

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Серія:

МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск 57

ББК 22.1+73

НЗ4

УДК 511.2, 512.5, 517-519, 532.5

Наукові записки .– Випуск . –Серія: Математичні науки. – Кіровоград.
– 110 с.

ISBN 966-8088-27-8

Збірник наукових праць є результатом окремих наукових пошуків дослідників теоретичних проблем математики.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

1. Андрієнко В.О. – доктор фізико-математичних наук, професор.
2. Волков Ю.І. – доктор фізико-математичних наук, професор
(відповідальний редактор).
3. Гамалій В.Ф. – доктор фізико-математичних наук, професор.
4. Кушнір В.А. – доктор педагогічних наук, професор
5. Петренюк А.Я.– доктор фізико-математичних наук, професор
6. Плічко А.М. – доктор фізико-математичних наук, професор.
7. Романов В.О.– кандидат фізико-математичних наук, доцент.
8. Філер З.Ю. – доктор технічних наук, професор.
9. Шевчук І.О. – доктор фізико-математичних наук, професор.
10. Яременко Ю.В.– кандидат фізико-математичних наук, доцент
(відповідальний секретар).

Друкується за рішенням ученої ради Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка
(протокол №3 від 26 жовтня 2004р.)

Адреса редакції: 25006, м.Кіровоград, вул. Шевченка, 1, кафедра математики, тел. 29-31-33.

ISBN 966-8088-27-8

© Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

УДК 532.59

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ ВІД ТІЛА, ЗАНУРЕНОГО В РІДИНУ

О.В. Авраменко

Досліджено тривимірну задачу про поверхневий хвильовий рух від зануреного у рідину тіла. Побудовано форму вільної поверхні, виявлено її залежність від швидкості потоку.

The 3D problem of wave propagation caused by submerged in fluid body is investigated. The form of the free surface is built; the dependence of the form from the stream velocity is obtained.

Вступ. Освоєння Світового океану у ХХІ сторіччі продовжується швидкими темпами. Виникає необхідність вивчення суті динамічних процесів, які протікають в океані, тому дослідження динаміки морського середовища посягають одне із центральних місць в океанології. Детальному вивченню поверхневих хвиль від зануреного у рідину тіла передували багаточисельні дослідження, що присвячені вивченню аналогічних усталених коливань вільної поверхні рідини, що викликані дією періодичних сил збурення на поверхні рідини [7], [8], [9], [12], [13].

Однією із цікавих і досі не повно представлених в науковій літературі є проблема фізико-математичного моделювання полів хвиль на воді, генерованих перешкодою, яка знаходиться під вільною поверхнею у однорідній оточуючій течії. Одні з перших робіт із названої проблеми з'явилися в середині ХХ сторіччя. Лінійна двовимірна задача для імпульсного руху циліндра була розглянута Хавелоком [14]. Суттєвий внесок зроблено Сретенським [8], який отримав наближені розв'язки проблеми поверхневих хвиль над зануреним під водою тілом.

Наведемо найбільш цікаві з останніх робіт по проблемі хвильових процесів, що утворюються на вільній поверхні від набігання потоку на занурене тіло. Плоска лінійна задача для циліндра, що просувається у воді кінцевої глибини, була розв'язана на основі функції Грина та метода кінцевих елементів [20]. Стаціонарна лінійна двовимірна задача та відповідне узагальнення на три виміри були розглянуті Лиу та Йу [16]. У статті Туванда та Милоха [19] розглядається ця задача для початкового етапу руху з використанням розвинення по малому часу нелінійної початково-крайової задачі. Маклаковим досліджено задачу про обтікання кулі під вільною поверхнею рідини кінцевої глибини з утворенням хвиль на вільній поверхні [4], [5], показано, що зниження рівня рідини над тілом, що рухається із сталою швидкістю, призводить до формування над ним критичного режиму та блокування течії. Ланзано [15] досліджує аналітично хвилювання у сліді, який рухається за точковим виток, що рухається горизонтально з сталою швидкістю і має сталу потужність, визначено кількість, тип та конфігурація

хвиль сліду у залежності від потужності витоку та числа Фруда. Санниковим [6] розглядається просторова задача про усталені хвилі, які утворюються при обтіканні диполя рівномірним потоком невід'язкої нестисливої вертикально стратифікованої рідини, отримані вирази для хвиль вертикальних переміщень. Відмітимо також роботи [1], [2], [3], [10], [17], [18].

Метою цієї статті є розв'язання тривимірної задачі для відносно малих швидкостей течії, отримання аналітичних виразів для потенціалу хвильового руху та форми вільної поверхні рідини при рухові довільного еліпсоїдального тіла, яке занурене у рідину нескінченної глибини, а також чисельний аналіз отриманих аналітичних виразів. Проблема розв'язується з використанням методу комплексного потенціалу подвійного шару для виведення аналітичного виразу форми відхилення поверхні у вигляді невід'язких інтегралів з наступним чисельним та графічним аналізом поверхневого руху від перешкоди, зануреної в оточуючу течію.

1. Постановка задачі.

Розглядається утворення поверхневих гравітаційних хвиль, які генеруються перешкодою, що занурена у півнескінченну рідину та обтікається оточуючою течією. Розв'язується тривимірна задача для відносно малих швидкостей течії, тому ефекти стисливості не є суттєвими. Припускається, що рідина нестислива, невід'язка, рух безвихоровий, течія – паралельна поверхні, а швидкість U стала.

Тривимірна задача розглядається в рідкому півпросторі $\Omega = \{(x, y, z) : x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty), z \in (-\infty, \eta)\}$, з якого виключено область, де розміщено занурене жорстке тіло. Нехай $\partial\Omega$ означає поверхню зануреного тіла, а \vec{n} – зовнішня нормаль до неї. Декартова система координат, $Oxyz$ рухається з тілом у додатному напрямку Ox , вісь Oz направлено вгору. За мови симетрії форми тіла відносно площини Oxz можна перейти до двовимірної задачі, видаляючи змінну y . Позначимо через t – часову змінну, φ – потенціал швидкостей, η – відхилення вільної поверхні. Відповідна початково-крайова задача має вигляд

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} - U \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad z = 0, t \geq 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = U \cos(n, x) \quad \partial\Omega, t \geq 0$$

$$\varphi(x, y, z, t)|_{t=0} = f_0(x, y, z), \quad \eta(x, y, t)|_{t=0} = f_1(x, y).$$

Безрозмірні величини у термінах прискорення g та глибини зануреного тіла l вводяться таким чином (далі зірочки всюди опускаються)

$$(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{l}(x, y, z), \quad \eta^* = \frac{\eta}{l}, \quad t^* = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t, \quad U^* = \frac{1}{(\lg)^{1/2}} U, \quad \varphi^* = \frac{1}{l(\lg)^{1/2}} \varphi.$$

2. Аналітичний розв'язок.

Щоб визначити потенціал швидкостей, який породжується рухом твердого тіла довільної форми у рідині нескінченної глибини, на поверхні тіла $\partial\Omega$ розміщується простий шар витоків змінної густини $q(x_0, y_0, z_0)$. Виходячи з результатів, отриманих Сретенським [8], потенціал швидкостей може бути представленим у вигляді поверхневого інтегралу. В рамках наближеної моделі потенціал швидкостей зводиться до потенціалу корабельних хвиль, які породжені рухом підводного тіла довільної форми

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{\exp(\gamma(z+z_0))}{\sqrt{U^2\gamma-1}} \times \sin\left((x-x_0)\sqrt{\frac{\gamma}{U^2}}\right) \cos\left((y-y_0)\sqrt{\gamma^2-\frac{\gamma}{U^2}}\right) d\gamma \quad (2)$$

Поверхневий інтеграл (2) після перетворень зводиться до суми невластних інтегралів по дійсній змінній θ

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & 2U \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\theta) \cos\theta \exp\left(\frac{z}{U^2}\right) \sin\left[\frac{1}{U^2} \sec^2\theta (x \cos\theta + y \sin\theta)\right] d\theta - \\ & - 2U \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(\theta) \cos\theta \exp\left(\frac{z}{U^2}\right) \cos\left[\frac{1}{U^2} \sec^2\theta (x \cos\theta + y \sin\theta)\right] d\theta \quad (3) \end{aligned}$$

Далі, припускається, що поверхня $\partial\Omega$ покрита подвійним шаром витоків з моментом μ , а вісь L подвійних витоків має напрямлюючі косинуси l, m, n .

Припускається також, що поверхня $\partial\Omega$ разом із її подвійним шаром витоків рухається зі швидкістю U під вільною поверхнею. В результаті отримуються вирази для функцій $P(\theta)$ та $Q(\theta)$ у формі

$$\begin{aligned} P(\theta) = & \frac{\sec^3\theta}{2\pi U^5} \iint_{\partial\Omega} \mu(x_0, y_0, z_0) \left[n \cos\left(\frac{1}{U^2} \sec^2\theta (x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)\right) - \right. \\ & \left. - (l \cos\theta + m \sin\theta) \sin\left(\frac{1}{U^2} \sec^2\theta (x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)\right) \right] \times \sec^2\theta \exp\left(\frac{z_0}{U^2} \sec^2\theta\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(\theta) = & \frac{\sec^3\theta}{2\pi U^5} \iint_{\partial\Omega} \mu(x_0, y_0, z_0) \left[n \sin\left(\frac{1}{U^2} \sec^2\theta (x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)\right) + \right. \\ & \left. + (l \cos\theta + m \sin\theta) \sin\left(\frac{1}{U^2} \sec^2\theta (x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)\right) \right] \times \sec^2\theta \exp\left(\frac{z_0}{U^2} \sec^2\theta\right) \end{aligned}$$

Переходячи від тіла довільної форми до еліпсоїду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z+h)^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c),$$

можна отримати вираз для $Q(\theta)$. Використовується той факт, що дія еліпсоїда співпадає з дією диполів, розподілених по еліптичному диску таких, що їх вісі паралельні швидкості еліпсоїда, а моменти дорівнюють $\mu(x_0, y_0, z_0) = -4\pi\rho(x_0, y_0, z_0)$. У розглянутому випадку $l = -1$, $m = 0$, $n = 0$, тому

$$P(\theta) = \frac{\sec^4 \theta}{2\pi U^5} \exp\left(-\frac{h}{U^2} \sec^2 \theta\right) \iint_{\partial\Omega} \mu(\xi, \eta) \sin\left(\frac{\xi}{U^2}\right) \exp\left(\frac{\eta}{U^2} \sec^2 \theta\right) d\xi d\eta,$$

$$Q(\theta) = -\frac{\sec^4 \theta}{2\pi U^5} \exp\left(-\frac{h}{U^2} \sec^2 \theta\right) \iint_{\partial\Omega} \mu(\xi, \eta) \cos\left(\frac{\xi}{U^2}\right) \exp\left(\frac{\eta}{U^2} \sec^2 \theta\right) d\xi d\eta.$$

Визначимо функції $P(\theta)$ та $Q(\theta)$: $P(\theta) = 0$,

$$Q(\theta) = \frac{2\sqrt{2\pi}abc}{U(a^2 - c^2)^{3/4}} \frac{\sec^{5/2} \theta}{2 - \alpha_0} \exp\left(-\frac{h}{U^2} \sec^2 \theta\right) \times \frac{J_{3/2}\left(\frac{1}{U^2} \sqrt{a^2 - c^2} \sec \theta \sqrt{1 - p^2 \sec^2 \theta}\right)}{(1 - p^2 \sec^2 \theta)^{3/4}} \quad (4)$$

Враховуючи формулу (3) для потенціалу $\phi(x, y, z)$ розглянутого хвильового руху, а також скориставшись відомою формулою для відхилення вільної поверхні $\eta = U \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=0}$ отримаємо такий вираз

$$\eta(x, y) = \frac{2}{U} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\theta) \cos\left[\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)\right] d\theta +$$

$$+ \frac{2}{U} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(\theta) \sin\left[\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)\right] d\theta \quad (5)$$

Після підстановки формул (4) для $P(\theta)$ та $Q(\theta)$ у формули (3) та (5) отримано (тут $p^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$)

$$\phi(x, y, z) = -\frac{4\sqrt{2\pi}abc}{(a^2 - c^2)^{3/4} (2 - \alpha_0)} \times \quad (6)$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^{3/2} \theta \exp\left(\frac{z-h}{U^2} \sec^2 \theta\right) \frac{J_{3/2}\left(\frac{1}{U^2} \sqrt{a^2 - c^2} \sec \theta \sqrt{1 - p^2 \sec^2 \theta}\right)}{(1 - p^2 \sec^2 \theta)^{3/4}} \times$$

$$\times \cos\left[\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)\right] d\theta$$

$$\eta(x, y) = \frac{4\sqrt{2\pi}abc}{U^2 (a^2 - c^2)^{3/4} (2 - \alpha_0)} \times \quad (7)$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^{5/2} \theta \exp\left(-\frac{h}{U^2} \sec^2 \theta\right) \frac{J_{3/2}\left(\frac{1}{U^2} \sqrt{a^2 - c^2} \sec \theta \sqrt{1 - p^2 \sec^2 \theta}\right)}{(1 - p^2 \sec^2 \theta)^{3/4}} \times \\ \times \sin\left[\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)\right] d\theta.$$

3. Дослідження різних режимів руху.

Було проведено чисельний аналіз різних режимів руху з використанням формул (6) та (7). Досліджувались режими руху (PP), за умови $0,4 < Fr < 0,9$. Результати порівнювались з експериментальними [11], виявлена розбіжність складає біля 5%, що пояснюється припущеннями моделі та наближеним інтегруванням. Зауважимо, отримані результати значно краще наближують експериментальні, у порівнянні з розрахунками на основі асимптотичних наближень.

На рис.1 представлено вільну поверхню в півплощині з одного боку від осі Ox , пронормовану по найбільшому відхиленню у досліджуваній області, для двох характерних випадків генерації поверхневих хвиль тілом еліпсоїдальної форми, зануреним у рідину, на яке набігає рідкий потік. Безрозмірні геометричні параметри задано таким чином: довжини півосей еліпсоїда обертання $a=2$, $b=0,2$, $c=0,2$; глибина занурення центра еліпсоїда $(h/L) = h^* = 1$. Область, де знаходили значення відхилення вільної поверхні: $0 \leq x/U^2 \leq 200$, $0 \leq y/U^2 \leq 20$.

Результати аналізу проведених розрахунків показують на наявність множини різних PP, які суттєво відрізняються один від одного. Можна з усієї множини виділити два найбільш характерних режими PP1 та PP2. Для чисел Фруда в діапазонах $0,45 < Fr < 0,49$, $0,53 < Fr < 0,61$, $0,74 < Fr < 0,90$ (PP1) більшість збурень сконцентровані в одній області – безпосередньо в околі осі Ox , вздовж якої рухається тіло, а збурена поверхня має клиновидну (трикутну) форму, як це можна побачити на рис.1 (а) при $Fr=0.54$.

Режими руху PP2, при яких число Фруда близьке до $Fr=0,51$ або $Fr=0,68$ рис.1 (б) дають таку форму вільної поверхні, що збурення в околі осі Ox швидко затухають; в той же час усі основні збурення зосереджені на променях, які виходять від початку координат і направлених під кутом від осі Ox .

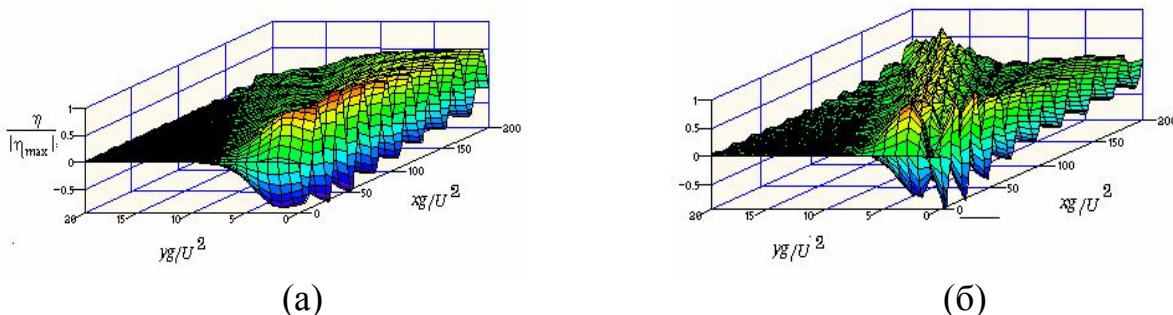


Рис.1 Відхилення вільної поверхні при (а) $Fr=0.54$; (б) $Fr=0,68$

4. Максимальні відхилення поверхні.

