метрика, порождающая его топологию. Под векторной мерой в пространстве X понимаем сигма-аддитивную функцию множества конечной полной вариации, которая определена на борелевских подмножествах пространства X и принимает значения в некотором банаховом пространстве.

Определение 1. *Сдвигом* векторной меры Φ на вектор x пространства X называется векторная мера $\Phi[x]$, значение которой на каждом борелевском множестве B задается формулой

$$\Phi[x](B) = \Phi(B + x).$$

Определение 2. Векторная мера Φ называется *поточечно непрерывной* по направлению x , если при сдвиге меры на вектор sx и стремлении коэффициента s к нулю ее приращение имеет нулевой предел в смысле сходимости на системе измеримых множеств. Если же указанное приращение имеет нулевой предел в смысле полувариационной или вариационной сходимости, то мера называется *полувариационно* и соответственно *вариационно непрерывной*.

Обозначим подпространства пространства X всех направлений вариационной, полувариационной и поточечной непрерывности данной векторной меры Φ соответственно $X(1)$, $X(2)$ и $X(3)$.

На первом из этих подпространств зададим метрику $d(1)$ формулой

$$d(1)(x, y) = d(x, y) + \sup \text{Var}(\Phi[cy] - \Phi[cx]),$$

где верхняя грань берётся по всем скалярам c из отрезка $[-1; 1]$, а Var означает полную вариацию.

На втором из указанных подпространств зададим метрику $d(2)$ формулой

$$d(2)(x, y) = d(x, y) + \sup \text{Semivar}(\Phi[cy] - \Phi[cx]),$$

где Semivar означает полную полувариацию.

На третьем из рассматриваемых подпространств зададим метрику $d(3)$ формулой

$$d(3)(x, y) = d(x, y) + \sup (v(\Phi)[cy] - v(\Phi)[cx]),$$

где $v(\Phi)$ означает вариацию векторной меры Φ .

Цель статьи состоит в доказательстве полноты указанных подпространств при наделении их указанными метриками.

3. Результаты работы.

Теорема 1. Пусть Φ - векторная мера в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X . Тогда подпространство $X(1)$ всех её направлений вариационной непрерывности полно относительно метрики $d(1)$.

Доказательство. Пусть $x(n)$ - фундаментальная относительно метрики $d(1)$ последовательность векторов подпространства $X(1)$. Поскольку исходная метрика d пространства X мажорируется метрикой $d(1)$, то эта последовательность фундаментальна и относительно метрики d , а потому сходится относительно неё к некоторому вектору x .

Пусть $U(k)$ - линейная оболочка первых k векторов ортонормированного базиса пространства X , $P(k)$ - оператор ортогонального проектирования, действующий из X на $U(k)$, $P(k)\Phi$ - соответствующая конечномерная проекция Φ , значение которой на каждом борелевском множестве из $U(k)$ равно значению самой Φ на прообразе (относительно указанного ортопроектора) упомянутого множества.

Поскольку полная вариация векторной меры определяется как верхняя грань по всем системам из конечного числа непересекающихся борелевских множеств сумм норм её значений на этих множествах и поскольку борелевские множества можно аппроксимировать цилиндрическими, то упомянутая полная вариация векторной меры совпадает с верхней гранью полных вариаций её конечномерных проекций.

Учитывая сказанное, а также принимая во внимание способ задания метрики

$d(1)$, получаем, что для расстояния между элементами нашей последовательности справедлива формула

$$d(1)(x(n), x(m)) = d(x(n), x(m)) + \sup_{c \in [-1; 1]} \text{Var}((P(k) \Phi)[c P(k)(x(n)) - (P(k) \Phi)[c P(k)(x(m))]),$$

где верхняя грань берётся по всем числам c из отрезка $[-1; 1]$ и по всем натуральным числам k .

Из фундаментальности нашей последовательности вытекает, что для произвольного положительного ϵ упомянутое расстояние становится меньшим ϵ для достаточно больших номеров n, m .

Следовательно, для таких номеров n, m , для каждого числа c из отрезка $[-1; 1]$ и каждого натурального k станет меньше ϵ и величина

$$d(x(n), x(m)) + \text{Var}((P(k) \Phi)[c P(k)(x(n)) - (P(k) \Phi)[c P(k)(x(m))]).$$

Зафиксируем номер n , а номер m устремим к бесконечности. Тогда последовательность векторов $P(k)(x(m))$ сходится к вектору $P(k)(x)$. Поскольку конечномерная проекция $P(k) \Phi$ непрерывна по направлениям упомянутых векторов, то можно перейти к пределу под знаком полной вариации. Переходя затем к верхней грани по всем числам c из отрезка $[-1; 1]$ и по всем натуральным числам k , получаем, что для достаточно больших номеров n величина

$$d(1)(x(n), x)$$

не превзойдёт числа ϵ .

Следовательно, последовательность $x(n)$ сходится к вектору x не только относительно метрики d , но и относительно метрики $d(1)$.

Кроме того, величина $\text{Var}(\Phi[cx] - \Phi)$ не превосходит суммы величин

$\text{Var}(\Phi[cx] - \Phi[cx(n)])$ и $\text{Var}(\Phi[cx(n)] - \Phi)$, а потому (с учётом принадлежности вектора $x(n)$ подпространству $X(1)$) имеет нулевой предел при стремлении коэффициента c к нулю. Следовательно, вектор x также принадлежит подпространству $X(1)$, чем и завершается доказательство.

Теорема 2. Пусть Φ - векторная мера в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X . Тогда подпространство $X(2)$ всех её направлений полувариационной непрерывности полно относительно метрики $d(2)$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 3. Пусть Φ - векторная мера в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве X . Тогда подпространство X (3) всех её направлений поточечной непрерывности полно относительно метрики d (3).

Доказательство. Поскольку поточечная непрерывность по данному направлению векторной меры Φ равносильна непрерывности по этому же направлению её вариации v (Φ) и поскольку для скалярной меры, которой является v (Φ), поточечная и вариационная непрерывности эквивалентны, то подпространство X (3) можно считать подпространством всех направлений вариационной непрерывности скалярной меры v (Φ). Далее заметим, что метрика d (3) как раз и отвечает построению метрики d (1), используемой в теореме 1, с помощью вариации v (Φ), а не самой векторной меры Φ . Поэтому остаётся применить теорему 1 к скалярной мере v (Φ), чем и завершается доказательство.

Замечание 1. Построенные метрики порождают в соответствующих подпространствах новые топологии, причём более сильные по сравнению с исходной.

Пример 1. Для центрированной гауссовской меры в сепарабельном гильбертовом пространстве, корреляционный оператор которой совпадает с квадратом оператора Гильберта-Шмидта A , подпространства её направлений непрерывности совпадают с образом оператора A .

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Романов В.А. О непрерывных и вполне разрывных мерах в линейных пространствах // Докл. АН СССР. – 1976. – 227, № 3. – С. 569-570.
2. Романов В.А. Пределы квазиинвариантных мер в гильбертовом пространстве // Укр. Матем. Журн. – 1979. – 31, № 2. – С. 211-214.
3. Романов В.А. Пределы дифференцируемых мер в гильбертовом пространстве // Там же. – 1981. – 33, № 2. – С. 215-219.
4. Романов В.А. Предельные переходы с мерами в гильбертовом пространстве относительно различных видов сходимости // Там же. – 1984. – 36, № 1. – С. 69-73.
5. Романов В.А. Интегральные операторы, порождаемые H -непрерывными мерами // Там же. – 1989. – 41, № 6. – С. 769-773.
6. Романов В.А. Пределы аналитических векторных мер // Там же. – 1992. – 44, № 8. – С. 1133-1135.
7. Романов В.А. Векторные меры различных классов гладкости и их пределы // Там же. – 1995. – 47, № 4. – С. 512-516.
8. Романов В.А. Слабые базисы векторных мер // Там же. – 2007. – 59, № 10. – С. 1437-1441.

УДК 517.9

СУЧАСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

З.Ю. Філер, О.І. Музиченко

Рассмотрены колебания консервативной системы. Предложен метод численного отыскания периода колебаний. Исследуются также колебания в нелинейных системах, рассматривается проблема центра-фокуса, получено численное решение дифференциальных уравнений и построены фазовые траектории. Рассмотрено уравнение Ван дер Поля и методы его исследования.

The vibrations of the conservative system are considered. The method of the numeral searching of period of vibrations is offered. Vibrations are also probed in the nonlinear systems, the problem of center-focus is examined, got numeral decision of differential equalizations and phase trajectories are built. Equalization of Van der Paul and methods of his research is considered.

Вступ. При малих деформаціях (переміщеннях, струмах) часто можна обмежитись розгляданням лінійних членів (за законом Гука чи Ома); тоді можна отримати розв'язок в аналітичній формі. Інколи цього достатньо для якісних висновків про поведінку системи, що вивчається. Але наявність нелінійних членів може приводити до нових *якісних* змін у поведінці системи. Яскравим прикладом цього є маятник. Навіть в ідеалізованій теорії без врахування сил опору, але з врахуванням нелінійності, отримуємо незатухаючі коливання, період яких залежить від амплітуди, тобто від початкового запасу енергії. При достатньо великих значеннях енергії замість коливань маятника отримуємо його обертання з періодично змінною кутовою швидкістю.

Для лінійної системи $\dot{x} = ax + by, \dot{y} = cx + ey$ маємо той чи інший тип особливої точки $O(0;0)$ — вузол, сідло чи центр [8]. Для *центру* повинні виконуватися достатньо жорсткі умови $a+e=0, ae > bc$. При незначних відхиленнях від першої рівності, центр перетворюється у фокус, тобто *якісно* змінюється характер розв'язку: від незатухаючих коливань ми отримуємо наростаючі або затухаючі коливання. Уточнення значень a і e не врятовують ситуацію. Тут нуль у рівності $a+e=0$ повинен бути *цілим* числом, тобто a і e повинні відрізнятися тільки знаком. Для нелінійної системи $\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$ проблема центру-фокусу ще ускладнюється. Аналогічні складнощі виникають при вивченні одного рівняння другого порядку з членом $\dot{x} \cdot h(x, y)$. При зміні знаку функції $h(x, y)$ цей член відіграє роль або генератора, або опору нелінійних коливань.

Такі проблеми вивчав А. Пуанкаре, присвятивши їм монографію [8]. Розглядувані ним приклади підібрані так, щоб можна було здійснити вірні якісні висновки про поведінку інтегральних кривих. Відсутність в той час

потужної обчислювальної техніки не дозволило йому розробити ефективні алгоритми вивчення таких систем. Зокрема, він розглядає рівняння

$$\frac{dx}{x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1)} = \frac{dy}{y(x^2 + y^2 - 1) + x(x^2 + y^2 + 1)} \quad (1)$$

Очевидно, що наявність групи $(x^2 + y^2 - 1)$ різко спрощує рівняння, зводячи його до $\frac{dx}{-2xy} = \frac{dy}{2xy}$ при $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Якщо б коефіцієнти при x^2 та y^2 були *різні* зліва і справа, то отримати навіть якісну інформацію про розв'язок було б складніше. Тут точка O є особливою, бо в ній обидва знаменники перетворюються в нуль. Якщо не вдається провести хоча б наближено спрощення системи й встановити поведінку розв'язку в околі особливої точки, нічого не залишається, крім використання чисельних та якісних методів, наприклад, методу ізоклін.

Траєкторія 1 на рис. 1 відповідає малим значенням E енергії математичного маятника; 2 — сепаратрисі при $E=2$. Траєкторія 3 відповідає не коливанням, а нерівномірному обертанню маятника. При малих значеннях енергії ($E=0,005$) період коливань наближається до 2π .

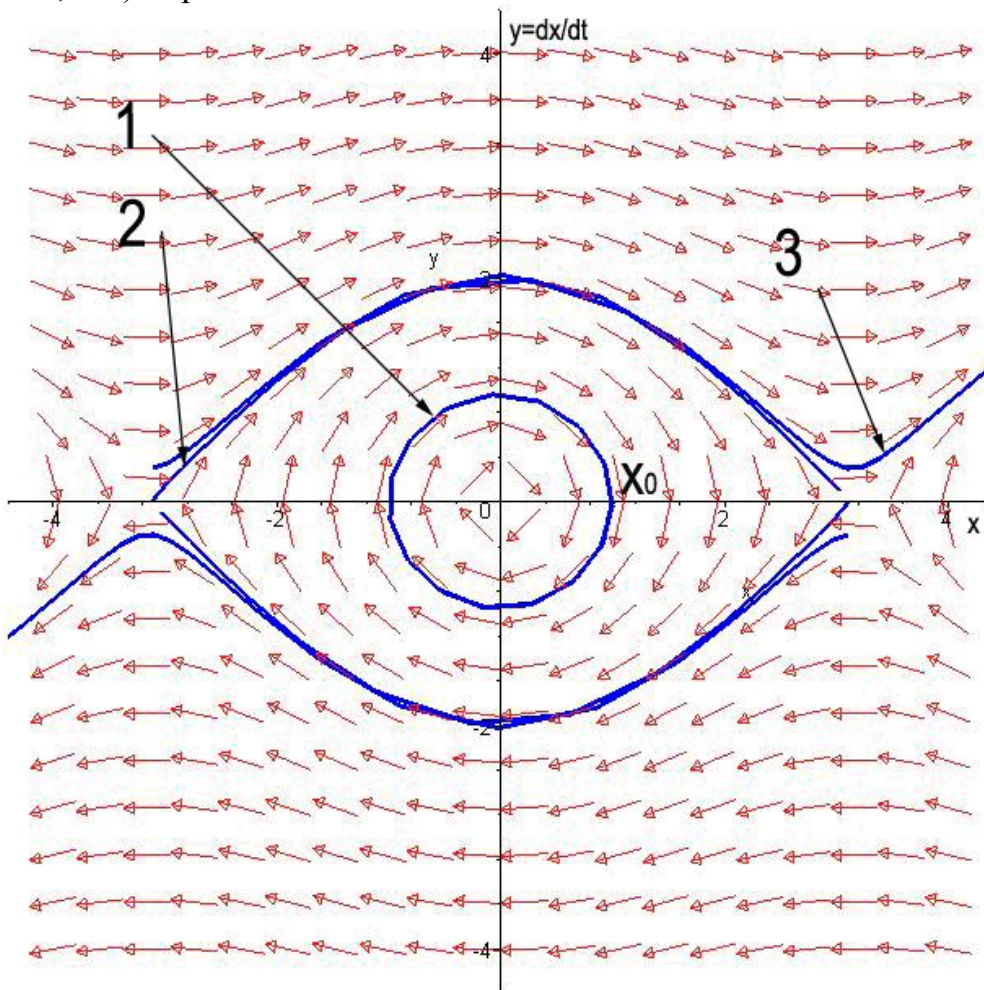


Рис. 1.

1. Консервативна система. Для системи, що описується рівнянням $m\ddot{x} + f(x) = 0$, після множення на \dot{x} та інтегрування, отримуємо закон збереження енергії $0.5m\dot{x}^2 + \Phi(x) = E = const$ звідки маємо $\dot{x}(t) = \pm\sqrt{2/m \cdot (E - \Phi(x))}$.

Тут $\Phi(x) = \int_0^x f(z) dz$ представляє собою потенціальну енергію.

Для знаходження крайніх положень a^- , a^+ тіла, що коливається, при заданій повній енергії $E = 0.5m\dot{x}_0^2 + \Phi(x_0)$, яка визначається початковим станом (x_0, \dot{x}_0) , розв'яжемо рівняння $\Phi(x) = E$. Використовуючи метод дотичних Ньютона, знаходимо a^- , a^+ з допомогою ітерацій: $x_{n+1} = x_n + (E - \Phi(x)) / f(x)$.

Швидше збіжний ітераційний процес отримуємо в результаті заміни цього рівняння задачею Коші $x'(x) = E / f(x)$, $x(z_0) = x_0$, $z_0 = \Phi(x_0) / E$:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n) / f'(x_n) \cdot (1 - \exp(f'(x_n)(\Phi(x_n) - E) / f^2(x_n))).$$

Розв'язок останньої будується з допомогою ітерацій відповідного інтегрального рівняння [10]. Корінь знаходимо як значення $x(0)$. Цей процес поблизу кореня збігається вдвічі швидше, ніж метод Ньютона. Вибираючи початкове наближення x_0 поблизу a^- чи a^+ , знаходимо їх як границі відповідних послідовностей. В якості x_0 можна взяти $\pm A$, де A – амплітуда, що відповідає головному члену Cx^α функції $f(x)$: тоді $\Phi(A) = CA^{\alpha+1} / (\alpha + 1)$, звідки $A = ((\alpha + 1)E / C)^{1/(\alpha+1)}$. В цьому випадку $a^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}^-$, $a_0^- = -A$, $a_0^+ = A$.

Період коливань отримуємо за формулою

$$T = \sqrt{2m} \int_{a^-}^{a^+} \frac{dx}{\sqrt{E - \Phi(x)}}. \quad (2)$$

В роботі [4] для обрахунку невластного інтегралу (2) (підінтегральна функція необмежена в околі кінців відрізка інтегрування), запропонована заміна змінних, після якої інтеграл обчислюється за формулою Сімпсона з допомогою значень підінтегральної функції в 9 точках, включаючи положення рівноваги 0 і крайні точки a^- , a^+ . Навіть для лінійної характеристики $f(x) = Cx$ запропонована формула не є точною, даючи завищене на 0,1% значення періоду. У випадку нелінійної характеристики точність значно нижча.

1.1. Обчислення невластного інтегралу (2). Нами запропоновано інший спосіб обчислення інтеграла (2), що дає точний результат для лінійної характеристики $f(x) = Cx$:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \sqrt{\frac{2}{f'(a^-)}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{f'(a^-)(x-a^-) + f(a^-)}{|f(a^-)|} \right), \\
 I_n &= \sqrt{\frac{2}{f'(a^+)}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{f'(a^+)(x-a^+) + f(a^+)}{|f(a^+)|} \right), \\
 I_k &= \sqrt{\frac{2}{f'(x_{k+1/2})}} \arcsin \frac{f'(x_{k+1/2})(x-x_{k+1/2}) + f(x_{k+1/2})}{\sqrt{f^2(x_{k+1/2}) + 2f'(x_{k+1/2})(E-\Phi(x_{k+1/2}))}} \Bigg|_{x_k}^{x_{k+1}}, \\
 T &= \sqrt{2m} \left(I_0 + I_n + \sum_{k=1}^{n-1} I_k \right),
 \end{aligned} \tag{3}$$

подаючи інтеграл у вигляді суми n-1 інтеграла I_k по відрізках $]x_k, x_{k+1}]$ для k від 1 до n-1, і інтегралів I_0 і I_n по відрізках $]a^-, x_1]$ і $]x_n, a^+[$. Особливі точки виділені в першому і останньому відрізках, інші доданки не містять особливих точок і їх можна обчислювати за будь-якими квадратурними формулами.