Досліджено залежності висоти найвищого гребеня $\eta_{\max}(Fr)$ і відхилення у найглибшій подошві $\eta_{\min}(Fr)$ від числа Фруда, графіки названих залежностей представлені на рис.2 суцільними кривими.

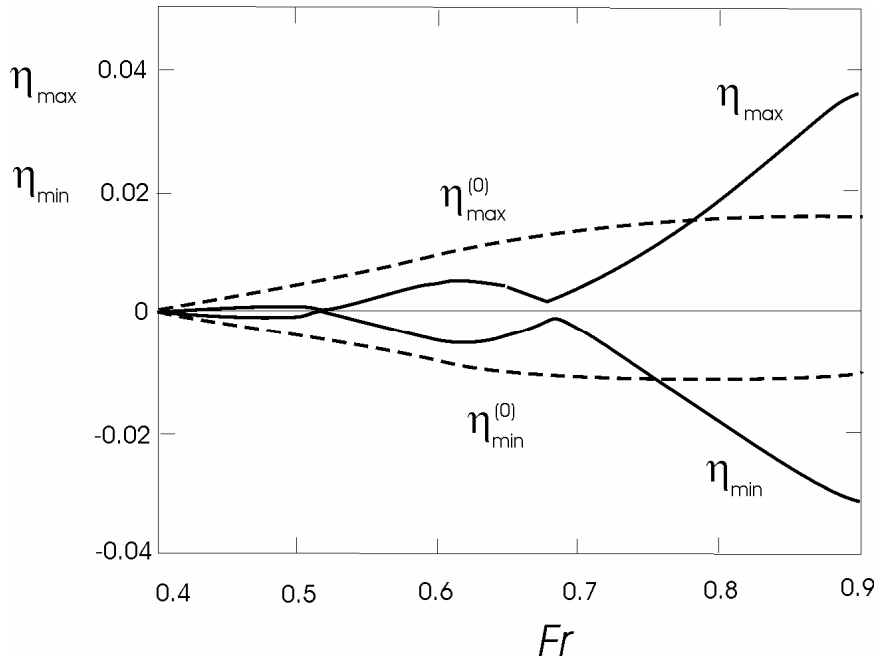


Рис.2 Залежність від числа Фруда висоти найвищого гребеня $\eta_{\max}(Fr)$ (для еліпсоїда) $\eta_{\max}^{(0)}(Fr)$ (для кулі) та глибини найглибшої подошви $\eta_{\min}(Fr)$ (для еліпсоїда) $\eta_{\min}^{(0)}(Fr)$ (для кулі).

Цікаво, що найменші абсолютні відхилення спостерігаються при числах, близьких до $Fr=0,51$ або до $Fr=0,68$, тобто в PP2, а найбільші в PP1. Таким чином, картина розподілу енергії в PP1 і в PP2 має принципові відмінності. Можна зробити висновок, що хвильова енергія в PP1 концентрується навколо осі Ox , а в PP2 вона розподіляється у широкій області, що розміщена за зануреним у рідину тілом.

Для порівняння з результатами дослідження форми вільної поверхні від форми зануреного тіла було аналогічно досліджено форму вільної поверхні при генерації поверхневих хвиль тілом кулеподібної форми, підбраної так, щоб куля була рівною за об'ємом до еліпсоїда. Для куль різних радіусів і для всіх розглядуваних швидкісних режимів спостерігався досить рівномірний розподіл енергії. У випадку руху кулі залежність від числа Фруда висоти найвищого гребеня $\eta_{\max}^{(0)}(Fr)$ та глибини найглибшої подошви $\eta_{\min}^{(0)}(Fr)$ є монотонними функціями, графіки яких представлені пунктирними кривими на рис.2. Можна зробити висновок про істотну залежність форми вільної поверхні рідини не тільки від швидкості набігаючого потоку, а і від форми тіла, що рухається.

Висновки. Підтверджено експериментальні та деякі теоретичні результати щодо відповідності швидкісного режиму поверхневій картині. Виявлено існування різних швидкісних режимів руху, серед яких виділено два основних: режим руху (PP1), при якому більшість збурень зосереджено вздовж осі руху потоку, та режим руху (PP2), при якому основні збурення зосереджено вздовж променів, що виходять з початку координат і направлені під кутом до осі руху потоку.

Отримано залежність абсолютної величини максимального відхилення вільної поверхні від числа Фруда, з якої видно, що при PP1 максимальне відхилення вільної поверхні значно більше, при PP2. Хвильова енергія при PP1 концентрується вздовж осі, а при PP2 розподіляється в широкій області за зануреним в рідину тілом.

Представлені результати можуть бути застосовані при вивченні гідродинамічних процесів, що виникають внаслідок руху під водою тіл складної форми.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Бежанов К.А., Тер-Крикоров А.М. Пространственная задача обтекания источника потоком многослойной жидкости конечной и бесконечной глубины // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана.– 1993.– 29, №6.– С.771–779.
2. Гильман О.А., Миндлин И.М. Нелинейные волны в тяжелой слоистой жидкости, возбуждаемые твердым телом, движущимся под углом к горизонту // Нижегород. гос. техн. ун-т.– Н.Новгород, 1995.– 64 с. Деп. в ВИНТИ 26.12.95. N 3476–В95.
3. Лотфуллин М.В., Филиппов С.И. Расчет поверхностных и внутренних волн при поступательном движении профиля в несжимаемой жидкости // Моделирование в механике.– 1991.– 5, N4.– С.76–82.
4. Маклаков Д.В. Существование решения задачи о докритическом обтекании шара // Некотор. прил. функц. анал. к задачам мат. физ. /АН СССР. СО. Ин-т мат.– Новосибирск.– 1990.– С.92–105.
5. Маклаков Д.В. Обтекание препятствия с образованием волн на свободной поверхности. Предельные режимы // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа.– 1995.– N 2.– С.108–117.
6. Санников В.Ф. Точные решения линейной задачи об установившихся волнах, создаваемых диполем в потоке стратифицированной жидкости // Прикл. мат. и мех.– 1990.– 54, N6.– С.972–977.
7. Селезов И.Т. Распространение и трансформация поверхностных гравитационных волн в жидкости конечной глубины // Итоги науки и техн. Сер.мех. жидкости и газа / ВИНТИ.– 1990.– 24.– С.2–76.
8. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости.– М.: Наука, 1977.– 815с.
9. Стокер Д.Д. Волны на воде.– М.: ИЛ.– 1959
10. Тверской М.Б. Об обтекании точечных препятствий потоком стратифицированной жидкости // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.– 1992.– 32, №11.– С.1825–1829.
11. Ткалич Е.Ф., Шайбо Н.В. О волнообразовании погруженного эллипсоида // Гидромеханика.– 1968.– С.39–44.
12. Черкесов Л.В. Неустановившиеся волны.– К.: Наук. думка, 1970.–196с.
13. Birkhoff G. Hydrodynamics.– Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1960.– 184 p.

14. Havelock T.H. The wave resistance of submerged cylinder in acceleration motion // Quarterly J. Mech. and Appl. Math.– 1949.– 2.– P.325–334.
15. Lanzano P. Waves generated by a moving point-source within a finite-depth ocean // Earth, Moon and Planets.– 1991.– 52, N3.– P.223–252.
16. Liu Y., Yue D.K.P. On the solution near the critical frequency for an oscillating and translating body in or near a free surface // J.Fluid Mech.– 1993.– 254.– P.251–266.
17. Lui H., Ikehata M. Computation of free surface waves around an arbitrary body by a Navier – Stokes solver using the psuedocompressibility technique // Int. J. Number. Mech. Fluids.– 1994.– 19, N5.– P.395–413.
18. Niciforovich E.I. A new approach to the study of organized vortical motion effected to body forces // AGARD Workshop "High speed body motion in water".– Kyiv, 1–3 Sept., 1997, AGARD.– R–827, 1997.– P.12.
19. Tyvand P.A., Miloh T. Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder // J.Fluid Mech.– 1995.– 286.– P.67–101.
20. Wu G.X. Radiation and diffraction of water waves by a submerged circular cylinder at forward speed // J.Hydr.– 1993.– 5, №4.– P.85–96.

*Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка*

Надійшло 4 жовтня 2004р.

УДК 517.98

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ І НУЛЬОВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ СПЕКТРА ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Бобочко В.М.

Побудована рівномірна асимптотика розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту. Розглядається випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи.

A uniform asymptotics of a solution is constructed for a system of singularly perturbed differential equations with a turning point. The paper investigates the case when the spectrum of a phase operator consists of multiple and zero elements.

Постановка задачі. У даній роботі буде побудована рівномірна асимптотика розв'язку задачі

$$\begin{aligned} L_\varepsilon W(x, \varepsilon) \equiv \varepsilon^2 W''(x, \varepsilon) - AW(x, \varepsilon) = h(x), \\ E_1 W(m, \varepsilon) = E_1 [\mu^{-2} \alpha_m + \hat{W}_m], \quad E_2 \frac{dW(m, \varepsilon)}{dx} = E_2 [\mu^{-4} \alpha_m + \mu^{-3} \hat{W}_m] \end{aligned} \quad (1)$$

коли $\varepsilon \rightarrow +0$, $x \in I = [0; a]$, $m = 0, a$, $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Тут A – лінійний оператор, заданий в n – вимірному лінійному просторі \mathbf{R}^n для кожного фіксованого $x \in I$, $h(x)$ – відома вектор-функція, $W(x, \varepsilon)$ – шукана вектор-функція, α_m , \hat{W}_m , $m = 0, a$, – відомі початкові вектори, $E_1 = ((a_{ik}))_{i,k=1}^n$, $E_2 = ((b_{ik}))_{i,k=1}^n$ – діагональні матриці, в яких $a_{ii} = 1$, $i = 1 \cup \overline{p+s+1, n}$; $b_{jj} = 1$, $j = 2, \overline{p+s}$, а всі інші елементи цих матриць рівні нулю.

Задачу (1) будемо вивчати при виконанні таких умов.

Умова 1⁰. $A(x)$, $h(x) \in C^\infty[I]$, де $A(x)$ – матриця оператора A в просторі \mathbf{R}^n .

Умова 2⁰. Граничний оператор A є оператором простої структури і задовольняє умовам

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) \equiv x \tilde{\lambda}_1(x) \leq 0 < \lambda_2(x) < \dots < \lambda_{p+1}(x) \equiv \dots \equiv \lambda_{p+s}(x), \\ \lambda_{p+s+1}(x) \equiv \dots \equiv \lambda_n(x) \equiv 0, \quad \tilde{\lambda}_1(x) < 0, \quad x \in I. \end{aligned} \quad (2)$$

Випадок, коли оператор A простої структури і не містить тотожно рівних нулю елементів вивчено в [1-2]. В [3] досліджено випадок випадку, коли спектр оператора A містить кратні недиагоналізовані елементи, проте він не містить тотожно рівних нулю елементів. Випадок простих стабільних і нульових елементів спектра граничного оператора A вивчено в [4]. Сингулярно збурені задачі (СЗЗ) з кратними стабільними елементами спектра вивчено в [5].

Класичний випадок точки звороту вимагає злипання двох елементів спектра в одній або декількох точках. У досліджуваному випадку в точці $x=0$ відбувається злипання нестабільного елемента $\lambda_1(x)$ з тотожно рівними нулю елементами спектра. Таким чином, вивчається випадок, коли в точці $x=0$ злипаються $n-p-s$ елементів спектра різної структури. Оскільки система (1) другого порядку, то в побудові асимптотики розв'язку СЗЗ (1) беруть участь $2(n-p-s)$ елементів, які обертаються в нуль в точці $x=0$.

Такого типу задачі мають як теоретичний інтерес в теорії сингулярних збурень, так і практичний інтерес. Прикладом сказаного може бути класичне рівняння Орра-Зоммерфельда, яке відіграє важливу роль в гідродинаміці [6-7]. Проте, теорія асимптотичного інтегрування таких задач слабо розвинута. Результати, отримані в [6-7] так і не було узагальнено на випадок систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь (ССЗДУ).

Проведені до цього часу дослідження показали наступне. У загальному випадку, для побудови асимптотики розв'язку таких задач не змогли застосувати апарат добре вивчених функцій Ейрі (див. [10]). Тому дослідимо умови за яких до задачі (1) можна буде застосувати апарат функцій Ейрі і метод, розроблений в [1-3].

З умов (2) бачимо, що вивчається задача (1) у випадку, коли:

- 1) точка $x=0$ є точкою звороту для задачі (1);
- 2) спектр граничного оператора \mathbf{A} містить кратні стабільні і кратні тотожно рівні нулю елементи;
- 3) вироджене векторне рівняння

$$-\mathbf{A} \omega(x) = h(x), \quad (3)$$

у загальному випадку, має розрив другого роду в точці $x=0$.

1. Структура розв'язку виродженого векторного рівняння. Перед тим, як перейти до побудови асимптотики розв'язку СЗЗ (1), нам необхідно вивчити умови існування розв'язку векторного рівняння (3) і його структуру.

Оскільки \mathbf{A} є оператором простої структури, то не дивлячись на кратні елементи спектра, існує повна система власних векторів $b_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, які утворюють біортонормовану систему векторів з векторами $b_k^*(x)$, $k = \overline{1, n}$. Тут $b_k^*(x)$, $k = \overline{1, n}$ – повна система власних векторів оператора \mathbf{A}^* , спряженого до оператора \mathbf{A} (див. [8], стор. 218). Для зручності кратному елементу $\lambda_{p+k}(x)$, $k = \overline{1, s}$ відповідає s лінійно незалежних векторів (фундаментальних розв'язків) $b_{p+k}(x)$. Аналогічно можна сказати і про власні вектори, які відповідають кратному тотожно рівному нулю елементу $\lambda_n(x)$.

Оскільки $\lambda_i(x) \equiv 0$, $i = \overline{p+s+1, n}$ є власними значеннями операторів \mathbf{A} і \mathbf{A}^* , то $\text{Ker} \mathbf{A} = \{b_i(x), i = \overline{p+s+1, n}\}$, $\text{Ker} \mathbf{A}^* = \{b_i^*(x), i = \overline{p+s+1, n}\}$, тобто $\dim \text{Ker} \mathbf{A} = \dim \text{Ker} \mathbf{A}^* = n - (p + s)$.

У досліджуваному випадку $\overline{D(\mathbf{A})} = \mathbf{R}^n$, $\overline{R(\mathbf{A})} = R(\mathbf{A})$. Тоді згідно теореми Хаусдорфа [9], стор. 22, оператор \mathbf{A} нормально розв'язний. У нашому випадку індекс $\chi(\mathbf{A}) = \dim \text{Ker} \mathbf{A} - \dim \text{Ker} \mathbf{A}^* = 0$. Отже \mathbf{A} – фредгольмівський оператор. Оскільки $\text{Ker} \mathbf{A} > 0$, то для векторного рівняння (3) має місце третя фундаментальна теорема Фредгольма, тобто, неоднорідне рівняння (3) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\langle h(x), \text{Ker} \mathbf{A}^* \rangle = 0$.

Для наступних досліджень нам необхідно дослідити структуру розв'язків неоднорідного рівняння (3).

Для цього розвинемо праву частину векторного рівняння (3) і шуканий розв'язок по базису $b_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Отримаємо

$$h(x) = \sum_{i=1}^n (h(x), b_i^*(x)) b_i(x) \equiv \sum_{i=1}^n h_i(x) \cdot b_i(x),$$

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n (\omega(x), b_i^*(x)) b_i(x) \equiv \sum_{i=1}^n \omega_i(x) \cdot b_i(x). \quad (4)$$

З рівності (4) і властивостей біортонормованої системи векторів $\{b_i(x), b_k^*(x)\}$, $i, k = \overline{1, n}$ бачимо, що умови ортогональності правої частини рівняння (3) до ядра спряженого оператора будуть мати місце тоді, коли $h_i(x) \equiv 0$, $i = \overline{p+s+1, n}$. Оскільки $\lambda_1(0) = 0$, то для того, щоби права частина рівняння (3) належала множині значень оператора \mathbf{A} , необхідно ще, щоби виконувалась точкова умова $h_1(0) = \langle h(0), b_1^*(0) \rangle = 0$.