Через те, що $E - \Phi(x)$ у крайніх точках a^-, a^+ обертається в 0, то використовуючи розвинення в ряд Тейлора в їх околі до $(x - a)^2$ включно, отримаємо

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \sqrt{\frac{2}{f'(a^-)}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{f'(a^-)(x-a^-) + f(a^-)}{|f(a^-)|} \right), \\
 I_n &= \sqrt{\frac{2}{f'(a^+)}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{f'(a^+)(x-a^+) + f(a^+)}{|f(a^+)|} \right).
 \end{aligned} \tag{4}$$

В разі непарності функції $f(x)$ $I_0 = I_n$. Весь інтервал (a^-, a^+) можна пройти однаковими кроками довжиною h , замінюючи в усіх частинних інтегралах вираз $E - \Phi(x)$ за формулою Тейлора в точках $x_{k+1/2}$. Тоді алгоритм спроститься, не втрачаючи точності. Тут k буде змінюватися від 0 до n-1. Інтеграл на проміжку $[x_1; x_n]$ можна знаходити за допомогою класичної формули чисельних квадратур, наприклад, за формулою Сімпсона. Але можна знаходити цей інтеграл і як суму інтегралів по проміжках $[x_k; x_{k+1}]$, кожний з яких знаходиться аналогічно I_0 і I_n , тобто замінюючи $\Phi(x)$ за формулою Тейлора другого степеня в околі точки $x_{k+1/2}$ до $(x - x_{k+1/2})^2$ включно, маємо

$$I_k = \sqrt{\frac{2}{f'(x_{k+1/2})}} \arcsin \frac{f'(x_{k+1/2})(x - x_{k+1/2}) + f(x_{k+1/2})}{\sqrt{f^2(x_{k+1/2}) + 2f'(x_{k+1/2})(E - \Phi(x_{k+1/2}))}} \Big|_{x_k}^{x_{k+1}}. \quad (5)$$

Тоді

$$T = \sqrt{2m} \left(I_0 + I_n + \sum_{k=1}^{n-1} I_k \right). \quad (6)$$

Формула (5) спрощується для рівновіддалених точок x_k і симетричної характеристики $f(x)$. При достатній кількості точок n ділення відрізка $[a^-; a^+]$ можна отримати високу точність обчислень періоду T .

Використовуючи теорему Лагранжа, можна отримати оцінку похибки ΔI_k обчислень інтеграла (5):

$$\Delta I_k \approx -f''(x_{k+1/2}) h^4 \left(E - \Phi(x_{k+1/2}) \right)^{-3/2}, h = x_{k+1} - x_k.$$

Аналогічно знаходимо

$$\Delta I_0 \approx \frac{-f''(a^-) h_0^{5/2} |f(a^-)|^{-3/2}}{30}, \Delta I_n \approx \frac{-f''(a^+) h_n^{5/2} |f(a^+)|^{-3/2}}{30},$$

$$h_0 = x_1 - a^-, h_n = a^+ - x_n.$$

Це дозволяє оцінити похибку обчислень періоду

$$\Delta T = \sqrt{2m} \left(\Delta I_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta I_k + \Delta I_n \right).$$

Величина ΔT може бути взята у ролі поправки – уточнення величини періоду.

Формула (5) точна для кусково-лінійної характеристики $f(x)$, якщо x_k – абсциси її точок "переключення" (зламу). У реальних конструкціях вібротомашин нелінійна пружна характеристика й створюється за допомогою кусково-лінійних пружних елементів.

На основі вказаних залежностей створено програму в математичному пакеті Maple чисельного відшукування періоду коливань консервативної системи при заданих енергії E і пружній характеристиці $f(x)$, яка використовує аналітичні вирази для $\Phi(x)$, $f(x)$, $f'(x)$. Результатом її роботи є амплітуди a^- , a^+ і період коливань T (рис. 2).

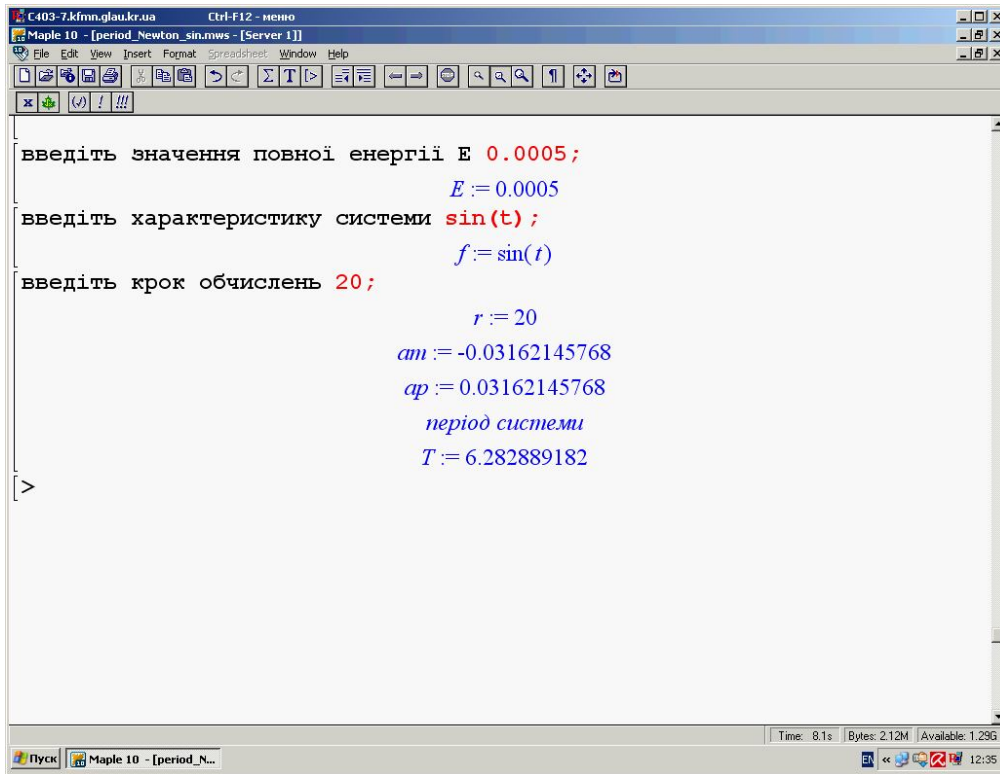


Рис. 2.

2. Коливання нелінійної неконсервативної системи. Вивчення коливань у нелінійних системах триває вже більше 200 років. Праці П. С. Лапласа, А. Пуанкаре, О.М. Ляпунова, М.М. Крилова та М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, інших учнів М.М. Боголюбова та його наукових “онуків”, створили низку якісних та кількісних методів. Більшість з них були розраховані на “ручні” викладки. Але, вже майже 60 років існує ЕОМ, а в останні десятиріччя їх можливості дозволяють додати до потужних якісних методів чисельні розрахунки, які полегшують та прискорюють висновки про поведінку системи не тільки в режимі усталених коливань, а й у перехідних процесах.

2.1. Проблема центру – фокусу. Як ми вже писали, для лінійної системи з двома невідомими $\dot{x} = ax + by, \dot{y} = cx + ey$ характеристичне рівняння (ХР):

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & e-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ є квадратним; для комплексних коренів (при } D = (a-e)^2 + 4bc < 0 \text{ й}$$

$a+e \neq 0$) єдина точка спокою $O(0;0)$ буде *фокусом*. Він буде *стійким* при $a+e < 0$ й *нестійким* при $a+e > 0$. При $a+e = 0$ та $ae - bc < 0$ корені $\lambda_{1,2}$ будуть дійсними різних знаків, а тому т. О буде *сідлом*. При $ae - bc > 0$ корені будуть уявними комплексно спряженими, а точка О буде *центром*. Фазові траєкторії будуть концентричними *еліпсами*. У випадку фокусу вони будуть *спіралями*, які *намотуються* на т. О у стійкому випадку й *змотуються* з неї у нестійкому.

Для нелінійної системи $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$ відповідною системою першого наближення буде система з $a = \frac{\partial P}{\partial x}, b = \frac{\partial P}{\partial y}, c = \frac{\partial Q}{\partial x}, e = \frac{\partial Q}{\partial y}$ в точці О.

Якщо $a+e \neq 0$, то тип особливої точки (фокус при $D < 0$ й сідло чи вузол при $D > 0$) зберігається. Для $D < 0$ й $ae - bc > 0$ відповідна лінійна система має центр, нелінійна система може мати в т. О фокус. Як відрізнити ці типи точок для такої нелінійної системи? У цьому й полягає *проблема центру – фокусу*.

Ця система еквівалентна диференціальному рівнянню (ДР) першого порядку $dx/P(x;y)=dy/Q(x;y)$, для розв'язків якого t відіграє роль параметру. Особлива точка рівняння, коли $P(x;y)=0$, $Q(x;y)=0$, є стаціонарною точкою системи, для якої проблема центру - фокусу зводиться до встановлення типу фазових траєкторій в малому околі точки О.

2.2. Граничні цикли. Диференціальне рівняння [8]:

$$\frac{dx}{x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1)} = \frac{dy}{y(x^2 + y^2 - 1) + x(x^2 + y^2 + 1)} \quad (7)$$

еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = x(r^2 - 1) - y(r^2 + 1), \quad \frac{dy}{dt} = y(r^2 - 1) + x(r^2 + 1), \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (8)$$

2.3. Перехід до нових змінних. Помножимо перше рівняння на x , а друге – на y та додамо їх і отримаємо:

$$x \cdot x' + y \cdot y' = (r^2 - 1)r^2 \Rightarrow (r^2)' = 2r^2(r^2 - 1) \quad (9)$$

Помножимо перше рівняння на y , а друге – на x та віднімемо їх і отримаємо:

$$x \cdot y' - y \cdot x' = (r^2 + 1)r^2 \Rightarrow \arctg(y/x)' = \varphi' = r^2 + 1 \Rightarrow \omega(t) = r^2 + 1 \quad (10)$$

2.3.1. Аналіз рівнянь (9) і (10). При $r > 1$ похідна від $r^2 > 0 \Rightarrow r^2$ зростає; при $0 < r^2 < 1$ похідна від $r^2 < 0 \Rightarrow r^2$ спадає. Точка спокою О ($r=0$) є стійким фокусом; фазові траєкторії – спіралі, які накручуються на точку О. Коло $r=1$ є нестійким **граничним циклом**, фазові траєкторії – спіралі, які змотуються з нього **проти** годинникової стрілки.

Краще уявлення про ситуацію ми отримаємо, зробивши заміну знаку часу t у рівняннях (8). Це дасть зміну знаку в рівняннях (9) і (10), що приведе до протилежних висновків: точка О стане нестійким фокусом, а коло $r=1$ буде стійким граничним циклом. Фазові траєкторії будуть спіралями, які закручуються **за** годинниковою стрілкою, наближаючись до граничного циклу (рис. 3 а і б).

2.3.2. Розв'язання рівнянь (9) і (10). Для спрощення зробимо в рівнянні (9) заміну $a := r^2$. Тоді при $t < 0$ отримаємо рівняння:

$$a' = -2a(a-1) \Rightarrow \frac{da}{a(a-1)} = -2dt \Rightarrow \quad (9a)$$

$$\int_{a_0}^a da \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} \right) = -2t \Rightarrow \ln \frac{a}{|a-1|} = \ln \frac{a_0}{|a_0-1|} + 2t \Rightarrow \frac{a}{|a-1|} = \frac{a_0}{|a_0-1|} e^{2t}.$$

Враховуючи, що коло $r=1$ відділяє спіралі в крузі $r < 1$ від спіралей зовні (при $r > 1$), можемо не використовувати знак модуля.

Звідси отримуємо залежність $a(t) = a_0 / (a_0 - (a_0 - 1)e^{-2t})$. Це дає

$$r(t) = r_0 / (r_0^2 - (r_0^2 - 1)e^{-2t})^{1/2}. \tag{11}$$

Тепер отримаємо $\omega(t)$ з рівняння (10). Враховуючи, що $r(t) \rightarrow 1$, матимемо при великих значеннях t , що $1 < \omega(t) < 2$, тобто період $T \in (\pi; 2\pi)$

Фазові траєкторії дійсно мають вигляд рис. 3а і б.

2.4. Чисельне розв’язання рівнянь (7)

За допомогою програмного забезпечення пакету Maple-9 отримано чисельний розв’язок диференціальних рівнянь (1) й побудовані фазові траєкторії, які зображені на рис. 3а і б, свідчать про вірність уявлень, описаних в пункті 2.2. У часи Пуанкаре здійснити чисельний розв’язок

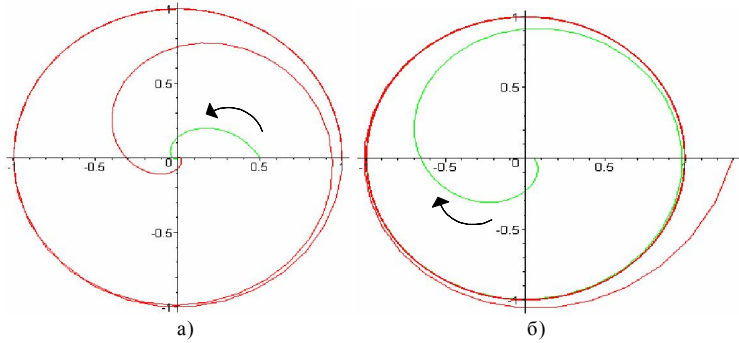


Рис. 2.

нелінійного рівняння можна було тільки вручну з великим кроком. Сьогоднішні ЕОМ дають можливість отримати достатньо точний результат.

На рис. 3а зображені траєкторії рівнянь (8); на рис. 3б — знак t змінено на протилежний.

2.5. Стійкість розв’язків системи (7)

Точки спокою $a=0$ та $a=1$ рівняння (9а) для величини a стійкі чи нестійкі в залежності від знаку похідної $f'(a)$ правої частини цього рівняння:

$f'(a) = -2(2a - 1)$. Графік функції $f'(a)$ зображено на рис. 4. Тоді $f'(0) = +2$ й точка O є нестійкою; $f'(1) = -2$ й граничний цикл $r(t) \equiv 1$ є стійким. Змінна $a=r^2$ відіграє роль *функції Ляпунова*: вона додатна при всіх $r \neq 0$, а її похідна зберігає знак в околі точки спокою. Ці висновки можна зробити, не розв’язуючи систему (8). У роботі Пуанкаре поняття стійкості при $t \rightarrow +\infty$ відсутнє; для нього стійкість означає поведінку при $t \rightarrow \pm\infty$. Можливо, це й завадило йому розробити метод, який зараз називають “метод функцій Ляпунова”.

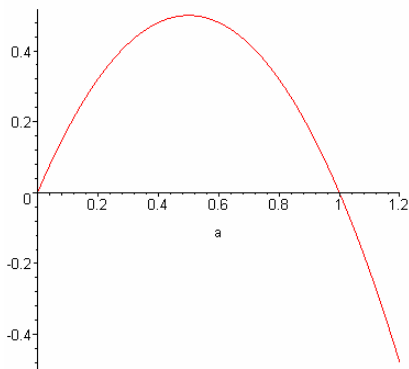


Рис.3

Ця функція в методі Ляпунова взагалі відіграє роль квадрату відстані від точки O . Її зменшення гарантує наближення до точки O — асимптотичну *стійкість*, при зростанні — маємо нестійку точку O .

2.6. Використання комплексної змінної для аналізу системи (7)

Множачи 2-е рівняння на i та додаючи до 1-го, отримаємо рівняння

$$(x + iy)' = (x + iy)((r^2 - 1) + i(r^2 + 1)).$$

Уводячи комплексну функцію $z = x + iy$ та використовуючи «показникову» форму змінної $z = re^{i\varphi}$, уводячи нові дійсні змінні – модуль r та аргумент φ , отримуємо рівняння, скорочуючи на $e^{i\varphi} \neq 0$:

$$r' + ri\varphi' = r((r^2 - 1) + i(r^2 + 1)).$$

Прирівнюючи окремо дійсні та уявні частини зліва й справа, отримуємо рівняння для зміни модуля r та аргументу φ : $r' = r(r^2 - 1)$, $\varphi' = r^2 + 1$.

Ці рівняння співпадають з рівняннями (8) і (9). Інтегруючи перше рівняння, маємо $\frac{r^2}{r^2 - 1} = \frac{r_0^2 e^{2t}}{r_0^2 - 1}$, як це було знайдено раніше. Тепер для частоти $\omega = \varphi'$ отримуємо значення $\omega = r^2 + 1$. Використання знайденої рівності дає

$$r^2 + 1 = 1 / (1 - \frac{r_0^2 e^{2t}}{r_0^2 - 1}) + 1, \text{ звідки}$$

$$\varphi(t) = 2t + 0,5 \ln(1 - \frac{r_0^2 - 1}{r_0^2} e^{-2t}). \quad (12)$$

При великих t маємо $\varphi(t) \approx 2t - \frac{r_0^2 - 1}{2r_0^2} e^{-2t} \approx 2t$. Таким чином, кругова частота «обертання» спіралей буде наближатися до 2, період – до π .

3. Рівняння Ван дер Поля. У 1920 році Б. Ван дер Поль вивів диференціальні рівняння автоколивань в ламповому генераторі [3, С. 93-94]:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \varepsilon \frac{dy}{dt} (1 - y^2). \quad (13)$$

При $\varepsilon > 0$ права частина відіграє роль *генератора* для $|y| < 1$, тому положення спокою є нестійким. Якщо $|y| > 1$, цей член відіграє роль *активного опору* й коливання струму стають обмеженими.