Підставимо другу рівність (4) у векторне рівняння (3) і прирівняємо коефіцієнти біля однакових базисних векторах. В процесі виконання цих перетворень буде отримано розв'язок векторного рівняння (3) вигляду

$$\omega(x) = \sum_{i=p+s+1}^n \omega_i(x) b_i(x) + \sum_{i=1}^{p+s} \lambda_i^{-1}(x) h_i(x) b_i(x), \quad (5)$$

де $\omega_i(x)$ - довільні, досить гладкі функції коли $x \in I$.

Теорема 1. Нехай: 1) виконуються Умови 1⁰ і 2⁰; 2) права частина рівняння (3) ортогональна до ядра спряженого оператора \mathbf{A}^* ; 3) $h_1(0) = \langle h(0), b_1^*(0) \rangle = 0$.

Тоді на всьому відрізку $[0; a]$ існує досить гладкий розв'язок векторного рівняння (3), зображений формулою (5), де $\omega_i(x)$ - довільні, досить гладкі функції коли $x \in I$.

2. Розширення збуреної задачі. Для виділення істотно особливих функцій (ЮФ), які виникають у розв'язку СЗЗ (1), поряд з незалежною змінною $x \in I$, введемо в розгляд нову вектор-змінну $t = \{t_1, t_{jk}\}$, $j = \overline{2, p+1}$, $k = \overline{1, 2}$, компоненти якої визначимо згідно формул

$$t_{jk} = \varepsilon^{-1} \varphi_{jk}(x) \equiv \mu^{-3} (-1)^k \int_{(k-1)a}^x \sqrt{\lambda_j(x)} dx \equiv \Phi_{jk}(x, \varepsilon),$$

$$t_1 = t_{1k} = \mu^{-2} \varphi_1(x) \equiv \mu^{-2} \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{-\lambda_1(x)} dx \right)^{2/3} \equiv \Phi_1(x, \varepsilon).$$

Тоді, згідно розробленого методу (див. [1-3]), для визначення розширеної вектор-функції $\tilde{W}(x, t, \varepsilon)$ отримаємо наступну розширену задачу:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{W}(x, t, \varepsilon) &= h(x), \quad M_m = (m, t(m)), \\ E_1 \tilde{W}(M_m, \varepsilon) &= E_1 [\mu^{-2} \alpha_m + \mathcal{W}], \quad E_2 \frac{d\tilde{W}(M_m, \varepsilon)}{dx} = E_2 [\mu^{-4} \alpha_m + \mu^{-3} \mathcal{W}_m]. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon \equiv \sum_{k=1}^2 \sum_{j=2}^{p+1} [[\varphi'_{jk}(x)]^2 \frac{\partial^2}{\partial t_{jk}^2} + \mu^3 d_{jk} \frac{\partial}{\partial t_j}] + \mu^2 [\varphi'_1(x)]^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \\ + \mu^4 d_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \mu^6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mathbf{A} + \mathbf{Y}_\varepsilon^\perp, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$d_{jk} \equiv 2\varphi'_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x} + \varphi''_{jk}(x), \quad d_1 \equiv 2\varphi'_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + \varphi''_1(x),$$

а $\mathbf{Y}_\varepsilon^\perp$ – оператор-анулятор. Явний вигляд цього оператора при необхідності легко виписати.

3. Простори безрезонансних розв'язків (ПБР). Опишемо підпростори вектор-функцій, в яких будемо розв'язувати розширену задачу. Маємо

$$Y_{rijk} = \{b_i(x) \alpha_{rijk}(x) \exp t_{jk}\}, \quad j = \overline{2, p+1}, \quad Y_{ri1k} = \{b_i(x) [V_{rik}(x) U_k(t_1) + Q_{rik}(x) U'_k(t_1)]\},$$

$$V_{ri} = \{b_i(x) [f_{ri}(x) \Psi(t_1) + g_{ri}(x) \Psi'(t_1)]\}, \quad X_{ri} = \{b_i(x) \omega_{ri}(x)\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

Тут $\alpha_{rijk}(x), V_{rik}(x), Q_{rik}(x), f_{ri}(x), g_{ri}(x), \omega_{ri}(x) \in C^\infty[I], U_k(t_1), \kappa=1, 2$ – функції Ейрі, властивості яких описано в [11], $\Psi(t_1)$ – істотно особлива функція, явний вигляд і властивості якої описано в [1–4].

Із підпросторів (8) складемо новий простір

$$Y_r \equiv \bigoplus_{i=1}^n Y_{ri} \equiv \bigoplus_{i=1}^n \left[\begin{array}{cc} 2 & p+1 \\ \oplus & \oplus \\ Y_{rijk} & \oplus V_{ri} \oplus X_{ri} \end{array} \right]. \quad (9)$$

Елемент цього простору має вигляд

$$W_r(x, t) \equiv \sum_{i=1}^n b_i(x) W_{ri}(x, t) \equiv \sum_{i=1}^n \tilde{W}_{ri}(x, t), \quad (10)$$

де

$$W_{ri}(x,t) \equiv \sum_{k=1}^2 \sum_{j=2}^{p+1} \alpha_{rijk}(x) \exp t_{jk} + \sum_{k=1}^2 [V_{rik}(x)U_k(t_1) + Q_{rik}(x)U_k(t_1)] + \\ + f_{ri}(x)\Psi(t_n) + g_{ri}(x)\Psi'(t_n) + \omega_{ri}(x) .$$

4. Регуляризація сингулярно збуреної задачі. У цьому параграфі нам необхідно вивчити дію розширеного оператора $\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ на елементи простору (9). Методика таких досліджень описана в [1-3]. Тому запишемо кінцевий результат дії розширеного оператора (7) на елемент ПБР (9). Дослідження показали, що дія оператора (7) на елементи ПБР (9), можна записати у вигляді тотожності

$$\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon W_r(x,t) \equiv [\mathbf{R}_0 + \mu^2 \mathbf{R}_2 + \mu^3 \mathbf{R}_3 + \mu^4 \mathbf{R}_4 + \mu^6 \mathbf{R}_6] W_r(x,t) , \quad (11)$$

де оператори \mathbf{R}_k , записані в їх дії на елементи ПБР (9), мають наступний вигляд:

$$\mathbf{R}_0 W_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^n b_i(x) \left\{ \sum_{j=2}^{p+1} [\lambda_j(x) - \lambda_i(x)] \sum_{k=1}^2 \alpha_{rijk}(x) \exp t_{jk} + [\lambda_1(x) - \right. \\ \left. - \lambda_i(x)] \cdot \left[\sum_{k=1}^2 [V_{rik}(x)U_k(t_1) + Q_{rik}(x)U_k'(t_1)] + f_{ri}(x)\Psi(t_1) + g_{ri}(x)\Psi'(t_1) \right] - \lambda_i(x)\omega_{ri}(x) \right\} \equiv (12)$$

$$\equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{0i} \tilde{W}_{ri}(x,t) \equiv \sum_{i=1}^n b_i(x) \mathbf{R}_{0i} W_{ri}(x,t),$$

$$\mathbf{R}_2 W_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^n b_i(x) \left\{ [\varphi_1'(x)]^2 f_{ri}(x) - \tilde{D}_{i1} [g_{ri}(x)\Psi(t_1) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^2 Q_{rik}(x)U_k(t_1)] - \sum_{v=1, v \neq i}^n \varphi_1(x) T_{v1} \left[\sum_{k=1}^2 Q_{rvk}(x)U_k(t_1) + g_{rv}(x)\Psi(t_1) \right] \right\}, \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_3 W_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^n b_i(x) \left\{ \sum_{j=2}^{p+1} \sum_{k=1}^2 [D_{ijk} \alpha_{rijk}(x) + \sum_{v=1, v \neq i}^n T_{vij} \alpha_{rvjk}(x)] \exp t_{jk} \right\}, \quad (14)$$

$$\mathbf{R}_4 W_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^n b_i(x) \left\{ \sum_{v=1, v \neq i}^n T_{v1} \left[\sum_{k=1}^2 V_{rvk}(x)U_k'(t_1) + f_{rv}(x)\Psi'(t_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + g_{rv}(x) \right] + D_{i1} \left[\sum_{k=1}^2 V_{rik}(x)U_k'(t_1) + f_{ri}(x)\Psi'(t_1) + g_{ri}(x) \right] \right\}, \quad \mathbf{R}_4 W_r(x,t) \equiv \frac{\partial^2 W_r(x,t)}{\partial x^2}. \quad (15)$$

Тут оператори D_{ijk} , D_{i1} , T_{vij} мають вигляд

$$D_{ijk} \equiv 2\varphi'_{jk}(x)\left[\frac{\partial}{\partial x} + (b'_i(x), b_i^*(x))\right] + \varphi''_{jk}(x), \quad \tilde{D}_{i1} \equiv \varphi_1(x)D_{i1} + [\varphi'_1(x)]^2,$$

$$T_{vijk} = 2\varphi'_{jk}(x)(b'_v(x), b_i^*(x)), \quad T_{vi1} = 2\varphi'_1(x)(b'_v(x), b_i^*(x)). \quad (16)$$

Результат дії оператора $\mathbf{R}_6 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на елемент ПБР (9) буде відігравати другорядну роль у побудові асимптотики розв'язку СЗЗ (1). Тому ми не будемо записувати явний вигляд дії цього оператора на елемент простору безрезонансних розв'язків.

Висновки.

1. Простори безрезонансних розв'язків (9) інваріантні відносно операторів \mathbf{R}_k , $k=0,2,3,4,6$, а отже і відносно розширеного оператора $\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$, зображеного тотожністю (11).

2. Оператор \mathbf{R}_0 є головним оператором розширеного оператора $\tilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ в просторі безрезонансних розв'язків (9).

3. Розширена задача (6) регулярно збурена відносно малого параметра $\mu > 0$ у ПБР (9), тобто, ми провели *регуляризацію сингулярно збуреної задачі (1)*.

5. **Формалізм побудови розв'язку розширеної задачі.** Асимптотику розв'язку розширеної задачі (6) будемо у вигляді ряду

$$\tilde{W}(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r W_r(x, t), \quad W_r(x, t) \in Y_r. \quad (17)$$

Підставимо формально ряд (17) у розширену задачу (6). Тоді для визначення коефіцієнтів цього ряду отримаємо наступну рекурентну систему задач:

$$\mathbf{R}_0 W_{-2}(x, t) = 0, \quad E_1 W_{-2}(M_m) = E_1 \alpha_m,$$

$$G W_{-2}(M_m) \equiv E_2 \sum_{k=1}^2 \sum_{j=2}^{p+1} [\varphi'_{jk}(m)]^2 \frac{\partial W_{-2}(M_m)}{\partial t_{jk}} = 0, \quad (18)$$

$$\mathbf{R}_0 W_{-1}(x, t) = 0, \quad E_1 W_{-1}(M_m) = 0, \quad G W_{-1}(M_m) = E_2 \left[\alpha_m - \varphi'_1(m) \frac{\partial W_{-2}(M_m)}{\partial t_1} \right], \quad (19)$$

$$\mathbf{R}_0 W_0(x, t) = h(x) - \mathbf{R}_2 W_{-2}(x, t), \quad E_1 W_0(M_m) = E_1 \mathcal{E}_m,$$

$$G W_0(M_m) = E_2 \left[W_m - \varphi'_1(m) \frac{\partial W_{-1}(M_m)}{\partial t_1} \right], \quad (20)$$

$$\mathbf{R}_0 W_r(x, t) = -\mathbf{R}_2 W_{r-2} - \mathbf{R}_3 W_{r-3} - \mathbf{R}_4 W_{r-4} - \mathbf{R}_6 W_{r-6},$$

$$E_1 W_r(M_m) = 0, \quad G W_r(M_m) = -E_2 \left[\varphi'_1(m) \frac{\partial W_{r-1}(M_m)}{\partial t_1} - \frac{\partial W_{r-3}(M_m)}{\partial x} \right]. \quad (21)$$

6. Теорема про існування розв'язку ітераційних векторних рівнянь в ПБР. Нам необхідно вивчити умови існування розв'язку у ПБР (9) ітераційного векторного рівняння

$$\mathbf{R}_0 W_r(x, t) = H_r(x, t). \quad (22)$$

Запишемо структуру ядра оператора \mathbf{R}_0 . Використовуючи тотожність (12), маємо

$$\begin{aligned} \text{Ker} \mathbf{R}_0 = \{ & b_j(x) \alpha_{rjkk}(x) \exp t_{jk}, \quad j = \overline{2, p}, \quad b_j(x) \alpha_{rjkk}(x) \exp t_{(p+1)k}, \\ & j = \overline{p+1, p+s}, \quad b_1(x) [V_{r1k}(x) U_k(t_1) + Q_{r1k}(x) U_k'(t_1)], \quad k = 1, 2, \\ & b_1(x) [f_{r1}(x) \psi(t_1) + g_{r1}(x) \psi'(t_1)], \quad b_i(x) \omega_{ri}(x), \quad i = \overline{p+s+1, n} \}. \end{aligned} \quad (23)$$

Оскільки ПБР (9) інваріантні відносно головного оператора \mathbf{R}_0 , і розв'язки рівняння (22) шукаємо у ПБР (9), то права частина ітераційного рівняння (22) повинна з необхідністю теж належати цьому простору.

Таким чином, нехай $H_r(x, t) \in Y_r$. Запишемо явний вигляд цієї вектор-функції. Нехай

$$\begin{aligned} H_r(x, t) \equiv & \sum_{i=1}^n b_i(x) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^2 \sum_{j=2}^{p+1} [\beta_{rijk}(x) \exp t_{jk} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^2 [A_{rik}(x) U_k(t_1) + B_{rik}(x) U_k'(t_1)] + m_{ri}(x) \Psi(t_1) + l_{ri}(x) \Psi'(t_1) + S_{ri}(x) \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

З тотожності (12) бачимо, що оператор \mathbf{R}_0 звідний над простором

$$Y_r = \bigoplus_{i=1}^n Y_{ri}$$

(див. [11], стор. 36), тобто, в цьому просторі має місце розвинення

$$\mathbf{R}_0 = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{R}_{0i}, \quad (25)$$

де оператори $\mathbf{R}_{0i}: Y_r \rightarrow Y_{ri}$ однозначно визначені і при необхідності, використовуючи (12), легко виписати результат дії цих операторів на елементи $W_{ri}(x, t) \in Y_{ri}$, $i = \overline{1, n}$.

Отже, за аналогією з результатами, описаними в [1], дослідження векторного рівняння (22) в просторі Y_r можна замінити на дослідження n скалярних рівнянь

$$\mathbf{R}_{0i} W_{ri}(x, t) = H_{ri}(x, t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (26)$$

кожне із яких задано відповідно в підпросторі Y_{ri} .

Висновок 4. Кратні елементи не вплинули на зображення (25) і (26).

Особливості кратних нульового і ненульового елементів спектра граничного оператора почнуть виникати при побудові і дослідженні розв'язків скалярних рівнянь (26).

В ПБР (9) оператор \mathbf{R}_0 є діагональним. Отже оператор \mathbf{R}_0 самоспряжений, тобто $\text{Ker}\mathbf{R}_0 = \text{Ker}\mathbf{R}_0^*$. Оператор \mathbf{R}_0 є оператором Фредгольма, причому ядро спряженого оператора не пуста множина. Тому до рівняння (22) можна застосувати третю фундаментальну теорему Фредгольма.

Оскільки оператор \mathbf{R}_0 самоспряжений, то умова ортогональності правої частини рівняння (22) до ядра спряженого оператора \mathbf{R}_0^* еквівалентна твердженню, що права частина векторного рівняння (22) не містить елементів ядра оператора \mathbf{R}_0 . Ми не маємо у явному вигляді спряженого оператора \mathbf{R}_0^* . Тому умову ортогональності замінимо умовою відсутності в правій частині рівняння (22) елементів ядра оператора \mathbf{R}_0 (див. (23)). Ця умова в досліджуваній задачі є досить наочною і її легко застосувати при побудові асимптотики розв'язку розширеної задачі (6).

При дослідженні скалярних рівнянь (26) необхідно буде окремо розглядати наступні чотири випадки.

Випадок 1. Нехай $i=1$, тобто, розглянемо скалярне рівняння $\mathbf{R}_{01}W_{r1}(x,t) = H_{r1}(x,t)$. Зрівнявши коефіцієнти біля однакових ІОФ, однозначно визначимо всі коефіцієнти функції $W_{r1}(x,t)$, окрім коефіцієнтів $V_{r1k}(x)$, $Q_{r1k}(x)$, $f_{r1}(x)$, $g_{r1}(x)$, $k=1,2$, які будуть відсутні в лівій частині досліджуваного рівняння, оскільки $[\lambda_1(x) - \lambda_i(x)]|_{i=1} \equiv 0$.