Ідейно математично суть методу Ван дер Поля полягає у використанні методу варіації довільних сталих у виразі загального розв'язку лінійної системи $y'' + y = 0$ (при $\varepsilon = 0$). $y = a \cos t + b \sin t$, де a і b відіграють роль нових *змінних*, що дає для \dot{y} вираз $\dot{y} = -a \sin t + b \cos t$, як при сталих a і b . Тоді

$$\dot{a} \cos t + \dot{b} \sin t = 0. \quad (14)$$

Це дає для другої похідної вираз $\ddot{y} = -a \cos t - b \sin t - \dot{a} \sin t + \dot{b} \cos t$. Підстановка його у рівняння (13) дає, додатково до рівняння (14), ще одне рівняння:

$$-\dot{a} \sin t + \dot{b} \cos t = \varepsilon (-a \sin t + b \cos t) (1 - (a \cos t + b \sin t)^2). \quad (15)$$

Таким чином маємо систему нелінійних ДР (14)–(15), звідки отримуємо *нормальну* систему для a і b :

$$\begin{cases} \dot{a} = -\varepsilon \sin t \cdot f(a, b, t), \\ \dot{b} = \varepsilon \cos t \cdot f(a, b, t). \end{cases} \quad (16)$$

При малих значеннях ε праві частини рівнянь (16) малі, й тому a і b змінюються *повільно*. Тому, можемо вважати, що за один період коливання (довжиною 2π) вони зміняться *мало*, тобто протягом періоду їх вважатимемо сталими.

Це дає *середній* темп їх зміни за допомогою інтегрування за період. Як відомо, середнє значення функції $F(x)$ на проміжку $[a, b]$ дорівнює

$\frac{1}{b-a} \int_b^a F(x) dx$. Це дає для *осередненого* значення амплітуд \bar{a} і \bar{b} рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\bar{a}, \bar{b}, t) \sin t dt = P_1(\bar{a}, \bar{b}), \\ \frac{d\bar{b}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\bar{a}, \bar{b}, t) \cos t dt = P_2(\bar{a}, \bar{b}). \end{aligned} \tag{17}$$

Розв'язок рівняння (13) можна також шукати у вигляді $y = a \cdot \cos \varphi$, $\dot{y} = -a \cdot \sin \varphi$, $\varphi = t + \theta$, що дає для другої похідної $\ddot{y} = -\dot{a} \sin \varphi - a \cos \varphi (1 + \dot{\theta})$. Цей підхід є другим варіантом методу варіацій довільних сталих з наступним усередненням по φ за період $[0; 2\pi]$. Таким чином отримаємо систему нелінійних ДР:

$$\begin{cases} -\dot{a} \sin \varphi - a \dot{\theta} \cos \varphi = -\varepsilon a \sin \varphi (1 - a^2 \cos^2 \varphi), \\ \dot{a} \cos \varphi - a \dot{\theta} \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему відносно похідних \dot{a} , $\dot{\theta}$ маємо наступні рівняння:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon a \sin^2 \varphi (1 - a^2 \cos^2 \varphi), \\ \dot{\theta} = \varepsilon \sin \varphi \cos \varphi (1 - a^2 \cos^2 \varphi). \end{cases}$$

При $0 < \varepsilon \ll 1$, \dot{a} , $\dot{\theta}$ — малі, тому a , θ можна вважати сталими (за один період вони змінюються мало). Тому їх можна *усереднити*:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{a}} &= \frac{\varepsilon \bar{a}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 - \bar{a}^2 \cos^2 \varphi) d\varphi, \\ \dot{\bar{\theta}} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi (1 - \bar{a}^2 \cos^2 \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Звідки маємо вирази для $\dot{\bar{a}}$, $\dot{\bar{\theta}}$:

$$\dot{\bar{\theta}} = 0, \quad \bar{\theta} = const; \quad \dot{\bar{a}} = \frac{\varepsilon \bar{a}}{8} (4 - \bar{a}^2). \tag{18}$$

Аналізуючи вираз (12), отримаємо різні випадки фазових траєкторій.

При $0 < \bar{a}_1 < 2 \Rightarrow \dot{\bar{a}} > 0$, отже \bar{a} — зростає і спіраль розкручується від точки O до граничного циклу (рис. 4а); якщо $\bar{a}_2 > 2 \Rightarrow \dot{\bar{a}} < 0$, тому \bar{a} — спадає і спіраль наближається до граничного циклу ззовні — стійкий граничний цикл (рис. 4а). При $\varepsilon < 0$, маємо нестійкий граничний цикл (рис. 4б), спіралі відходять від нього.

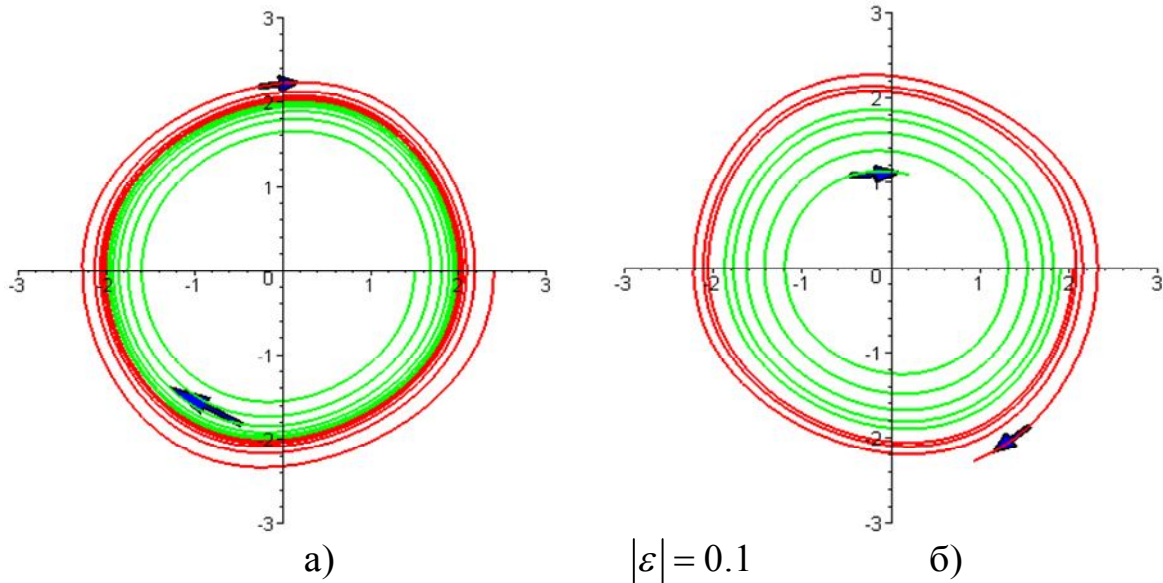
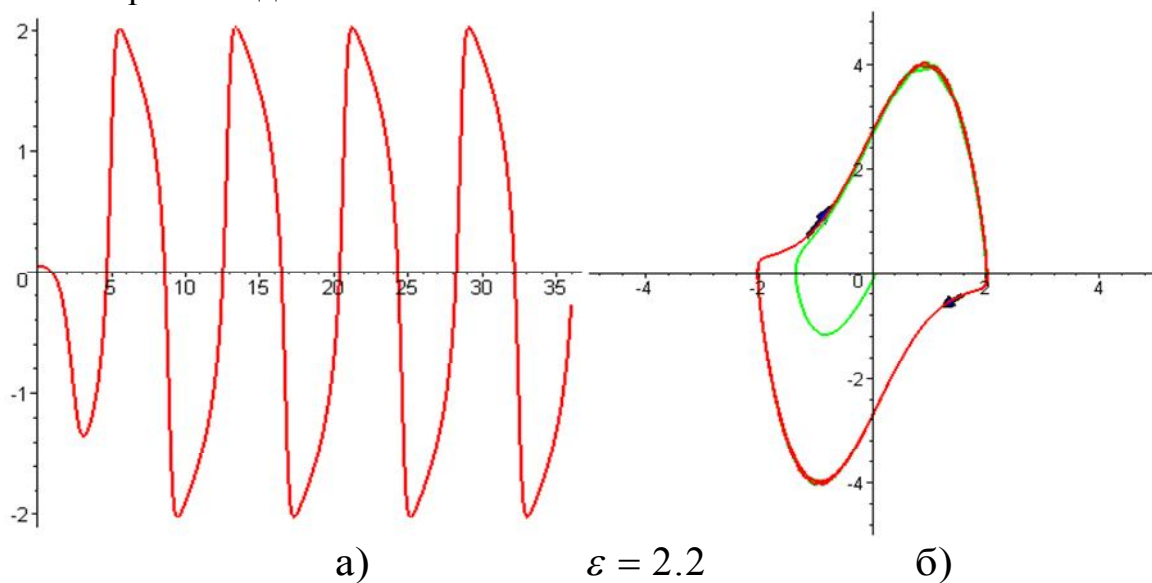


Рис. 4.

$\dot{a} = 0$ буде при $a = 0$ – точка спокою; при $|a| = 2$ маємо стійкий граничний цикл – фазовий портрет (рис. 4б). На рисунку 5а зображено графік функції $y = y(t)$ коливання, які помітно відрізняються від гармонічних, навіть в усталеному режимі (при $|a| = 2$). При малому ε коливання близькі до синусоїдальних, а фазовий портрет в усталеному режимі близький до кола радіуса 2 (рис. 4). При великих ε граничний цикл суттєво відрізняється від кола, але при швидкості $y = 0$ маємо «амплітуду» $a = 2$.