Для отримання гладкого розв'язку $\omega_{r1}(x) \equiv \lambda_1^{-1}(x)S_{r1}(x)$ необхідно вимагати, щоб $S_{r1}(0) = 0$.

Таким чином, якщо $S_{r1}(0) = 0$, то з рівняння (26) коли $i=1$ однозначно визначимо всі досить гладкі коефіцієнти функції $W_{r1}(x,t)$, окрім елементів ядра оператора \mathbf{R}_0 .

Щоб не повторятись, явні формули для визначення цих коефіцієнтів буде виписано пізніше, оскільки вони будуть придатні для всіх індексів $i = \overline{1, n}$.

Випадок 2. Нехай $i = \overline{2, p}$, причому індекс i фіксований. У цьому випадку права частина рівняння (26) згідно припущення, не повинна містити двох елементів $\beta_{riik}(x)\exp t_{ik}$, $k=1,2$ ядра оператора \mathbf{R}_0 . Тоді однозначно визначимо всі коефіцієнти функції $W_{ri}(x,t)$, $i = \overline{2, p}$, окрім коефіцієнтів $\alpha_{riik}(x)\exp t_{ik}$, $k=1,2$.

Випадок 3. Розглянемо рівняння (26) при $i = \overline{p+1, p+s}$. Тут ми повинні припустити, що права частина рівняння (26) не містить елементів

$\beta_{ri(p+1)k}(x)\exp t_{(p+1)k}$, $k = 1, 2$. У цьому випадку нами не будуть визначені функції $\alpha_{ri(p+1)k}(x)\exp t_{(p+1)k}$, $k = 1, 2$.

Випадок 4. Нехай $i = \overline{p + s + 1, n}$. В лівій частині рівняння (26) відсутні доданки $-\lambda_i(x)\omega_{ri}(x)$. Тому права частина теж не повинна містити відповідні елементи $S_{ri}(x) \equiv 0$, $i = \overline{p + s + 1, n}$. Аналогічно, з того, що права частина ітераційного рівняння (22) належить області значень оператора \mathbf{R}_0 (див. (12)) і врахувавши умови $\lambda_1(0) - \lambda_i(0) = 0$, $i = \overline{p + 1, p + s}$, ми повинні вимагати, щоб права частина рівняння (22) задовольняла умовам

$$b_i(0)A_{rik}(0) = b_i(0)B_{rik}(0) = b_i(0)m_{ri}(0) = b_i(0)l_{rik}(0) = 0, \quad i = \overline{p + s + 1, n} \quad (*)$$

Теорема 2. Нехай: 1) виконуються умови 1^0 і 2^0 ; 2) права частина рівняння (22) не містить елементів ядра оператора \mathbf{R}_0 ; 3) $S_{r1}(0) = 0$; 4) мають місце умови (*).

Тоді в ПБР (9) існує розв'язок рівняння (22), вигляду

$$W_r(x, t) = Z_r(x, t) + y_r(x, t). \tag{27}$$

Тут

$$Z_r(x, t) \equiv b_1(x) \left\{ \sum_{k=1}^2 [V_{r1k}(x)U_k(t_1) + Q_{r1k}(x)U'_k(t_1)] + f_{r1}(x)\Psi(t_1) + g_{r1}(x)\Psi'(t_1) \right\} + \\ + \sum_{k=1}^2 \left\{ \sum_{j=2}^p b_j(x)\alpha_{rjjk}(x)\exp t_{jk} + \sum_{i=p+1}^{p+s} b_i(x)\alpha_{ri(p+1)k}(x)\exp t_{(p+1)k} \right\} + \sum_{i=p+s+1}^n b_i(x)\omega_{ri}(x), \tag{28}$$

де коефіцієнти біля ІОФ і $\omega_{ri}(x)$ є довільними, досить гладкими функціями коли $x \in I$.

Функція $y_r(x, t)$ визначена згідно формули

$$y_r(x, t) \equiv \sum_{i=2}^n b_i(x) \left\{ \sum_{k=1}^2 [V_{rik}(x)U_k(t_1) + Q_{rik}(x)U'_k(t_1)] + f_{ri}(x)\Psi(t_1) + g_{ri}(x)\Psi'(t_1) \right\} + \\ + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=2}^{p+1} \sum_{i=1, i \neq j}^n b_i(x)\alpha_{rijk}(x)\exp t_{jk} + \sum_{i=1}^{p+s} b_i(x)\omega_{ri}(x), \tag{29}$$

коефіцієнти якої однозначно визначаються з формул

$$\alpha_{rijk}(x) \equiv [\lambda_i - \lambda_j]^{-1} \cdot \beta_{rijk}(x), \quad i = \overline{1; n}, \quad j = \overline{2, p + 1}, \quad i \neq j, \quad k = 1, 2, \\ V_{rik}(x) \equiv [\lambda_i - \lambda_1]^{-1} \cdot A_{rik}(x), \quad Q_{rik}(x) \equiv [\lambda_i - \lambda_1]^{-1} \cdot B_{rik}(x), \quad i = \overline{2; n}, \quad k = 1, 2, \\ f_{ri}(x) \equiv [\lambda_i - \lambda_1]^{-1} m_{ri}(x), \quad g_{ri}(x) \equiv [\lambda_i - \lambda_1]^{-1} n_{ri}(x), \quad i = \overline{2; n}, \\ \omega_{ri}(x) \equiv \lambda_i^{-1}(x) \cdot S_{ri}(x), \quad i = \overline{1; p + s}.$$

7. Побудова головного члена асимптотики розв'язку розширеної задачі. Скориставшись теоремами 1 і 2, покажемо, що серія ітераційних задач (18)-(21) асимптотично коректна в просторі безрезонансних розв'язків (9).

Згідно з теоремою 2, розв'язками однорідних ітераційних рівнянь (18) і (19) в ПБР (9) будуть вектор-функції $W_r(x, t) = Z_r(x, t)$, $r = -2; -1$, де вектор-функції $Z_r(x, t)$ визначаються згідно формули (28), коефіцієнти яких, до певного часу, будуть довільними досить гладкими функціями коли $x \in I$.

Обчислимо і дослідимо праву частину рівняння (19). Скориставшись тотожністю (13), отримаємо

$$\begin{aligned} H_0(x, t) \equiv h(x) - \mathbf{R}_2 W_{-2}(x, t) \equiv & \sum_{i=1}^n h_i(x) b_i(x) - b_1(x) \{ \varphi_1'^2(x) f_{(-2)1}(x) + \\ & + \tilde{D}_{11} [\sum_{k=1}^2 Q_{(-2)1k}(x) U_k(t_1) + g_{(-2)1}(x) \Psi(t_1)] \} + \\ & + \sum_{i=2}^n b_i(x) \varphi_1(x) T_{i1} [\sum_{k=1}^2 Q_{(-2)1k}(x) U_k(t_1) + g_{(-2)1}(x) \Psi(t_1)]. \end{aligned}$$

Умови 3) теореми 2 ми зможемо задовольнити за рахунок довільності функції $f_{(-2)1}(x)$, тобто задамо початкову умову

$$f_{(-2)1}(0) = -[\varphi_1'(0)]^{-2} \cdot (h(0), b_1^*(0)) = f_{(-2)1}^0 \quad (30)$$

Виберемо функції $Q_{(-2)1k}(x)$, $g_{(-2)1}(x)$, $k = 1; 2$ як розв'язки задач

$$\tilde{D}_{11} Q_{(-2)1k}(x) = 0, \quad |Q_{(-2)1k}(0)| < \infty, \quad \tilde{D}_{11} g_{(-2)1}(x) = 0, \quad |g_{(-2)1k}(0)| < \infty \quad (31)$$

Розв'язками цих задач в ПБР (9) будуть тотожні нулі. Права частина рівняння (21) набуде вигляду

$$H_0(x, t) \equiv \sum_{i=1}^n h_i(x) b_i(x) - b_1(x) \varphi_1'^2(x) f_{(-2)1}(x). \quad (32)$$

У правій частині цієї рівності все ще є елементи $b_i(x) h_i(x)$, $i = \overline{p+s+1, n}$ ядра оператора \mathbf{R}_0 . За рахунок довільності деяких функцій ми вже не зможемо знищити елементи ядра оператора \mathbf{R}_0 , які ще залишились у правій частині рівняння (20). Таке явище в теорії сингулярних збурень виникає вперше і пояснюється це наявністю тотожно рівних нулю елементів спектра граничного оператора \mathbf{A} .

Тому для того, щоб виконувались умови 2) теореми 2 ми повинні припустити, що виконуються умови

$$h_i(x) \equiv (h(x), b_i^*(x)) \equiv 0, \quad i = \overline{p+s+1, n}, \quad (33)$$

тобто, права частина виродженого рівняння (3) ортогональна до ядра спряженого оператора \mathbf{A}^* (див. умови 2) теореми 1).

Висновок 5. Таким чином, для побудови рівномірно придатної на всьому відрізку $[0; a]$ асимптотики розв'язку СЗЗ (1) необхідно, щоб виконувались умови (33), тобто, щоб мали місце умови 3) теореми 1.

Бачимо, що права частина рівняння (20) задовольняє умову 4) теореми 2.

Отже, якщо виконуються умови (30) і (33), то згідно теореми 2, у ПБР Y_0 існує розв'язок рівняння (20), зображений у вигляді формул (27)-(29), де

$$y_0(x, t) \equiv \omega_0(x) \equiv \sum_{i=1}^{p+s} \omega_{0i}(x) b_i(x).$$

Перейдемо до розв'язання наступного ітераційного рівняння (21) в ПБР Y_1 . Схема дослідження аналогічна попередній, тобто:

- а) необхідно обчислити праву частину цього рівняння;
- б) необхідно вимагати, щоб за рахунок довільності деяких функцій, які містяться у правій частині досліджуваного рівняння, виконувались умови 2)-3) теореми 2;
- в) потрібно, щоб виконувались умови 4) теореми 2;
- г) скориставшись теоремою 2, треба записати розв'язок рівняння (21) у просторі Y_1 .

Зауваження 2. Умову 4) теореми 2 ми не зможемо задовольнити ніякими степенями свободи попередніх розв'язків, як це було зроблено з умовами 2) і 3) теореми 2. Така складність продиктована присутністю тотожно рівних нулю елементів спектра граничного оператора. Тому для застосування теорем 2 до побудови асимптотики розв'язку рівняння (25) ми повинні постулювати виконання умов 4) теореми 2.

У цьому циклу ми визначили початкову умову $f_{(-1)1}(0) = 0$, функції $Q_{(-1)1k}(x) \equiv g_{(-1)1}(x) \equiv 0$ і отримали $2(p-1)$ скалярних диференціальних рівнянь ($r = -2$)

$$D_{jjk} \alpha_{rjjk}(x) = 0, \quad j = \overline{2, p}, \quad k = 1, 2, \quad (34)$$

з яких визначимо функції $\alpha_{(-2)jk}(x) = C_{(-2)jk}^0 \tilde{\alpha}_{(-2)jk}(x)$ з точністю до довільних сталих множників $C_{(-2)jk}^0$.

Врахувавши тотожність (14), для визначення цих функцій отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь ($r = -2$):

$$2\varphi'_{(p+1)k}(x) \alpha'_{r(p+1)k}(x) + [M + \varphi''_{(p+1)k}(x)] \alpha_{r(p+1)k}(x) = 0, \quad (35)$$

де

$$M = \begin{pmatrix} T_{(p+1)(p+1)(p+1)k} & \cdot & T_{(p+s)(p+1)(p+1)k} \\ & \cdot & \cdot \\ T_{(p+1)(p+s)(p+1)k} & \cdot & T_{(p+s)(p+s)(p+1)k} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{r(p+1)k} = \begin{pmatrix} \alpha_{r(p+1)(p+1)k}(x) \\ \cdot \\ \alpha_{r(p+s)(p+1)k}(x) \end{pmatrix}.$$

Висновок 6. Кратність стабільного елементу $\lambda_{p+1}(x)$ внесла наступну особливість: коефіцієнти $\alpha_{ri(p+1)k}(x)$, $i = \overline{p+1, p+s}$, які знаходяться біля ІОФ $b_i(x) \exp t_{(p+1)k}$, $i = \overline{p+1, p+s}$, породжені кратним елементом, визначаються вже як розв'язки системи диференціальних рівнянь (35). Якщо $s=1$, то система диференціальних рівнянь (35) перетворюється в скалярне диференціальне рівняння (34).

Продовжуючи поступово розв'язувати ітераційні рівняння (21) коли $r = \overline{1,6}$, нами буде визначена функція

$$W_0(x, t, \varepsilon) \equiv \sum_{r=-2}^0 \mu^r W_r(x, t), \quad (36)$$

у якій кожний елемент $W_r(x, t)$ містить довільні сталі, отримані при інтегруванні диференціальних рівнянь (34), системи диференціальних рівнянь (35) та диференціальних рівнянь

$$D_{11}V_{r1k}(x) = 0, \quad r = \overline{-2, 0}, \quad k = 1, 2. \quad (37)$$

Кожний доданок вектор-функції (36) містить ще довільні сталі C_{rik} , $i = \overline{p+s+1, n}$ (див. рівність (28)). Отже, кожна з функцій $W_r(x, t)$ містить $2n$ довільних сталих. Походження цих сталих не є очевидним і в попередніх дослідженнях таке явище не спостерігалось. Тому є сенс дати більш детальне пояснення їх походження.

При обчисленні правої частини рівняння (21) при $r = \overline{4, 6}$ вперше брав участь оператор $\mathbf{R}_6 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Провівши необхідні обчислення, отримаємо тотожність

$$\mathbf{R}_6 \omega_r(x) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{i=1}^n b_i(x) \omega_{ri}(x) \equiv \sum_{i=1}^n b_i(x) D \omega_{ri}(x),$$

де

$$D \omega_{ri}(x) \equiv \omega_{ri}''(x) + \sum_{s=1}^n [(b_s''(x), b_i^*(x)) \omega_{rs}(x) + 2(b_s'(x), b_i^*(x)) \omega_{rs}'(x)].$$

Оскільки функції $\omega_{ri}(x)$, $i = \overline{p+s+1, n}$ в розв'язках $Z_r(x, t)$, $r = \overline{-2, 0}$ були довільними (див. (28)), то для того, щоб задовольнялись умови

2) теореми 2, ці функції визначимо як розв'язки системи диференціальних рівнянь другого порядку

$$D\tilde{\omega}_r(x) = 0, \tag{38}$$

де $\tilde{\omega}_r(x) = colon(\omega_{r(p+s+1)}(x), \dots, \omega_m(x))$ – невідомий вектор-стовпець.

Висновок 7. Кратний, тотожно рівний нулю елемент спектра граничного оператора A вносить в побудову асимптотики розв'язку СЗЗ (1) наступні особливості:

1) відповідні довільні функції $\omega_{ri}(x)$, $i = \overline{p+s+1, n}$ визначаються з системи $(n-p-s)$ диференціальних рівнянь, що є характерною рисою кратності спектрального елемента;

2) тотожно кратний нулю елемент $\lambda_n(x)$ утворює вже систему диференціальних рівнянь (38) другого порядку.

Зауваження 3. Властивість 1) є загальною для СЗЗ з стабільним, знакозмінним спектром і для задач з точками звороту з кратними, але не рівними тотожно нулю елементами спектра. Властивість 2) вперше з'явилась при дослідженні рівняння (1) з тотожно рівним нулю елементом спектра граничного оператора.

Продовжуючи далі поступово розв'язувати ітераційні рівняння (21) коли $r > 6$, методом математичної індукції можна показати наступне. Для кожної правої частини $H_r(x, t)$ ітераційних рівнянь (21), за рахунок довільних функцій, які містяться у попередніх розв'язках, завжди можна задовольнити умови 2) і 3) теореми 2. А це означає, що кожне ітераційне рівняння (21), згідно теореми 2, має розв'язок в ПБР (9), тобто серія ітераційних рівнянь (18)-(21) асимптотично коректна в ПБР (9).

8. Однозначна розв'язність розв'язків ітераційних задач. У попередньому пункті сказано, що кожний розв'язок ітераційного рівняння (18)-(21) містить $2n$ довільних сталих. Покажемо, що, використовуючи крайові умови (18)-(21), ці сталі буде визначено однозначно.

Запишемо структуру загального розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь (35). Оскільки всі коефіцієнти цієї системи є досить гладкими функціями, то згідно класичної теорії існує фундаментальна система розв'язків (ФСР) цієї системи вигляду ($k = 1, 2$)

$$\tilde{\alpha}_{r(p+1)(p+1)k1}(x), \dots, \tilde{\alpha}_{r(p+1)(p+1)ks}(x) \\ \dots \tag{39}$$

$$\tilde{\alpha}_{r(p+s)(p+1)k1}(x), \dots, \tilde{\alpha}_{r(p+s)(p+1)ks}(x),$$

яка задовольняє наступним умовам:

$$\tilde{\alpha}_{r(p+l)(p+1)kl}[(k-1)a] = 1, \quad k = 1, 2, \quad l = \overline{1, s}. \tag{40}$$

Інші функції, які містяться в ФСР (39), обертаються в нуль в точках $x=0$ і $x=a$.

Враховавши структуру отриманої ФСР, загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь (35) запишемо у вигляді ($j = \overline{p+1, p+s}$)

$$\alpha_{rj(p+1)k}(x) = \sum_{l=1}^s C_{r(p+l)k} \tilde{\alpha}_{rj(p+l)kl}(x). \quad (41)$$

З врахуванням початкових умов (40) отримуємо початкові значення

$$\alpha_{rj(p+1)k}[(k-1)a] = C_{rj}k, \quad j = \overline{p+1, p+s}, \quad (42)$$

які пізніше буде практично використовувати при визначенні довільних сталих, які містяться в розв'язках ітераційних рівнянь (18)-(21).

За аналогією з отриманим, нам необхідно записати структуру загального розв'язку однорідної системи диференціальних рівнянь (38). З врахуванням того, що система (38) є системою диференціальних рівнянь другого порядку, отримуємо наступні аналоги формул (41) і (42):

$$\omega_{rj}(x) = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=p+s+1}^n C_{rkl} \tilde{\omega}_{rjkl}(x), \quad j = \overline{p+s+1, n}, \quad (43)$$

де $\omega_{rjkl}(x)$ – елементи двох ФСР при $k = 1, 2$, причому

$$\omega_{rkl}[(k-1)a] = 1, \quad \omega_{rjkl}[(k-1)a] = 0, \quad l \neq j.$$

В нашому випадку маємо

$$\omega_{rj}(0) = C_{r1j} + C_{r2j} \omega_{rj2j}(0), \quad \omega_{rj}(a) = C_{r2j} + C_{r1j} \omega_{rj1j}(a).$$

Введемо позначення $C_r = (C_r^1, C_r^2)$, де

$$C_r^1 = (C_{r11}, C_{r21}, C_{r1(p+s+1)}, \dots, C_{r1n}, C_{r2(p+s+1)}, \dots, C_{r2n}),$$

$$C_r^2 = (C_{r12}, \dots, C_{r1(p+s)}, \dots, C_{r22}, \dots, C_{r2(p+s)}).$$

Підставимо отриманий розв'язок $W_{-2}(x, t) \equiv Z_{-2}(x, t)$ у крайові умови (18).

В результаті такої підстановки маємо таку систему $2n$ алгебраїчних рівнянь ($r=-2$):

$$\Delta(\varepsilon) C_r = \Gamma_r. \quad (44)$$

Тут $\Gamma_r = (\Gamma_r^1, \Gamma_r^2)$ – відомий вектор явний вигляд якого буде записано пізніше, $C_r = (C_r^1, C_r^2)$ – шуканий вектор, компоненти якого потрібно визначити.

Крайові умови (18) такі, що система (44) може бути записана у вигляді двох систем

$$\Delta_1(\varepsilon) C_r^1 = \Gamma_r^1, \quad \Delta_2(\varepsilon) C_r^2 = \Gamma_r^2, \quad (45)$$

в яких Γ_r^2 – відомий вектор, а Γ_r^1 – теж відомий вектор, але вже містить в компоненти вектора Γ_r^2 . Отже, спочатку можна розв'язати другу систему (45), а після – першу систему (45), що нами і буде зроблено.

Матрицю $\Delta_2(\varepsilon)$ можна записати у вигляді наступної блочної матриці:

$$\Delta_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \Delta_{211}(0) & \Delta_{212}(0) \\ \Delta_{221}(a) & \Delta_{2122}(a) \end{pmatrix}, \tag{46}$$

де при $k = 0,1$ маємо

$$\Delta_{2(1+k)(1+k)}(x) = \begin{pmatrix} b_{22}(ak)[\varphi'_{2(1+k)}(x)]^2 & \cdot & b_{(p+s)2}(ak)[\varphi'_{(p+s)(1+k)}(x)]^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{2(p+s)}(ak)[\varphi'_{2(1+k)}(x)]^2 & \cdot & b_{(p+s)(p+s)}(ak)[\varphi'_{(p+s)(1+k)}(x)]^2 \end{pmatrix}.$$

Кожний член двох блочних матриць Δ_{2ij} , $i \neq j$ містить у вигляді множника експоненту, яка прямує до нуля при прямуванні малого параметра до нуля. З врахуванням сказаного визначник матриці (46) можна записати у вигляді

$$\det \Delta_2(\varepsilon) = \prod_{k=1}^2 \det \Delta_{2kk} + \mathbf{O}(\varepsilon) \equiv \prod_{k=1}^2 |\tilde{B}_2((k-1)a)| [\varphi'_{jk}((k-1)a)]^2 + \mathbf{O}(\varepsilon),$$

де

$$\tilde{B}_2(x) = \begin{pmatrix} b_{22}(x) & \cdot & \cdot & \cdot & b_{(p+s)2}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{2(p+s)}(x) & \cdot & \cdot & \cdot & b_{(p+s)(p+s)}(x) \end{pmatrix},$$

Оскільки $\varphi'_{jk}((k-1)a) \neq 0$ для всіх $j = \overline{2, p+s}$, $k = 1,2$, то справедлива лема.

Лема 1. Нехай $\det \tilde{B}_2((k-1)a) \neq 0$, $k = 1,2$. Тоді для досить малих значень параметра $\varepsilon > 0$ визначник матриці (46) не дорівнює нулю.

При виконанні умов лемати 1, із другої системи (45) однозначно визначимо вектор C_{-2}^2 . Підставимо компоненти знайденого вектора C_{-2}^2 у першу систему (45) і перейдемо до її дослідження. Визначник отриманої системи має вигляд

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} b_{11}(0) & 0 & b_{(p+s+1)1}(0) & \cdot & b_{n1}(0)\omega_{rnn2}(0) \\ b_{11}(a)\beta_1 & b_{11}(a)\beta_2 & b_{(p+s+1)1}(a)\omega_{r(p+s+1)(p+s+1)1}(a) & \cdot & b_{n1}(a) \\ b_{1(p+s+1)}(0) & 0 & b_{(p+s+1)(p+s+1)}(0) & \cdot & b_{n(p+s+1)}(0)\omega_{rnn2}(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n}(0) & 0 & b_{(p+s+1)n}(0) & \cdot & b_{nn}(0)\omega_{rnn2}(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1n}(a)\beta_1 & b_{1n}(a)\beta_2 & b_{1n}(a)\beta_2 & \cdot & b_{nn}(a) \end{pmatrix},$$

де

$\beta_k = [\varphi'_{1k}(a)]^{-1/2} U_k(t_1(a))$, $\omega_{rijk}(x)$, $j = \overline{p+s+1, n}$, $k = 1, 2$ – функції, які входять у загальний розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь (38) (см.(43)).

Нехай $\det \Delta_1 \neq 0$. Тоді з неоднорідної системи $2(n-p-s+1)$ алгебраїчних рівнянь $\Delta_1 C_{-1}^1 = \Gamma_{-1}^1$ однозначно визначимо невідомий вектор C_{-1}^1 , а отже, нами буде однозначно визначено вектор C_{-1} . Таким чином, справедлива наступна лема.

Лема 2. *нехай $\det \tilde{B}_2((k-1)a) \neq 0$, $k = 1, 2$. і $\det \Delta_1 \neq 0$. Тоді для досить малих значень параметра $\varepsilon > 0$ система $2n$ алгебраїчних рівнянь (44) має єдиний розв'язок.*

Вивчимо більш детально розв'язок системи (44) коли $r = -2$. Оскільки другі крайові умови (19) однорідні, то $\Gamma_{-2}^2 = 0$, тобто $C_{-2}^2 = 0$. Перша система (45) коли $r = -2$. неоднорідна за рахунок присутності доданку $b_1(x)f_{(-2)1}(x)\Psi(t_1)$.

Отже, розв'язок першої ітераційної задачі (19) має вигляд

$$W_{-2}(x, t) = b_1(x) \left[\sum_{k=1}^2 V_{(-2)1k}(x) U_k(t_1) + f_{(-2)1}(x) \Psi(t_1) \right] + \sum_{i=p+s+1}^n b_i(x) \omega_{(-2)i}(x). \quad (47)$$

При підстановці розв'язку $W_{-1}(x, t)$ у крайові умови (20) для визначення невідомого вектора C_{-1} ми знову отримали систему $2n$ алгебраїчних рівнянь (44) при $r = -1$. За описаною схемою, буде однозначно визначено вектор-функція $W_{-1}(x, t)$.

Продовжуючи далі визначати вектори C_r , $r > -1$ можна показати, що кожна ітераційна задача (18)-(21) у ПБР (9) має єдиний розв'язок. А це означає, що серія ітераційних задач (19)-(22) асимптотично коректна в ПБР (9).

Побудований формальний ряд розв'язку розширеної задачі (6) містить доданки з від'ємними степенями малого параметру. Оскільки функції Ейрі $U_k(t_1) \approx \mathbf{O}(1)$ і тим більше $\omega_{(-2)i}(x) \approx \mathbf{O}(1)$, то побудований розв'язок необмежено зростає при прямуванні малого параметра до нуля.

По аналогії з попередніми працями (див.[1-3]) покажемо, що за при спеціальному виборі початкових векторів α_m , $m = 0, a$ головний член асимптотики розв'язку СЗЗ (1), а відповідно, і вся асимптотика розв'язку цієї задачі, може бути отримана в більш простішому вигляді, причому отримана таким чином асимптотика розв'язку буде вже рівномірно придатна і відносно малого параметра $\varepsilon > 0$.

Нами вже було показано, що $\Gamma_{-2}^2 = 0$. Будемо вимагати, щоб $\Gamma_{-2}^1 = 0$, тобто задамо частину компонент векторів α_m , $m = 0, a$ у вигляді

$$\alpha_{mv} = b_{1v}(m)f_{(-2)1}(m)\Psi(t_1(m)) + \sum_{i=p+s+1}^n b_{iv}(m)\omega_{(-2)i}(m), \quad v = \overline{1 \cup p + s + 1, n}. \quad (48)$$

При виконанні умов (48) нами буде отримана однорідна система рівнянь $\Delta_1 C_{-2}^1 = 0$, тобто $C_{-2}^1 = 0$. У цьому випадку розв'язок (47) набуде найпростішого вигляду, тобто $W_{-2}(x, t) = b_1(x)f_{(-2)1}(x)\Psi(t_1)$.

Дослідимо праву частину системи (44) при $r = -1$. Якщо взяти

$$\alpha_{mv} = b_{1v}(m)\phi_1'(m)f_{(-2)1}(m)\Psi'(t_1(m)), \quad m = 0, a, \quad v = \overline{1 \cup p + s + 1, n}, \quad (49)$$

то отримаємо однорідну систему $\Delta_2 C_{-1}^2 = 0$, тобто, $C_{-1}^2 = 0$.

Перша система (45) при $r = -1$ теж буде однорідною.

Таким чином, при виконанні умов (49) розв'язком задачі (23) буде $W_{-1}(x, t) \equiv 0$.

Висновок 8. Якщо компоненти векторів α_m , $m = 0, a$ вибрати у вигляді формул (48) і (49), то розв'язком розширеної задачі (6) буде ряд

$$\tilde{W}(x, t, \varepsilon) = \mu^{-2} b_1(x)f_{(-2)1}(x)\Psi(t_1) + \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r W_r(x, t). \quad (50)$$

8. Оцінка залишкового члена асимптотики розв'язку. Запишемо формальний ряд (50) у вигляді тотожності

$$\tilde{W}(x, t, \varepsilon) \equiv W_{\varepsilon q}(x, t, \mu) + \tilde{\xi}_{q+1}(x, t, \varepsilon),$$

де $W_{\varepsilon q}(x, t, \mu)$ – часткова q -сума ряду (50), а $\mu^{q+1} \tilde{\xi}_{q+1}(x, t, \varepsilon)$ – залишковий член цього ряду. Проведемо звуження в тотожності (50) коли $t = \Phi(x, \varepsilon)$. Отримаємо тотожність

$$\tilde{W}(x, t, \varepsilon)|_{t=\Phi(x, \varepsilon)} \equiv W(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon) \equiv W_{\varepsilon q}(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon) + \xi_{q+1}(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon). \quad (51)$$

Скориставшись відомою методикою (див.[1-3]), отримаємо наступну оцінку залишкового члена асимптотики розв'язку СЗЗ (1):

$$\|\xi_{q+1}(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon)\| \leq \mu^{q+\frac{1}{2}} K_{q+1}, \quad q > 0, \quad (52)$$

де постійна K_{q+1} не залежить від $x \in I$ і малого параметру $\varepsilon > 0$.

У частинному випадку, коли $q = 0$ за рахунок того, що $Q_{0ik}(x) \equiv 0$, на довільному компактній відрізку I , який не містить точок $x = 0$ і $x = a$ має місце оцінка

$$\|\xi_1(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon)\| \leq \mu K_1. \quad (53)$$

Скориставшись оцінками (52) і (53), можна показати, що на довільному компактній відрізку I , який не містить точок $x = 0$ і $x = a$ справедлива оцінка

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} W(x, \varepsilon) = \omega(x), \quad (54)$$

де $\omega(x)$ – розв'язок виродженого векторного рівняння (3).

Сформулюємо у вигляді загальної теореми отримані результати.

- Теорема 3.** Нехай: 1) для СЗЗ (1) виконуються Умови 1^0 і 2^0 ;
2) лінійний оператор A еквівалентний канонічній матриці (4).
3) $\det \tilde{B}_2((k-1)a) \neq 0$, $k = 1, 2$ і $\det \Delta_1 \neq 0$.

Тоді для досить малих значень параметра $\varepsilon > 0$:

- 1) описаним вище методом для розв'язку розширеної задачі (8) в ПБР (12) може бути побудований єдиний формальний ряд (18);
2) зсування формального ряду (17) при $t = \Phi(x, \varepsilon)$ є асимптотичним рядом розв'язку СЗЗ (1);
3) залишковий член асимптотики розв'язку СЗЗ (1) має оцінки, зображені співвідношеннями (52) і (53);
4) на довільному компактній відрізку I , який не містить точок $x = 0$ і $x = a$ справедлива гранична рівність (54).

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Бобочко В.Н. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота // Дифференц. ур.-ия. -1991.- **27**, № 9.-С.1505-1515.
2. Бобочко В.М. Точка звороту в системі диференціальних рівнянь з аналітичним оператором // Укр.мат.журн.-1996.- **48**, № 2.-С.147-160.
3. Бобочко В.Н. Система дифференциальных уравнений с точкой поворота в случае недиагонализируемого предельного оператора // Дифференц. ур.-ия. -1998.- **34**, № 10.- С.1304-1312.
4. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.- М.: Наука. 1981.- 400 с.
5. Шкиль Н. И., Старун И.И., Яковец В. П. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.- К.: Выща школа, 1987.- 288 с.
6. Langer R. On the asymptotic forms of the solutions of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a turning point //Trans. Amer. Math. Soc. - 1955.- 80.- P. 93-123.
7. Wasow W. A study of the solutions of the differential equations $y^{(4)} + \lambda^2(xy'' + y) = 0$ for large values of λ . // Ann. Math.- 1950.-**2**.-P. 350-361.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. -М.: Изд-во технико-теор. лит.,-1953. -492 с.
9. Треногин В. А. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1980.- 496 с.
10. Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН.- 1952 - Т.27, вып.6(52).- с. 3-96.
11. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.- М.: Мир, 1972. - 740 с.

Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка

Надійшло 22 вересня 2004р.

УДК 515.1

СИНГУЛЯРНОСТИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ГОМОЛОГИЙ НА ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

О.П.Бондарь

Рассматриваются критические точки гладких функций на многообразиях с точки зрения теории гомологий и дополняются известные инварианты – ранги относительных групп гомологий.

We describe the ranks of homology groups of conic critical points on 3-dimensional manifolds.