Ван дер Поль зробив аналіз лампового генератора, виходячи з фізичних уявлень. Математичне обґрунтування цього методу дано українськими математиками М.М. Криловим та М.М. Боголюбовим [5]. Вони розробили загальний метод усереднення після переходу за допомогою заміни до автономних рівнянь для повільно змінних величин.



$\varepsilon = 2.2$
Рис. 5.

Як і метод Ван дер Поля, їх метод усереднення дає не тільки *усталений* режим коливань, а й *перехідний* процес, на відміну від методу малого параметру Пуанкаре. В останньому методі розв'язок відшукується у вигляді степеневого ряду по ε з періодичними коефіцієнтами так, щоби не виникали «резонансні» члени. Це дає рівняння типу (11) для сталих амплітуд \bar{a}, \bar{b} . Метод осереднення отримав розвиток в працях Боголюбова М.М. з учнями та науковими «онуками» [2, 8].

З.Ю. Філеру вдалося здійснити синтез методів Пуанкаре та усереднення [11]. Далі цей підхід було реалізовано й для хвильових рівнянь [9].

Висновки

1. Розглянуто коливання консервативної системи. Запропоновано метод чисельного відшукування амплітуд та періоду коливань. Отримано оцінку похибки обчислень.
2. На основі розроблених алгоритмів складено програму з використанням математичного пакету Maple.
3. Розглянуто проблему центра-фокусу. Наведено приклад дослідження нелінійного диференціального рівняння, запропоновані чисельні методи розв'язання рівняння, побудовані відповідні фазові траєкторії.
4. Розглянуто рівняння Ван дер Поля та методи його дослідження: методи Ван дер Поля та усереднення, розроблений М.М. Криловим та М.М. Боголюбовим

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974. — 321 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1963. — 410 с.
3. Бородин А.И., Бугай А.С. Выдающиеся математики: Биографический словарь — справочник. 2-е изд.—К.: Рад. шк., 1987. — 656 с.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика. — М.: Иностран. лит-ра, 1961. — 777 с.
5. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. — К.: Изд-во АН УССР, 1937.— 365 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971. — 432 с.
7. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. — М.: Наука, 1980. — 270 с.
8. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.–Л.: ГИТ–ТЛ, 1947. — 392 с. (С. 109, С.88)
9. Филер З.Е. Метод итерации отыскания периодических решений волновых уравнений// Прикл. мех., 1985, 21, № 12. — С. 119–183.
10. Филер З.Е. δ -метод теории колебаний в численной форме. — Динамика и прочность машин, 1979. вып. 29. — С. 21–24.
11. Филер З.Е. О синтезе методов малого параметра Пуанкаре и Ван дер Поля в нелинейной теории колебаний// Вибротехника. — Каунас: Минтис, 1984, 3(51).— С. 59–62.

УДК 512.552.1

НАПІВДОСКОНАЛІ НАПІВДИСТРИБУТИВНІ КІЛЬЦЯ.**Ю. В. Яременко.**

Розглянуто властивості напівдосконалих напівдистрибутивних кілець. Доведено, що нетерове напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце з ациклічним сагайдаком – бірядне.

There we describe the property of semi-perfect semi-distributive rings. We prove that any noetherian semi-perfect ring of distributive module type with an acyclic quiver is biserial.

На сьогодні роль “елементарних” об’єктів, до яких зводиться вивчення більш складних об’єктів, в багатьох випадках в теорії кілець відіграють дистрибутивні кільця і модулі, хоч вони і самі по собі мають досить цікаву структуру. Вивченню дистрибутивних і напівдистрибутивних кілець та модулів над ними присвячено багато робіт відомих алгебраїстів: Брунгса, Камілло, Колбі, Фуллера, Туганбаєва і ін. Результати досліджень опубліковані в книзі [1].

Одним із прикладів дистрибутивних кілець є комутативна алгебра. Так, дедекіндові кільця (наприклад, кільце цілих чисел або кільце многочленів від однієї змінної над полем) є дистрибутивними кільцями. Як показали Албу і Настасеску [2] модулі Безу над комутативними кільцями будуть дистрибутивними модулями (модулем Безу називається модуль, у якого всі скінченнопороджені підмодулі циклічні). Як показав Йенсен [3] дистрибутивність комутативного кільця рівносильна тому, що всі його локалізації за максимальним ідеалом є ланцюговими кільцями. Дистрибутивним модулям присвячений підрозділ 4.1 книги Кона [4].

Серед робіт про дистрибутивні кільця й модулі в некомутативному випадку можна відмітити роботи Брунгса, Камілло, Менцеля, Стефенсона.

Модуль M називається *дистрибутивним*, якщо для будь-яких його підмодулів K, L, N справедлива рівність

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$$

Цоколем модуля називається сума всіх його мінімальних підмодулів, тобто простих модулів.

Камілло [5] довів, що модуль дистрибутивний тоді і тільки тоді, коли цоколь будь-якого його фактормодуля не містить квадратів:

Теорема 1 [5]. *Модуль дистрибутивний тоді і тільки тоді, коли кожен його фактормодуль містить у своєму цоколі з точністю до ізоморфізму не більше одного примірника кожного простого модуля.*

Зрозуміло, що будь-який підмодуль і будь-який фактормодуль дистрибутивного модуля дистрибутивні.

Пряма сума дистрибутивних модулів називається *напівдистрибутивним модулем*.

Кільце називається *напівдистрибутивним справа (зліва)*, якщо воно є напівдистрибутивним правим (лівим) модулем над собою.

Напівдистрибутивне справа і зліва кільце називається *напівдистрибутивним*.

Кільце A називається *напівдосконалим*, якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R [6].

Ідемпотенти можна піднімати за модулем R , якщо для будь-якого елемента $u \in A$, для якого $u^2 - u \in R$ існує елемент $e^2 = e \in A$ такий, що

$e - u \in R$ (тобто існує ідемпотент в кільці A конгруентний з u за модулем R).

Теорема 2 [7,с.281]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли воно розпадається в пряму суму правих ідеалів, кожен з яких має рівно один максимальний підмодуль.*

Теорема 3 [8]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли його одиниця розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів.*

Нехай $1 = f_1 + \dots + f_s$ - такий розклад одиниці напівдосконалого кільця A в суму попарно ортогональних ідемпотентів, що $f_i A = P_i^{k_i}$ ($i = 1, \dots, s$).

Позначимо

$$A_{ij} = f_i A f_j, \quad (i, j = 1, \dots, s)$$

і розглянемо двосторонній пірсовський розклад кільця A відносно розкладу

$$1 = f_1 + \dots + f_s : \quad A = \bigoplus_{i,j=1}^s A_{ij}. \quad (1)$$

Таким чином кільце A зображується у вигляді кільця матриць з елементами A_{ij} із звичайними операціями додавання і множення [9,с.31]:

Кільця A_{ii} ізоморфні кільцям $End_A P_i^{n_i} \cong M_{n_i}(End_A P_i)$, де $End_A P_i = Q_i$ - локальне кільце ($i=1, \dots, s$) ($M_n(B)$ - кільце всіх квадратних матриць порядку n з коефіцієнтами із B).

Через R_i позначимо радикал Джекобсона кільця A_{ii} ($i = 1, \dots, s$). Для радикала R кільця A , представленого у вигляді (1), має місце наступний двосторонній пірсовський розклад:

$$R = \bigoplus_{i,j=1}^s f_i R f_j, \quad (2)$$

де $f_i R f_i = R_i$ і $f_i R f_j = A_{ij}$ ($i \neq j : i, j = 1, \dots, s$)

Таким чином, будь-яке напівдосконале кільце A представляється у вигляді прямої суми правих ідеалів: $A = P_1^{k_1} \oplus \dots \oplus P_s^{k_s}$, де P_1, \dots, P_s - попарно неізоморфні модулі і фактормодулі $P_i / P_i R = U_i$ - прості ($i = 1, \dots, s$).

Модулями P_1, \dots, P_s вичерпуються, з точністю до ізоморфізму, всі нерозкладні проєктивні A -модулі, а модулями U_1, \dots, U_s – всі попарно неізоморфні прості A -модулі ([10], § 1).

Напівдосконале кільце A називається *зведеним*, якщо факторкільце A/R є прямим добутком тіл.

В силу теореми Моріти категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем, натурально еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при розгляді напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями, а це означає, що в розкладі напівдосконалотого кільця A в пряму суму головних A -модулів немає ізоморфних. Отже, кільце A розкладатиметься в пряму суму нерозкладних проєктивних модулів: $A = P_1 \oplus \dots \oplus P_s$.

Простий модуль над зведеним напівдосконалим кільцем не анулюється одним локальним ідемпотентом, тобто має місце

Лема 1. [11,с.47]. *Мають місце рівності $U_i e_j = 0$, $e_j V_i = 0$ при $i \neq j$ і $U_i e_i = U_i$, $e_i V_i = V_i$ ($i, j = 1, \dots, n$).*

Відомий критерій напівдистрибутивності напівдосконалотого кільця, який належить А.А. Туганбаєву [1]:

Теорема 4. *Напівдосконале кільце A напівдистрибутивне справа (зліва) тоді і тільки тоді, коли для будь-яких локальних ідемпотентів e і f кільця A множина eAf є ланцюговим правим fAf -модулем (ланцюговим лівим eAe -модулем).*

Для доведення теореми 4 можна використати наступне твердження (див., наприклад, [12], § 3.7).