Теория особенностей гладких функций имеет обширную область приложения в различных направлениях науки, техники, экономики: в теории упругих конструкций, оптике, термодинамике, лазерной физике, биологии, моделировании экономических процессов. Поэтому наиболее полная характеристика этих особенностей, а также их взаимосвязь со структурой множеств и характером функций, заданных на них, является важной задачей.

Различные аспекты теории особенностей функций на многообразиях рассматриваются в современной математике (см., напр., [1]). Мы рассмотрим критические точки гладких функций на многообразиях с точки зрения теории гомологий, дополнив известные инварианты – ранги относительных групп гомологий. Напомним ([2],[3]) некоторые определения.

Точка p n -мерного гладкого многообразия M называется **конической** точкой гладкой функции f , заданной на M , если в некоторой окрестности $U \subset M$ точки p прообраз $f(p)$ в U гомеоморфен конусу с вершиной в точке p над несвязным объединением $(n-2)$ -мерных связных многообразий L_i без края:

$$f^{-1}(f(p)) \cap U = \text{Con}(p, \bigsqcup L_i).$$

На сфере, ограничивающей шаровую окрестность в U точки p , конус отсекает так называемое **“приклеиваемое” множество** – несвязное объединение $(n-1)$ -мерных многообразий, ограниченных L_i , для которого значения функции f не превосходят ее значения в точке p .

Пусть $\{x\}_i$ – множество изолированных критических конических точек функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ на поверхности уровня $f^{-1}(c)$ многообразия M . На множестве $M^c = \{x \in M: f(x) \leq c\}$ рассмотрим относительные группы гомологий

$$H_k(M^c, M^c \setminus \{x\}_i).$$

В силу изолированности критических точек под группой $H_k(M^c, M^c \setminus \{x\}_i)$ будем понимать группу

$$H_k(M^c, M^c \cup U\{x\}_i),$$

где $U\{x\}_i$ – множество достаточно малых окрестностей точек $\{x\}_i$. Рассмотрим целые числа $\beta_k(M^c, M^c \setminus \{x\}_i)$, где $\beta_k(X, Y) = \dim H_k(X, Y)$ (над

соответствующим полем) – так называемые числа Бетти пары (X, Y) . Если на поверхности уровня $f^{-1}(c)$ расположена единственная критическая точка x , то числа $\beta_k(M^c, M^c \setminus x)$ могут служить характеристикой этой критической точки. Заметим, что ранги относительных групп гомологий не могут полностью характеризовать критическую точку, но с некоторой дополнительной информацией о критической точке они могут служить ее характеристикой.

Утверждение. На гладком компактном связном трехмерном многообразии M существует гладкая функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, имеющая четыре конических критических точки: точку минимума, точку максимума, критическую точку, для которой $\beta_1=m, \beta_2=0$, “приклеиваемое” множество – несвязное объединение $m+1$ двумерного диска и критическую точку, для которой $\beta_1=1, \beta_2=m$, “приклеиваемое” множество – замыкание двумерной сферы без несвязного объединения $m+1$ двумерного диска (m – некоторая константа).

Доказательство основано на преобразовании функции, имеющей на многообразии в точности четыре критических уровня: минимума, максимума, содержащего только критические точки индекса один и содержащего критические точки индекса два, и применении теоремы [2].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Шарко В.В. Функции на многообразиях.-Киев:Наук.думка,1990.-196с.
2. Бондарь О.П. Теорема о слиянии критических точек в точку.-// Некоторые вопросы современной математики.-Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998.-436с.
3. Зейферт Г., Трельфалль В. Вариационное исчисление в целом.- М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1947.-132с.

УДК 519.213

РОЗПОДІЛИ ФІБОНАЧЧІ

Ю.І. Волков

Изучается семейство арифметических распределений, которые являются обобщениями биномиального распределения. Получены асимптотические формулы для математического ожидания и дисперсии. Кроме того, найдены наиболее вероятные значения соответствующей случайной величины.

The family of arithmetical distributions, which the binomial distribution are a generalization, is studied. For the expectation and variance the asymptotic formulas are determine. Thereto, the most probable number of corresponding random variable are found.

Проводиться n незалежних випробувань Бернуллі з імовірністю успіху p . Ймовірність p_k того, що при такому експерименті отримаємо рівно k успіхів за умови, що за кожним успіхом слідує принаймні m ($m \geq 0$) невдач можна знайти за формулою:

$$p_k = \frac{C_{n-mk}^k (p/q)^k}{\sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^i (p/q)^i}, \quad k=0, 1, 2, \dots, [n/(m+1)], p+q=1. \quad (1)$$

Якщо $m=0$, то це звичайний біноміальний розподіл з параметрами (n, p) .

Розподіли, які визначаються за допомогою співвідношення (1), частинні випадки арифметичних (a, b, m, n) -розподілів.

Означення. Випадкова величина ξ має розподіл Фібоначчі з параметрами (a, b, m, n) , якщо вона приймає значення $k=0, 1, 2, \dots, [n/(m+1)]$ з ймовірностями

$$p_k = \frac{C_{n-mk}^k b^k a^{n-(m+1)k}}{\sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^i b^i a^{n-(m+1)i}}, \quad (2)$$

a, b довільні додатні числа, m, n – натуральні.

Якщо в (2) покласти $a=1, b=p/q$, то отримаємо (1), а у випадку $m=1, a=b=1$, отримаємо розподіл, який вивчав П.Філіппоні, [1].

Метою даної роботи є дослідження розподілів Фібоначчі, як то: дослідити поведінку $M\xi$ при $n \rightarrow \infty$, дослідити поведінку $D\xi$ при $n \rightarrow \infty$, знати найбільш ймовірне значення випадкової величини ξ .

Лема 1. Числа

$$u_n(a, b) := \sum_{i=0}^{[n/(m+1)]} C_{n-mi}^i b^i a^{n-(m+1)i} \quad (3)$$

задовольняють рекурентне співвідношення

$$u_{n+m+1} = au_{n+m} + bu_n, \quad u_0=1, u_1=a, \dots, u_m=a^m. \quad (4)$$

Співвідношення (4) впливає з такої тотожності:

$$C_{n+m-mi}^i + C_{n+m-mi}^{i-1} = C_{n+m-mi+1}^i.$$

Далі використовуватимемо характеристичне рівняння для рекурентного співвідношення (4):

$$z^{m+1} = az^m + b \quad (5)$$

Лема 2. Рівняння (5) має єдиний додатний корень $a < \lambda < a+2$. Всі інші корені цього рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ по модулю строго менші, ніж λ .

Доведення. На проміжку $[a, \infty]$ функція $f(z) := z^{m+1} - az^m - b$ строго монотонно зростає ($f'(z) = (m+1)z^m - maz^{m-1} = z^{m-1}((m+1)z - ma) > 0$), в точці a $f(a) = -b < 0$, а для досить великих z $f(z) > 0$, тому існує єдине λ , де $f(\lambda) = 0$.

Далі перепишемо рівняння (5) так:

$$w^{m+1} - \frac{a}{\lambda} w^m = \frac{b}{\lambda^{m+1}}, \text{ де } w = z/\lambda. \text{ Звідси } |w|^m \left| w - \frac{a}{\lambda} \right| = \frac{b}{\lambda^{m+1}}. \text{ Припустимо, що існує}$$

корінь $w_0 \neq 1$ і $|w_0| \geq 1$. Тоді $|w_0|^m \left| w_0 - \frac{a}{\lambda} \right| = \frac{b}{\lambda^{m+1}} \geq \left| w_0 - \frac{a}{\lambda} \right| > 1 - \frac{a}{\lambda}$, але $\frac{b}{\lambda^{m+1}} = 1 - \frac{a}{\lambda}$,

бо λ корінь рівняння (5), прийшли до протиріччя. Отже, $|w_0| < 1 \Leftrightarrow |z_0| < \lambda$, z_0 любий корінь рівняння (5), який не дорівнює λ .

Лема 3. Має місце рівність:

$$u_n(a, b) = C\lambda^n + C_1\lambda_1^n + \dots + C_m\lambda_m^n, \quad (6)$$

де сталі C, C_1, \dots, C_m знаходяться з початкових умов рекурентного співвідношення (4).

Рівність (6) випливає з того, що рекурентне співвідношення (4) – лінійне однорідне з постійними коефіцієнтами.

$$\text{Неважко показати, що, наприклад, } \ln C = \sum_{k=1}^m \ln \frac{a - \lambda_k}{\lambda - \lambda_k}.$$

Для знаходження математичного сподівання і дисперсії досліджуваного розподілу скористаємось генератрисою розподілу. Позначимо її через $P(z)$,

$$P(z) = \frac{u_n(a, bz)}{u_n(a, b)}, \quad M\xi = P'(1), \quad D\xi = P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2. \quad (7)$$

Для знаходження відповідних похідних спочатку знайдемо похідні по z від функцій $u_n(a, bz)$. Ці функції задовольняють рекурентне співвідношення

$$u_{n+m+1}(a, bz) = au_{n+m}(a, bz) + bu_n(a, bz), \quad u_0 = 1, \quad u_1 = a, \quad \dots, \quad u_m = a^m. \quad (8)$$

Характеристичне рівняння для цього рекурентного співвідношення

$$w^{m+1} = aw^m + bz. \quad (9)$$

Нехай $\lambda(z), \lambda_1(z), \dots, \lambda_m(z)$ розв'язки рівняння (9). Тоді

$$\lambda(1) = \lambda, \quad \lambda_1(1) = \lambda_1, \quad \dots, \quad \lambda_m(1) = \lambda_m \quad (10)$$

$$u_n(a, bz) = C(z)(\lambda(z))^n + C_1(z)(\lambda_1(z))^n + \dots + C_m(z)(\lambda_m(z))^n, \quad (11)$$

функції $C(z)$, $C_1(z), \dots, C_m(z)$ можна знайти з початкових умов (8), а $C(1)=C$, $C_1(1)=C_1, \dots, C_m(1)=C_m$. Наприклад, $\ln C(z) = \sum_{k=1}^m \ln \frac{a - \lambda_k(z)}{\lambda(z) - \lambda_k(z)}$.

Будемо користуватись позначеннями: $C' = C'(1)$, $C_1' = C_1'(1)$, ..., $C_m' = C_m'(1)$ і аналогічними позначеннями для других похідних.

Теорема 1. *Мають місце асимптотичні рівності:*

$$M\xi = \frac{b}{mb + \lambda^{m+1}} n + C_M + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (12)$$

$$D\xi = \frac{ab\lambda^{2m+1}}{(mb + \lambda^{m+1})^3} n + C_M + C_D + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

де сталі C_M і C_D можна виразити через корені рівняння (5) (див. далі).

Доведення. Спочатку знайдемо похідні по z від розв'язків рівняння (9), користуючись цим рівнянням, отримаємо

$$\lambda'(z) = \frac{b\lambda(z)}{(\lambda(z))^{m+1} + mbz}, \left(\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)} \right)' = - \frac{b(mb + (m+1)(\lambda(z))^m \lambda'(z))}{((\lambda(z))^{m+1} + mbz)^2}.$$

Звідси

$$\lambda' := \lambda'(1) = \frac{b\lambda}{\lambda^{m+1} + mb}, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)} \right)' \Big|_{z=1} = \frac{\lambda''(1)}{\lambda} - \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 = - \frac{b^2((2m+1)\lambda^{m+1} + m^2b)}{(\lambda^{m+1} + mb)^3}. \quad (15)$$

$$\lambda'' := \lambda''(z) \Big|_{z=1} = \frac{b^2 \lambda m (b(1-m) - 2\lambda^{m+1})}{(\lambda^{m+1} + mb)^3} \quad (16)$$

Аналогічні формули мають місце і для функцій $\lambda_k(z)$, $k=1, 2, \dots, m$.

Користуючись (11), знаходимо

$$P'(1) = \frac{C\lambda^n + C\lambda^{n-1}\lambda'n + C_1'\lambda_1^n + C_1\lambda_1^{n-1}\lambda_1' \dots + C_m'\lambda_m^n + C\lambda_m^{n-1}\lambda_m'n}{C\lambda^n + C_1\lambda_1^n + \dots + C_m\lambda_m^n} = \frac{C'}{C} + \frac{\lambda'}{\lambda} n + o(1), \quad (17)$$

при $n \rightarrow \infty$, бо $\left(\frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, k=1, 2, \dots, m$ за лемою 2.

Якщо скористатись (14), то матимемо

$$M\xi = \frac{C'}{C} + \frac{b}{\lambda^{m+1} + mb} n + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (18)$$

що доводить співвідношення (12) теореми.

З виразу для $\ln C(z)$ випливає

$$C_M := \frac{C'}{C} = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k'}{\lambda_k - a} - \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda_k - \lambda}, \quad (19)$$

а за формулами (14) цю сталу можна виразити через корені характеристичного рівняння (5).

Подібно до попереднього, знайдемо

$$P''(1) = \frac{C''}{C} + \frac{2C'}{C} \cdot \frac{\lambda'}{\lambda} n + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 n(n-1) + n \frac{\lambda''}{\lambda} + o(1), n \rightarrow \infty.$$

Якщо скористатись (7), (14), (15) і (17), то

$$D\xi = \frac{C'}{C} + \left(\frac{C'}{C}\right)' + \left(\frac{\lambda'}{\lambda} + \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)'\right)n + o(1) = \frac{C'}{C} + \left(\frac{C'}{C}\right)' + \frac{ab\lambda^{2m+1}}{(\lambda^{m+1} + mb)^3} n + o(1), n \rightarrow \infty, \quad (20)$$

що доводить співвідношення (13) теореми.

З виразу для $\ln C(z)$ випливає

$$C_D := \left(\frac{C'}{C}\right)' = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k''}{\lambda_k - a} - \left(\frac{\lambda_k'}{\lambda_k - a}\right)^2 - \frac{\lambda_k'' - \lambda''}{\lambda_k - \lambda} + \left(\frac{\lambda_k' - \lambda'}{\lambda_k - \lambda}\right)^2, \quad (21)$$

а за формулами (14) і (16) цю сталу можна виразити через корені характеристичного рівняння (5).

Наслідок 1. *Мають місце співвідношення:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M\xi}{n} = \frac{b}{mb + \lambda^{m+1}}, \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D\xi}{n} = \frac{ab\lambda^{2m+1}}{(mb + \lambda^{m+1})^3}. \quad (23)$$

Якщо в співвідношенні (22) взяти $m=1$, $a=b=1$, то отримаємо результат Філіппоні [1, Theorem 4, P.338].

Наслідок 2. *Нехай розподіл випадкової величини задається співвідношеннями (1). Тоді*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M\xi}{n} = \frac{p}{mp + q\lambda^{m+1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D\xi}{n} = \frac{pq^2\lambda^{2m+1}}{(mp + q\lambda^{m+1})^3},$$

де λ додатний корінь рівняння $q\lambda^{m+1} = q\lambda^m + p$.

Наслідок 3. *Нехай $m=1$. Тоді*

$$M\xi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4b}}\right)n + C_M + o(1), \quad D\xi = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + 4b)^3}} n + C_M + C_D + o(1), n \rightarrow \infty,$$

де

$$C_M = \frac{a(a - \sqrt{a^2 + 4b})}{2(a^2 + 4b)}, \quad C_D = \frac{a((a^2 + 6b)\sqrt{a^2 + 4b} - a^3 - 8ab)}{2(a^2 + 4b)^2}.$$

Зокрема, якщо $a=b=1$, то

$$M\xi = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} n + \frac{1 - \sqrt{5}}{10} + o(1), \quad D\xi = \frac{\sqrt{5}}{25} n + \frac{\sqrt{5} - 2}{25} + o(1), n \rightarrow \infty.$$

Для знаходження найбільш ймовірного значення випадкової величини ξ можна діяти подібно тому, як це робиться у випадку біноміального

розподілу, тобто, потрібно розв'язати нерівність $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$ відносно k .

Обмежимося випадком $m=1$.

Теорема 2. Нехай

$$\mu := \frac{n(a^2 + 4b) - (a^2 + 2b) - \sqrt{a^2(a^2 + 4b)(n+1)^2 + 4b^2}}{2(a^2 + 4b)}. \quad (24)$$

Тоді найбільш ймовірними значеннями випадкової величини ξ будуть числа $[\mu]$ (ціла частина числа μ), якщо μ неціле, і μ та $\mu+1$, якщо μ ціле.

Доведення.
$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_{n-k-1}^{k+1} a^{n-2(k+1)} b^{k+1}}{C_{n-k}^k a^{n-2k} b^k} \geq 1, 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow$$

$$k^2(a^2 + 4b) - k(n(a^2 + 4b) - (a^2 + 2b)) + bn^2 - n(a^2 + b) \geq 0, 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Відповідний квадратний тричлен має такі корені:

$$k_{1,2} = \frac{n(a^2 + 4b) - (a^2 + 2b) \pm \sqrt{a^2(a^2 + 4b)(n+1)^2 + 4b^2}}{2(a^2 + 4b)},$$
 а звідси впливає результат

теорема, бо $k_1 > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Якщо параметри a та b натуральні, то можна займатись пошуками таких n , для яких μ ціле. У випадку $a=b=1$ відомо: μ ціле тоді і тільки тоді, коли $n=F_{4s}$, $s=1,2,\dots$, F_r – r -те число Фібоначчі [1, Theorem 6, P.340]. У випадку довільних натуральних a та b потрібно розв'язувати рівняння :

$$x^2 = Ay^2 + 4b^2, \quad A = a^2(a^2 + 4b). \quad (25)$$

Розглянемо випадки.

1). Якщо A повний квадрат, то шукаємо розв'язки серед піфагорових трійок.

2). Нехай A не є повним квадратом і $b=1$. Тоді рівняння (25) рівносильне рівнянню Пелля $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2(a^2 + 4)\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1$, найменший розв'язок якого $(a^2+2, 1)$, а тому (див., наприклад, [2]) можна отримати нескінченну множину розв'язків (x_s, y_s) рівняння (25) за формулами

$$x_s = 2^{-s} ((a^2 + 2 + a\sqrt{a^2 + 4})^s + (a^2 + 2 - a\sqrt{a^2 + 4})^s),$$

$$y_s = \frac{2^{-s}}{a\sqrt{a^2 + 4}} ((a^2 + 2 + a\sqrt{a^2 + 4})^s - (a^2 + 2 - a\sqrt{a^2 + 4})^s),$$

$$s=1,2,3,\dots$$

Ці формули можна перетворити, скориставшись тим, що

$$\frac{1}{2}(a^2 + 2 \pm a\sqrt{a^2 + 4}) = \left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}\right)^2$$
 і тоді $x_s = t_{2s}$, $y_s = a^{-1}u_{2s-1}$, де

$$u_{2s-1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4}} (\lambda^{2s} - \lambda^{-2s}), \quad t_{2s} = (\lambda^{2s} + \lambda^{-2s}), \quad \lambda = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Далі n шукаємо серед чисел y_s-1 , а якщо врахувати таку властивість чисел u і

$$t: (a^2+4)u_{2s-1}-at_{2s}=2t_{2s-1}, \text{ то } \mu = \frac{t_{2s-1}-(a^2+3)a}{(a^2+4)a}, s=1,2,3,\dots$$

Якщо s парне, то $t_{2s-1}-a(a^2+3)$ ділиться націло на $a(a^2+4)$.

3). Нехай A не є повним квадратом і $b>1$. Тоді (див. ,наприклад, [1]) можна користуватись такою множиною розв'язків рівняння (25):

$$x_s = \frac{1}{2}(a^2 + 2b + \sqrt{A})(x_0 + y_0 \sqrt{A})^s + \frac{1}{2}(a^2 + 2b - \sqrt{A})(x_0 - y_0 \sqrt{A})^s,$$

$$y_s = \frac{1}{2\sqrt{A}}(a^2 + 2b + \sqrt{A})(x_0 + y_0 \sqrt{A})^s - \frac{1}{2\sqrt{A}}(a^2 + 2b - \sqrt{A})(x_0 - y_0 \sqrt{A})^s,$$

$s=1,2,3,\dots$, де (x_0, y_0) найменший нетривіальний розв'язок рівняння Пелля $x^2=Ay^2+1$.

П р и к л а д и .

a	1	1	1	1	1	2	3	3	4
b	1	3	4	9	10	1	1	3	1
n	20	1908	104	300	8768	203	1308	114	5795
μ	5	649	39	125	3699	29	109	19	365

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Piero Filippini. A note on the representation of integeres as a sum of distinct Fibonacci numbers// The Fibonacci Quarterly.–1986.–24, №4.–Р.332–335.
2. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах.–М.:Наука, 1978.

Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка

Надійшло 18 травня 2004р.

УДК 518.3 / 681.142.2

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ А-МЕТОДА В.К.ДЗЯДЫКА И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ СРЕДСТВАМИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

П.Н.Денисенко

Побудовано аналітичний наближений метод розв'язування задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь порядку k з многочленними коефіцієнтами -- ЛДУМК. Вихід методу – многочлен. Цей многочлен оптимально апроксимує розв'язок задачі Коші для ЛДУМК і тотожний многочлену який одержують за а-методом В.К.Дзядика. Побудований метод не має найбільш складного перетворення а-методу В.К.Дзядика – перетворення задачі Коші в інтегральне рівняння. Засобами системи алгебраїчного програмування APS метод перетворено в обчислювальну процедуру на мові програмування APLAN.

Analytic approximation method of solving initial-value problem for linear differential equations with polynomial coefficients (LDEPC) of order k is presented. Output of the method is a polynomial. This polynomial optimally approximates the solution of initial-value problem for LDEPC and is identically equal to the polynomial computed by V.K. Dzyadyk a-method. The method presented does not contain the most complex transformation of V.K. Dzyadyk a-method - transformation of initial-value problem into the integral equation. The method is implemented by means of algebraic programming system in a computation procedure in APLAN programming language.

1 Проблема

Линейные дифференциальные уравнения порядка k

$$LDUMK := (D[y] = 0); D[y] = A * y^{(k)} + \dots + C * y + G; \quad (1)$$

где коэффициенты A, \dots, C, G являются известными многочленами независимой переменной x , y – неизвестная (искомая) функция переменной x (ЛДУМК), являются классическим аппаратом математического моделирования. ЛДУМК определяют основную часть элементарных функций и специальных функций математической физики (СМФ). Решение уравнений этого типа в виде конечной композиции элементарных функций или в квадратурах удастся найти только для очень узкого подкласса ЛДУМК. Поэтому в связи с потребностями практики постоянно разрабатывались методы приближенного решения ЛДУМК (1). Одним из старейших методов решения уравнений этого типа является метод разложения в ряд Тейлора. Согласно этому методу решение задачи Коши для уравнения (1) – системы из уравнения (1) и условий в начальной точке d

$$init_cond := \{ y(d) = Y_0, y'(d) = Y_1, \dots, y^{(k-1)}(d) = Y_{k-1} \}; \quad (2)$$

в окрестности точки d приближается отрезком ряда Тейлора порядка n

$$T[n, y, d, x] = c_0 + c_1 * (x - d) + \dots + c_n * (x - d)^n$$

Погрешность $y(x) - T[n, y, d, x]$ метода разложения в ряд Тейлора пропорциональна $(x - d)^{n+1}$. При больших значениях $x - d$ эта погрешность медленно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, а если значение $x - d$ больше радиуса сходимости ряда Тейлора, то эта погрешность вообще не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Погрешность метода обычно оценивают в пространстве $C[a, b]$ -- пространстве Банаха функций непрерывных на отрезке аппроксимации $[a, b]$ с равномерной (Чебышевской) нормой

$$\|y\|_{C[a,b]} = \max \{ |y(x)|, x \in [a, b] \}$$

Коэффициент оптимальности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом разложения в ряд Тейлора в пространстве $C[a, b]$ с ростом n растет со скоростью геометрической прогрессии

$$\text{Opt}(\text{метод разложения в ряд Тейлора}, \text{задача Коши}, [a, b], n, C[a, b]) = \|y - T[n, y, d, x]\|_{C[a,b]} / E[n, y, C[a, b]] = O(q^n),$$

где $q > 2$,

$$E[n, y, C[a, b]] := \inf_{C_i} \|y - (C_0 + C_1 * x + \dots + C_n * x^n)\|_{C[a,b]}$$

– величина наилучшего приближения функции y многочленами степени n в пространстве $C[a, b]$. Эти обстоятельства, а также необходимость вычисления большого числа частных производных, резко ограничивают область применения метода разложения в ряд Тейлора.

Аналитические приближенные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) – методы вычисления алгебраических многочленов

$$y_n = c_0 + c_1 * x + \dots + c_n * x^n \quad (3)$$

приближающих решение y этой задачи -- разработаны для отдельных типов ОДУ и для отдельных уравнений. Для оценки эффективности этих методов наиболее часто используют критерий -- точность аппроксимации в пространстве $C[a, b]$.

Если метод имеет ограниченный коэффициент оптимальности

$$\text{Opt}(\text{метод}, \text{задача Коши для ОДУ}, [a, b], n, C[a, b]) < \text{Const},$$

то он оптимален по точности аппроксимации в пространстве $C[a, b]$.

Наибольшее аналитических приближенных методов построено для решения задачи Коши для ЛДУМК (1), (2). Это тау-метод Ланцоша, а-метод В.К.Дзядыка [1], метод Кленшоу, метод Миллера и другие. Оптимальным по точности методом решения задачи Коши для ЛДУМК является а-метод В.К.Дзядыка. В а-методе выполняют следующие преобразования:

– смещение ЛДУМК (1) и начальных условий (2) к новой начальной точке

$$d := 0; \quad (4)$$

– преобразование смещенной задачи Коши для ЛДУМК (1), (2), (4) в линейное интегральное уравнение Вольтерра с коэффициентами и ядром являющимися многочленами (ЛИУМК) эквивалентное задаче Коши

$$LIUMK := (F[y] = 0) := \text{Int_equation}(LDUMK, \text{init_cond}); \quad (5)$$

$$F[y] = F[y, x] := A * y + V[K * y] + G; \quad V[u] := \int_0^x u(t) dt; \quad (6)$$

– решение ЛИУМК (5) на отрезке $[a - d, b - d]$ а-методом В.К.Дзядыка и вычисление аппроксимирующего многочлена вида (3)

$$y_n = solve_a-method(LIUMK, [a - d, b - d], n); \quad (7)$$

– линейный перенос многочлена y_n (7) к начальной точке условий (2).

Метод (7) решения ЛИУМК -- *solve_a-method* -- предполагает аппроксимацию уравнения (5) – добавление в это уравнение невязки с тау-коэффициентами

$$F[y_n] + E_m = 0; \quad (8)$$

$$m := deg(F[y_n]); \quad (9)$$

$$E_m := tau_1 * f(n + 1, x) + \dots + tau_{m-n} * f(m, x); \quad (10)$$

и базисом $\{f(i, x), i = 0, 1, \dots\}$ -- многочлены Чебышева первого рода линейно перенесенные на отрезок аппроксимации $[a, b]$

$$f(i, x) := \cos(i * arccos(z)); \quad z := 2 * (x - a) / (b - a) - 1; \quad (11)$$

Преобразование задачи Коши для ЛДУМК (1), (2), (4) в ЛИУМК (5) является наиболее сложным в а-методе. Формулы этого преобразования получены В.К.Дзядыком [1] и не реализованы программно в общем виде. Тау-метод Ланцоша, метод Кленшоу, метод Миллера и а-метод В.К.Дзядыка широко применяются для вычисления коэффициентов Фурье-Чебышева специальных функций математической физики (СМФ). Поэтому актуальна следующая задача.

Задача 1. Построить оптимальной по точности аналитический приближенный метод решения задачи Коши для ЛДУМК (1), (2) на отрезке. Метод не имеет преобразования задачи Коши для ЛДУМК (1), (2) в ЛИУМК.

2 Компьютерный аспект проблемы

Системы компьютерной алгебры стали средой математического моделирования. Они широко применяются в практике моделирования. Системы компьютерной алгебры имеют эффективные средства для программирования символьного преобразования многочленов вида (3). Если многочлен размещается в оперативной памяти компьютера, то, как правило, система компьютерной алгебры достаточно эффективно выполняет все известные алгебраические, дифференциальные и интегральные преобразования этого многочлена. Поэтому в системе компьютерной алгебры:

– предпочтительным объектом символьного преобразования является многочлен степени n вида (3);

– предпочтительным приближенным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений является аналитический метод: согласно этому методу система вычисляет многочлен вида (3) и этот многочлен оптимально по точности аппроксимирует решение ОДУ на отрезке $[a, b]$.

Средствами алгебраического программирования а-метод В.К.Дзядыка реализован [2] в виде APLAN-процедуры. В системе алгебраического программирования APS эта процедура решает задачу Коши для ЛДУМК общего вида (1), (2) с точкой задания начальных условий вида (4). Эта процедура имеет оператор *Int_equation*. Он выполняет наиболее сложное преобразование а-метода В.К.Дзядыка [1] – задачи Коши (1), (2), (4) в ЛИУМК (5) и требует оперативной памяти больше, чем остальная процедура. Поэтому программы для решения задачи Коши для ОДУ, построенные на основе этого оператора и итерационных методов согласно идеи В.К.Дзядыка, требуют память, как правило, большую чем имеет система APS.

Решение задачи Коши для ЛДУМК (1), (2) процедурой, реализующей дифференциальный алгоритм а-метода В.К.Дзядыка [3], тождественно а-методу [1] на очень важных для практики классах ЛДУМК (1)

$$k = 1; \text{ и } k = 2; A = Const.$$

Но эти классы ЛДУМК не содержат всех ЛДУМК применяемых на практике.

Исходя из изложенного выше, для систем компьютерной алгебры актуальна следующая задача.

Задача 2. В системе компьютерной алгебры построить процедуру для решения задачи Коши для ЛДУМК (1), (2) на отрезке $[a, b]$. Процедура вычисляет многочлен вида (3). Этот многочлен аппроксимирует решение исходной задачи Коши на отрезке $[a, b]$ оптимально по точности. Процедура не имеет преобразования задачи Коши для ЛДУМК (1), (2) в ЛИУМК (5).

3 Интегро-дифференциальный алгоритм а-метода

Идея. Вычислить аппроксимирующее уравнение (8) а-метода В.К.Дзядыка (5) – (11) в результате непосредственного преобразования задачи Коши для ЛДУМК (1), (2), (4).

Метод 1:

– вычислить аппроксимацию ЛДУМК (1)

$$SD := (coefTayl(D[y_n] + E_m^{(k)}, i) = 0, i := 0, \dots, m - k;); \quad (12)$$

где невязка E_m имеет вид (10) и параметр

$$m = k + q; \quad q = deg(D[y_n]); \quad k = ord_equ(D[y]); \quad (13)$$

– вычислить аппроксимацию начальных условий (2), (4) СЛАУ

$$SI := (D[j, y_n(d), d] + E_m^{(j)}(d) = D[j, init_cond, d], j := 1, \dots, k;); \quad (14)$$

где оператор

$$D[j, y, x] := D[j, y] := DV[D[j - 1, y]]; \quad (15)$$

это дифференциальная часть первообразной порядка j оператора $D[y]$ (1);

$D[j, y_n(d), d]$ -- подстановка в оператор $D[j, y, x]$ многочлена y_n (3) с символьными коэффициентами и точки задания начальных условий (2);

$D[j, init_cond, d]$ -- подстановка в оператор $D[j, y, x]$ условий (2).

Пример 1. Функция $\ln(x + 1)$ является решением задачи Коши
 $(x + 1) * y' = 1; \quad y(0) = 0;$ (16)

Процедура *Int_equation* преобразует задачу Коши (16) в ЛИУМК (5) вида

$$(x + 1) * y - V[y] - x = 0; \quad (17)$$

Аппроксимация ЛИУМК (17) а-методом В.К.Дзядыка (8) -- (10) имеет:

1) параметр (9) невязки (10)

$$m := \text{deg}(F[y_n]) := n + 1;$$

2) невязку (10) с одним тау-коэффициентом

$$E_m := \text{tau} * f(n + 1, x);$$

3) уравнение (8) эквивалентное СЛАУ вида

$$S := \{ \text{coefTayl}(F[y_n] + E_m, i) = 0, \quad i := 0, \dots, m; \} :=$$

$$\begin{cases} a(m, 0) * \text{tau} + c_0 = 0, \\ a(m, 1) * \text{tau} + c_1 - 1 = 0, \\ a(m, 2) * \text{tau} + c_2 + 1/2 * c_1 = 0, \\ \dots \\ a(m, i) * \text{tau} + c_i + (i - 1) / i * c_{i-1} = 0, \\ \dots \\ a(m, m) * \text{tau} + n/m * c_n = 0 \end{cases}; \quad (18)$$

где $m := n + 1;$

$a(m, i)$ -- коэффициенты многочлена базиса невязки $f(m, x)$.