Твердження 1. *Нехай A – напівдосконале кільце і $1 = e_1 + \dots + e_n = f_1 + \dots + f_m$ – два розклада одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів. Тоді $m = n$ і існують обернений елемент a і підстановка $i \rightarrow \sigma(i)$ такі, що*

$$e_i = a f_{\sigma(i)} a^{-1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Очевидно, можна вважати кільце A зведеним. Будемо доводити твердження для правого випадку. Нехай $A = P_1 \oplus \dots \oplus P_s$ – розклад кільця A в пряму суму попарно неізоморфних нерозкладних проєктивних A -модулів, $1 = f_1 + \dots + f_s$ – відповідний розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів, $A_{ij} = f_i A f_j$. Покажемо, що якщо кільце A напівдистрибутивне справа, то A_{ij} – ланцюговий правий A_{jj} -модуль.

Дійсно, якщо A_{ij} не є ланцюговим правим A -модулем, то існують підмодулі X_1 і X_2 модуля A_{ij} такі, що знайдуться елементи $x_1 \in X_1$ і $x_2 \in X_2$, причому $x_1 \notin X_2$ і $x_2 \notin X_1$. Покладемо $N = x_1 A_{jj} + x_2 A_{jj}$ і $\tilde{N} = N A$. Якщо N – циклічний A_{jj} -модуль, то у нього рівно один максимальний підмодуль, і або $N = x_1 A_{jj}$, або $N = x_2 A_{jj}$, що суперечить вибору елементів x_1 і x_2 . В силу представлення (2) для радикала R і леми 1 маємо: $\tilde{N} / \tilde{N} R = U_j \oplus U_j$, де $U_j = P_j$

$/ P_j R$. Тому в силу теореми 1 модуль \tilde{N} не дистрибутивний. Отже, A_{ij} – ланцюговий правий A_{jj} -модуль.

Покажемо, що для будь-яких двох локальних ідемпотентів e і f з кільця A множина eAf є ланцюговим правим fAf -модулем. Позначимо $f=f_1$ і $e=e_1$.

Нехай $1=e_1+\dots+e_n=f_1+\dots+f_n$ – два розклади $1 \in A$ в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів. В силу твердження 1 $e_1=af_{\sigma(1)}a^{-1}$. Тоді правий A_{11} -модуль $e_1Af_1=af_{\sigma(1)}a^{-1}Af_1=aA_{\sigma(1)1}$ ізоморфний до правого A_{11} -модуля $A_{\sigma(1)1}$ (ізоморфізм здійснюється множенням зліва на оборотний елемент $a \in A$). Тому eAf – ланцюговий правий fAf -модуль.

Покажемо тепер, що якщо eAf – ланцюговий правий fAf -модуль для будь-яких локальних ідемпотентів e і f кільця A , то кільце A напівдистрибутивне справа.

Будь-який підмодуль M нерозкладного проективного модуля $P=eA$ має вигляд $M=Mf_1 \oplus \dots \oplus Mf_s$, де знак прямої суми означає пряму суму абелевих груп. Покажемо, що в цю ж частину фактормодуля P/M входить, з точністю до ізоморфізму, не більше одного примірника кожного простого модуля. Нехай N – такий підмодуль модуля P , що $N \supset M$ і фактормодуль

N/M простий. За лемою 1 існує єдиний номер i , для якого Nf_i строго містить Mf_i . Це означає, що $N/M \cong U_i$. Якщо $N_1 \supset M$ – інший підмодуль модуля P такий, що $N_1/M \cong U_i$, то N_1f_i строго містить Mf_i і $N_1f_k=Mf_k$ при $k \neq i$. Оскільки eAf_i – ланцюговий правий A_{ii} -модуль, то, очевидно, $N_1f_i=Nf_i$. Тому $N_1=N$ і модуль P дистрибутивний в силу теореми 1. Теорема доведена.

Наслідок 1. Нехай A – напівдосконале кільце, $1=e_1+\dots+e_n$ – розклад $1 \in A$ в суму попарно ортогональних ідемпотентів. Кільце A напівдистрибутивне справа (зліва) тоді і тільки тоді, коли для будь-яких ідемпотентів e_i і e_j ($i \neq j$) з вказаного розкладу кільце $(e_i+e_j)A$ ((e_i+e_j) напівдистрибутивне справа (зліва)).

Наслідок 2. Нехай A – нетерове напівдосконале напівдистрибутивне кільце, $1=e_1+\dots+e_n$ – такий же розклад, як і в попередньому наслідку, $A_{ij}=e_iAe_j$, R_i – радикал Джекобсона кільця A_{ii} . Тоді $R_iA_{ij}=A_{ij}R_j$, ($i, j=1, \dots, n$).

Нагадаємо, що напівмаксимальним кільцем називається напівдосконале напівпервинне нетерове справа кільце A , у якого для будь-якого локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним) [13].

Теорема 5 [13]. Будь-яке напівмаксимальне кільце ізоморфне прямому добутку первинних кілець вигляду

$$I_k = \begin{pmatrix} 0 & \pi^{\alpha_{12}}0 & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}0 \\ \pi^{\alpha_{21}}0 & 0 & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi^{\alpha_{n1}}0 & \pi^{\alpha_{n2}}0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де $n \geq 1$; O – дискретно нормоване кільце з простим елементом π ; α_{ij} – цілі раціональні числа, причому $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k ($\alpha_{ii} = 0$ для будь-якого i). Таке кільце нетерове з двох сторін.

Зауваження. Кільце O вважається вкладеним у його тіло часток D і двосторонній пірсонський розклад (3) означає сукупність усіх тих матриць $(a_{ij}) \in M_n(D)$, у яких $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}} O$.

Теорема 6 [14]. Наступні умови рівносильні для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кільця A :

(а) кільце A – напівдистрибутивне;

(б) кільце A є прямим добутком напівпростого артинового кільця і напівмаксимального кільця.

Теорема 7 [15]. Локальне нетерове справа кільце \mathfrak{A} є ланцюговим тоді і тільки тоді, коли воно є або дискретно нормованим кільцем, або артиновим ланцюговим кільцем (однорядним кільцем Кетте).

Так як згідно [16] спадкове справа напівдосконале напівдистрибутивне справа кільце є нетеровим справа то отримаємо:

Наслідок 3. Спадкове справа локальне кільце є напівдистрибутивним тоді і тільки тоді, коли воно або дискретно нормоване кільце, або тіло.

Відомо, що спадкове кільце є кусковою областю.

Нагадаємо, що напівдосконале кільце A називається кусковою областю, якщо будь-який ненульовий гомоморфізм нерозкладних проєктивних A -модулів є мономорфізмом.

Кускова область A має наступний двосторонній пірсонський розклад [17]:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ 0 & A_2 & \dots & A_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_t \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де A_1, \dots, A_t – первинні кільця і первинний радикал I кільця A має вигляд:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ 0 & 0 & \dots & A_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Тому $\bar{A} = A/I \cong A_1 \times \dots \times A_t$.

Наслідок 4. Кускова область A як абелева група розкладається в пряму суму кільця A_0 , ізоморфного \bar{A} , і первинного радикала I : $A = A_0 \oplus I$.

Твердження 2. Якщо A – спадкове справа напівдосконале напівдистрибутивне кільце, а e – ненульовий ідемпотент кільця A , то кільце eAe також спадкове справа напівдосконале напівдистрибутивне кільце.

Доведення випливає з теореми 4.

Нехай тепер A – спадкове справа кільце. Вияснимо якими є кільця A_1, \dots, A_t . За твердженням 2 це первинні спадкові справа напівдосконалі напівдистрибутивні кільця, які згідно теореми 6 є або простими артиновими кільцями, або первинними спадковими напівмаксимальними кільцями.

Отже, отримали теорему:

Теорема 8. *Всяке спадкове справа напівпервинне напівдосконале напівдистрибутивне кільце є скінченним прямим добутком первинних кілець. Всяке спадкове справа первинне напівдосконале напівдистрибутивне кільце еквівалентне в сенсі Моріти або тілу, або кільцю $H_s(\mathcal{G})$, де \mathcal{G} - дискретно нормоване кільце.*

Позначимо $M_n(R)$ кільце всіх дійсних матриць порядку n .

Матрицю $B \in M_n(R)$ назвемо *перестановочно звідною*, якщо існує перестановочна матриця P така, що $P^T B P = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, де B_1 та B_2 квадратні матриці порядку меншого ніж n . В противному випадку матриця називається *перестановочно незвідною*.

Скінченний орієнтований граф називається *сильнозв'язаним*, якщо є орієнтованим шлях між довільними двома його точками.

Нагадаємо означення сагайдака нетерового справа напівдосконалого кільця.

Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце, R – його радикал Джекобсона, P_1, \dots, P_s – всі попарно неізоморфні проєктивні нерозкладні модулі. Нехай проєктивне накриття $P(P_i R)$ модуля $P_i R$ має вигляд

$$P(P_i R) = \bigoplus_{j=1}^s P_j^{t_{ij}}, \quad (i, j = 1, \dots, s).$$

Співставимо модулям P_1, \dots, P_s вершини (точки) $1, \dots, s$ і з'єднаємо вершину i з вершиною j t_{ij} стрілками. Отриманий граф називається *сагайдаком* нетерового справа напівдосконалого кільця A і позначається $Q(A)$.

Позначимо $[Q]$ матрицю суміжності вершин сагайдака Q .

Твердження 3 [18]. *Сагайдак Q є сильнозв'язаним, тоді і тільки тоді, коли матриця $[Q]$ є перестановочно незвідною.*

Відмітимо, що перенумерація точок сагайдака Q перетворює матрицю $[Q]$ в матрицю $P^T [Q] P$.

Твердження 4 [18]. *Існує перестановочна матриця P така, що*

$$P^T [Q] P = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} & \dots & B_{1t} \\ 0 & B_2 & \dots & B_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_t \end{pmatrix},$$

де матриці B_1, \dots, B_t є перестановочно незвідними.

Сагайдак називається *ациклічним*, якщо він не містить орієнтованих циклів.

Наслідок 5. *Якщо сагайдак нетерового напівдосконалого кільця ациклічний, то кільце має верхній трикутний вигляд, причому по діагоналі стоять тіла.*

Наслідок 6. *Нехай A – нетерове напівдосконале напівдистрибутивне зведене кільце з ациклічним сагайдаком. Тоді існує розклад $1 \in A$ в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів такий, що кільце має вигляд (4), де кільця $A_1, \dots, A_i \in$ тілами, а A_{ij} або нуль, або є одновимірним правим A_j простором і одновимірним лівим A_i простором. Зокрема, якщо кільце A нерозкладне в прямий добуток кілець, то можна вважати всі тіла D_{ii} ($i=1, \dots, n$) ізоморфними одному і тому ж тілу D .*

Напівдосконале кільце A називається кільцем *дистрибутивно модульного типу*, якщо довільний правий скінчено зображуваний A -модуль напівдистрибутивний.

У роботі [19] доведено, що напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце – напівдистрибутивне.

Нерозкладний модуль M називається *бірядним*, якщо він (тобто структура його підмодулів) дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі K_1 і K_2 (можливо й рівні нулю) такі, що $K_1 + K_2 \in M$, або найбільший власний підмодуль в M , а $K_1 \cap K_2 \in$ нуль або найменший ненульовий підмодуль в M .

Напівдосконале кільце A називається *бірядним*, якщо кожний правий і кожний лівий головний A -модуль бірядний.

Нехай число вершин сагайдака $Q(A)$ дорівнює n і це вершини $1, \dots, n$, причому з вершини i у вершину j іде t_{ij} стрілок. Тоді новий сагайдак $RQ(A)$ складається з вершин $1, \dots, n$ та τ_1, \dots, τ_n , де вершини τ_1, \dots, τ_n попарно різні. Сагайдак $RQ(A)$ є дводольним графом (стрілки ідуть тільки з вершин, що лежать у множині $\{1, \dots, n\}$ у вершини, що лежать у множині $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, причому з вершини i у вершину τ_j йде t_{ij} стрілок).

Такий сагайдак $RQ(A)$ будемо називати *подвоєнням сагайдака Q* .

Якщо в сагайдаці $RQ(A)$ опустити напрямок всіх стрілок, то одержимо неорієнтований граф, який позначимо $\overline{RQ(A)}$.

Теорема 9 [19]. Наступні умови рівносильні для напівдосконалого кільця A , квадрат радикала Джекобсона якого дорівнює нулю:

(1) A – кільце *дистрибутивно модульного типу* ;

(2) A – бірядне і $\overline{RQ(A)}$ є незв'язним об'єднанням неорієнтованих ланцюгів.

Нехай A – бірядне кільце. Тоді за теоремою 1 [20] з кожної точки $Q(A)$ виходить не більш двох стрілок і в кожну точку $Q(A)$ входить не більш двох стрілок і в $Q(A)$ немає кратних стрілок.

Довільний скінченний орієнтований граф, що задовольняє цим умовам будемо називати *бірядним*.

Теорема 10 [19]. Наступні умови рівносильні для скінченного орієнтованого графа Q без кратних стрілок:

(1) граф Q – бірядний;

(2) неорієнтований граф \overline{RQ} є незв'язним об'єднанням циклів і ланцюгів.

Теорема 11. Нетерове напівдосконале дистрибутивно модульного типу кільце з ациклічним сагайдаком є бірядним кільцем.

Доведення теореми впливає із наслідка 6 та теорем 9 і 10.

БІБЛОГРАФІЯ

1. Tuganbaev A.A. Semidistributive Modules and Rings // Kluwer Academic Publishers. – 1998.
2. Albu T., Nastasescu C. Modules arithmetiques // Acta math. Acad. sci. hung. – 1974. – V. 25, № 3-4. – P. 299-311.
3. Jensen C.U. A remark on arithmetical rings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1964. – V. 15. – P.951-954.
4. Кон П. Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1975. – 422 с.
5. Camillo V.P. Distributive modules // J.Algebra. – 1975. – V. 36, № 1. – P. 16-25.
6. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.
7. Каш Ф. Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
8. Muller V.J. On semi-perfect rings // Illinois J.Math. – 1970. – V. 14, № 3. – P. 464-467.
9. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. – К.: Вища шк., 1980. – 192 с.
10. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – Т. 99, № 4. – С. 559-581.
11. Кириченко В.В. Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.
12. Ламбек И. Кольца и модули. – М.: Мир, 1971. – 280 с.
13. Завадский А.Г., Кириченко В.В. Модули без кручения над первичными кольцами // Зап. науч. семинара ЛОМИ АН СССР. – 1976. – Т. 57. – С. 100-116.
14. Кириченко В.В., Хибина М.А. Полусовершенные полудистрибутивные кольца // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – К.: Ин-т математики, 1993. – С. 457-480.
15. Кириченко В.В., Могилёва В.В., Пирус Е.М., Хибина М.А. Полусовершенные слабопервичные кольца и кусочные области // Алгебраические исследования: Сборник статей. – Киев: Изд. Института математики НАН Украины, 1995. – С. 33-65.
16. Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. Бирядные кольца и модули над ними // Алгебраические структуры и их применение. – К.: УМК ВО, 1988. – С. 43-74.
17. Gordon R., Small L.W. Picewise domains // J.Algebra. – 1972. – V. 23, № 3. – P. 553-564.
18. Kirichenko V. Decomposition theorems for semi-perfect rings // Mat. Studii. – 1997. – V. 8, № 2. – P. 157-161.
19. Данлыев Х.М., Кириченко В.В., Халецкая З.П., Яременко Ю.В. Слабопервичные полусовершенные 2-кольца и модули над ними // Сб. „Алгебраические исследования”. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С.5-32.
20. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Нетеровы бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1988. – Т.40, №4. – С. 435-440.

ЗМІСТ

О.В.Авраменко, В.В.Нарадовий. УМОВИ ЛІНІЙНОЇ СТІЙКОСТІ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ	3
Ю.І. Волков. УЗАГАЛЬНЕНА ГЕНЕРАТРИСА БЕЗ'Є	11
Ю.В.Гуртовий. ЕВОЛЮЦІЯ І АСИМЕТРІЯ НЕСТІЙКИХ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ В ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ	21
П.Н.Денисенко. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ КОШИ ПО А-МЕТОДУ	27
О.М.Дресєв, З.Ю.Філер. АЛГОРИТМ СТАТИСТИЧНОГО АНАЛІЗУ СКЛАДНИХ КОЛИВАНЬ	42
Г.В. Завізіон, І.Г. Ключник. ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ МНОЖИН СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	51
Г.А. Кушнір, В.А. Кушнір. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ КОРИСНОСТІ ВІД ЗАТРАТ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	60
В.А. Романов ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЕКТОРНЫХ МЕР	68
З.Ю. Філер, О.І. Музиченко СУЧАСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ	72
Ю.В. Яременко. НАПІВДОСКОНАЛІ НАПІВДИСТРИБУТИВНІ КІЛЬЦЯ	84

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Випуск 67

Серія:

МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

СВІДОЦТВО ПРО ВНЕСЕННЯ СУБ'ЄКТА ВИДАВНИЧОЇ СПРАВИ
ДО ДЕРЖАВНОГО РЕЄСТРУ ВИДАВЦІВ,
ВИГОТІВНИКІВ І РОЗПОВСЮДЖУВАЧІВ ВИДАВНИЧОЇ ПРОДУКЦІЇ
Серія ДК № 1537 від 22.10.2003 р.

Підп. до друку 10.06.2008. Формат 60×84¹/₁₆. Папір офсет. Друк різнограф.
Ум. др. арк. 4,06. Тираж 300. Зам. № 5212.

РЕДАКЦІЙНО-ВИДАВНИЧИЙ ВІДДІЛ
*Кіровоградського державного педагогічного
університету імені Володимира Винниченка*
25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1
Тел.: (0522) 24-59-84.
Fax.: (0522) 24-85-44.
E-Mail: mails@kspu.kr.ua