Аппроксимация задачи Коши для ЛДУМК (16) методом (12) – (14) имеет:

1) параметр m (13) невязки (10) тождественный параметру невязки а-метода

$$k := \text{ord_equ}(D[y]) := 1; \quad m := k + \text{deg}(D[y_n]) := n + 1;$$

2) невязку с одним тау-коэффициентом – вида тождественного виду невязки аппроксимации ЛИУМК (17) а-методом;

3) СЛАУ (12) вида

$$SD := \{ \text{coefTayl}(D[y_n] + E_m', i) = 0, \quad i := 0, \dots, n; \} :=$$

$$\begin{cases} a(m, 1) * \text{tau} + c_1 - 1 = 0, \\ 2 * a(m, 2) * \text{tau} + 2 * c_2 + c_1 = 0, \\ \dots \\ i * a(m, i) * \text{tau} + i * c_i + (i - 1) * c_{i-1} = 0, \\ \dots \\ m * a(m, m) * \text{tau} + n * c_n = 0 \end{cases};$$

и эта СЛАУ тождественна части $(i = 1, \dots, m;)$ СЛАУ S (18);

4) СЛАУ (14) вида

$$SI := (y_n(0) + E_m(0) = 0) := (c_0 + a(m, 0) * \text{tau} = 0);$$

и эта СЛАУ тождественна первому уравнению СЛАУ (18) $SI = S, (i = 0);$

4 Обоснование интегро-дифференциального алгоритма а-метода

Теорема 1. Пусть:

- точка задания начальных условий (2) имеет вид (4) -- $d = 0$,
- ЛДУМК (1) не имеет особенности вида $A(d) = 0$.

Тогда тождественны: СЛАУ а-метода В.К.Дзядыка

$$S := (\text{coefTayl}(F[y_n] + E_m, i) = 0, i := 0, \dots, m); \quad (19)$$

и объединение СЛАУ (12) и (14) метода 1 -- $\text{conc}(SI, SD)$.

Доказательство. Согласно определения ЛИУМК (5), для оператора этого ЛИУМК и оператора ЛДУМК (1) имеет место тождество

$$(F[y])^{(k)} = D[y]; \quad (20)$$

Поэтому теорема 1 является непосредственным следствием лемм 1 – 5. Леммы доказаны ниже.

Лемма 1. Пусть:

- порядок а-метода В.К.Дзядыка (4) -- (11) и интегро-дифференциального алгоритма а-метода (12) – (14) $n > k - 1$,
- для операторов $D[y]$ ЛДУМК (1) и $F[y]$ (6) ЛИУМК (5) имеет место тождество (20).

Тогда вид невязки E_m (10) для уравнения (8) тождественен виду этой невязки для СЛАУ (12), (14).

Доказательство. Согласно правил дифференцирования, для многочленов P_m степени $m > k - 1$ имеет место тождество

$$\text{deg}(P_m^{(k)}) = \text{deg}(P_m) - k;$$

Согласно этого тождества и тождества (20) имеет место тождество

$$\text{deg}(F[y_n]) = \text{deg}(D[y_n]) + k, \quad (21)$$

где многочлены $D[y_n]$ и $F[y_n]$ являются результатами преобразований операторами $D[y]$ (2) и $F[y]$ (6) многочлена y_n вида (3) с символьными коэффициентами. Тождество (21) является тождеством значений параметра m (9) невязки (10) уравнения (8) и параметра m (13) невязки (10) СЛАУ (12) и (14). Параметры n , m однозначно определяют вид невязки (10).

Лемма 2. Пусть для оператора $D[y]$ ЛДУМК (1) и оператора $F[y]$ (6) ЛИУМК (5) имеет место тождество (20).

Тогда СЛАУ (12) тождественна уравнениям $i := k, \dots, m$; СЛАУ (19)

$$SD = S(i := k, \dots, m);$$

Доказательство. Согласно правил дифференцирования, для многочленов P_m степени $m > i$ и $j < i$ имеет место тождество

$$\text{coefTayl}(P_m, i) * i! := \text{coefTayl}(P_m^{(j)}, i - j) * (i - j)!$$

Согласно этого тождества и тождества (20), если $i > k$, то имеет место тождество

$$\text{coefTayl}(F[y_n], i) * i! := \text{coefTayl}(D[y_n], i - k) * (i - k)!$$

где многочлены $D[y_n]$ и $F[y_n]$ являются результатами преобразований операторами $D[y]$ (1) и $F[y]$ (6) многочлена y_n вида (3) с символьными

коэффициентами. Согласно лемме 1, вид невязки уравнения (8) и СЛАУ (12) тождественен. Поэтому, если $i > k$, то имеет место тождество

$$\text{coefTayl}(E_m, i) * i! := \text{coefTayl}(E_m, i - k) * (i - k)!$$

Из этих тождеств непосредственно следует тождество СЛАУ (12) и части ($i = k, \dots, m$;) СЛАУ (19). □

Лемма 3. Пусть:

– для оператора $D[y]$ (1) и оператора $F[y]$ (6) имеет место тождество (20),

– операторы $D[j, y, x]$ (15) удовлетворяют начальным условиям (2), (4).

Тогда имеют место тождества

$$(F[y, x = 0])^{(k-i)} = D[i, y, x = 0] - D[i, \text{init_cond}], \quad i = 1, \dots, k \quad (22)$$

Доказательство. Значение линейного интегрального оператора

Вольтерра $V[u]$ (6) в точке ноль, очевидно, равно нулю. Поэтому оператор $F[y]$ (6) в точке ноль имеет значение

$$F[y, x = 0] = A(0) * y(0) + G(0); \quad G(0) = -A(0) * Y_0;$$

Согласно тождества (20) оператор $D[k, y, x]$ имеет вид

$$D[k, y, x] = A * y$$

Поэтому справедливы тождества

$$D[k, y, x] = A(0) * y(0), \quad D[k, \text{init_cond}] = A(0) * Y_0$$

и, следовательно, тождество (22) имеет место в случае $i = k$. Тождество (22) для производных оператора $F[y]$ доказывается аналогично. □

Лемма 4. Операторы (15) имеют вид

$$D[i, y] = A * y^{(k-i)} + \dots + E * y; \quad i = 1, \dots, k; \quad (23)$$

Доказательство. Согласно определения (15) и лемме 3, операторы $D[i, y]$, $i = 1, \dots, k$, являются дифференциальным слагаемым производной порядка $k - i$ оператора $F[y]$ (6). Согласно определения оператора $F[y]$ (6), дифференциальное слагаемое его производной порядка $k - i$ имеет вид (23). □

Лемма 5. Пусть ЛДУМК (1) не имеет особенности вида $A(d) = 0$ в точке задания начальных условий (2) вида (4) $d = 0$.

Тогда тождественны СЛАУ (14) и первые k уравнений СЛАУ (19)

$$SD := S(i := 0, \dots, k - 1;);$$

Доказательство. Доказываемое тождество является непосредственным следствием тождеств (22), (23) и тождества вида невязки СЛАУ (14) и (19).

Последнее тождество доказано в лемме 1. □

5 Реализация метода (12) – (14) в APS

Вход: – ЛДУМК (1),

– начальные условия (2) с начальной точкой вида (4),

– отрезок аппроксимации $[a, b]$,

– порядок искомого аппроксимирующего многочлена вида (3).

Выход.

Многочлен вида (3) – решение задачи Коши (1), (2), (4) методом (12) – (14).

Алгоритм 1. Операции преобразования -- вычислить:

1. Объединение СЛАУ (12) и (14)

$$S := \text{conc}(SI, SD); \quad (24)$$

2. Решение СЛАУ (24) -- коэффициенты многочленов y_n, E_m

$$\text{Coef} := \text{solve}(S); \quad (25)$$

3. Многочлен y_n вида (3) с коэффициентами c_0, \dots, c_n из списка (25)

$$y_n := \text{ser}(n, \text{Coef}); \quad (26)$$

Решение задачи Коши (16) по алгоритму 1 с базисом невязки тождественным базису ряда Тейлора $\{x^i\}, n := 2; E_m := \text{tau} * x^3;$

1. СЛАУ (14) аппроксимирующая начальное условие $\{y = 0\}$

$$SI := \{D[1, y_n(d), d] + E_m(d) = D[1, \text{init_cond}, d]\} := \{c_0 = 0\};$$

СЛАУ (12) аппроксимирующая ЛДУМК $\{(x+1) * y' - 1 = 0\}$

$$SD := \{\text{coefTayl}(D[y_n] + E_m^{(k)}, i) = 0, i := 0, \dots, m - k;\} := \\ \{ \\ \quad c_1 - 1 = 0, \\ \quad 2 * c_2 + c_1 = 0, \\ \quad 3 * \text{tau} + 2 * c_2 = 0\};$$

2. Решение объединения (24) этих СЛАУ

$$\text{Coef} := \text{solve}(S) := \{\text{tau} = 1/3, c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 1/2\};$$

3. $y_n := \text{ser}(n, \text{Coef}) := x - 1/2 * x^2;$

Решение задачи Коши (16) по алгоритму 1 с базисом невязки (11)

$$n := 2; \text{interval} := (0, 1); E_m := \text{tau} * \text{cheb}(n+1, 2x - 1);$$

1. СЛАУ (14) аппроксимирующая условие $\text{init_cond} := (y(0) = 0);$

$$SI := \{D[1, y_n(d), d] + E_m(d) = D[1, \text{init_cond}, d]\} := \{-\text{tau} + c_0 = 0\};$$

СЛАУ (12) аппроксимирующая ЛДУМК $\{(x+1) * y' - 1 = 0\}$

$$SD := \{\text{coefTayl}(D[y_n] + E_m^{(k)}, i) = 0, i := 0, \dots, m - k;\} := \\ \{ \\ \quad 18 * \text{tau} + c_1 - 1 = 0, \\ \quad -96 * \text{tau} + 2 * c_2 + c_1 = 0, \\ \quad 96 * \text{tau} + 2 * c_2 = 0\};$$

2. Решение объединения (24) этих СЛАУ

$$\text{Coef} := \text{solve}(S) := \{\text{tau} = 1/210, c_2 = -8/35, c_1 = 32/35, c_0 = 1/210\};$$

3. $y_n := \text{ser}(n, \text{Coef}) := -8/35 * x^2 + 32/35 * x + 1/210;$

Структура данных. Структура данных построенной процедуры тождественна структуре данных процедур [2] и [3].

1. Слагаемые ЛДУМК (1) упорядочены по порядку производных и ЛДУМК имеет вид принятый в системе Maple III

$$\text{LDUMK} := (A * \text{dif}(y, k) + \dots + C * y + g = 0);$$

где y -- атом, коэффициенты A, \dots, B, C, g -- многочлены переменной (атома) x естественного вида.

2. Начальные условия (2), (4) задаются в виде принятом в системе Maple III. Начальная точка (4) определяется оператором присвоения

InitPoint := 0 ;

и значения производных в этой точке определяются в виде списка

init_cond :=

(y = Y0 , dif(y,1) = Y1 , ... , dif(y,s) = Ys) ;

где y - атом, $s := k - 1$;

3. Описание отрезка аппроксимации $[a, b]$ имеет вид

interval := (a , b) ;

4. Процедура вычисляет объединение (24) СЛАУ (12), (14). Неизвестными СЛАУ (24) являются коэффициенты многочленов y_n (3) и E_m (10). Для коэффициентов невязки принято обозначение $tau_i = c_{n+i}$. Поэтому неизвестные СЛАУ (24) имеют вид -- атом c с индексом

c(0) , ... , c(n) , ... , c(m)

Для вычисления СЛАУ (24) процедура преобразует многочлены y_n , E_m с символьными коэффициентами этого вида.

5. Результат (25) решения СЛАУ (24) процедура вычисляет в виде списка тождеств

c(0) = d , ... , c(n) = e , ... , c(m) = f

6. Многочлен (26) процедура вычисляет в естественном виде.

Алгебраическая спецификация алгоритма 1.

```
S := aprox_Dzyadyk( LDUMK , InitPoint , init_cond ,
interval , n ) ; /* аппроксимация задачи Коши СЛАУ */
Xn := c ; /* имя неизвестных в СЛАУ */
Coef := solve(S) ; /* решение СЛАУ */
y_n := ser(n , Coef) ; /* y_n с коэффициентами Coef */
```

Выводы из алгебраической спецификации алгоритма 1.

1. Вид спецификации тождественен виду спецификации процедуры [2] для тау-метода Ланцоша.
2. Спецификация процедуры имеет один новый, относительно спецификации процедуры тау-метода Ланцоша [2], оператор -- *aprox_Dzyadyk*.
3. Операторы процедуры (согласно их спецификации):
 - выполняют вычисления в арифметике рациональных чисел;
 - имеют по параметру n полиномиальную сложность

$$Q(\text{solve_ode}, n) = O(n * Q(\text{canplf}, n^2)) + O(n^3) ;$$

$$Q(\text{solve}, n) = O(n^3) ;$$

$$Q(\text{ser}, n) = O(n) ;$$

где $Q(\text{canplf}, m)$ -- сложность преобразования оператором *canplf* многочлена P к виду каноническому для системы APS – сумма слагаемых вида $c(i) * x^j \$ b$, m -- число слагаемых многочлена *canplf*(P).

4. Процедура имеет по параметру n полиномиальную сложность

$$O(n * Q(\text{canplf}, n^2)) + O(n^3) ;$$

APLAN-программа.

1. Файлы выполнения программы:

- D_3_1.BAT – для программы с базисом невязки – базисом ряда Тейлора,
 D_3_2.BAT – для программы с базисом невязки вида (11).
2. Файлы с оператором *aprox_Dzyadyk* -- информатива программы:
 D_3_1.AP -- базисом невязки является базис ряда Тейлора;
 D_3_2.AP -- базисом невязки являются многочлены Чебышева (11).
3. Файл с операторами *process* и *task* -- TASK_d_1.AP -- директива программы. Эта директива тождественна директиве программы реализующей тау-метод Ланцоша [2].

Решение задачи Коши (16) построенной процедурой.

APLAN-описание задачи Коши (16) и отрезка аппроксимации $[0,1]$ имеет вид

```
process[1]:= (
  LDUMK      := ( (x + 1) * dif(y , 1) + (-1) = 0 ) ;
  InitPoint  := 0 ;
  init_cond  := ( y = 0 ) ;
  interval   := ( 0 , 1 ); ... );
```

Результаты преобразования этой задачи Коши построенной выше APLAN-процедурой при $n := 2$; и базисе невязки тождественном базису ряда Тейлора имеют вид:

```
S := aprox_Dzyadyk ( LDUMK , InitPoint , init_cond ,
  interval , n ) :=
  ( c 0 = 0 , c 1 + -1 = 0 , c 2 $ 2 + c 1 = 0 );
Xn := c; Coef := solve(S) :=
  ( c 0 = 0 , c 1 = 1 , c 2 = rat(-1 , 2) );
y_n := ser(n , Coef) := x + -1/2 * x ^ 2 ;
```

Результаты преобразования этой задачи Коши построенной выше APLAN-процедурой при $n := 2$; и базисе невязки (11) имеют вид:

```
S := aprox_Dzyadyk ( LDUMK , InitPoint , init_cond ,
  interval , n ) :=
  ( c 3 $ -1 + c 0 = 0 ,
    c 3 $ 18 + c 1 + -1 = 0 ,
    c 3 $ -96 + c 2 $ 2 + c 1 = 0 ,
    c 3 $ 96 + c 2 $ 2 = 0 ) ;
Xn := c ; Coef := solve(S) :=
  ( c 0 = rat(1,210) , c 1 = rat(32,35) ,
    c 2 = rat(-8,35) , c 3 = rat(1,210) );
y_n := ser(n , Coef) :=
  x ^ 2 $ rat(-8,35) + x $ rat(32,35) + rat(1,210) ;
```

В приведенных выше результатах:

\$ -- операция языка APLAN умножения термина на число,

$rat(p, q) := p/q$; -- рациональное число,

c_0 , c_1 , c_2 , c_3 -- результат вывода атома с индексом

$c(0)$, $c(1)$, $c(2)$, $c(3)$ оператором *prn* системи APS.

6 Оператор *aprox_Dzyadyk*

Вход: – ЛДУМК (1) ,
 – условия (2) в начальной точке вида (4) ,
 – отрезок аппроксимации $[a, b]$,
 – порядок искомого многочлена вида (4).

Выход – СЛАУ (24).

Метод.

1. Многочлен y_n (3) с символьными коэффициентами подставляют в оператор $D[y]$ ЛДУМК (1) и вычисляют многочлен $D[y_n] := D_0 + \dots + D_q * x^q$; $D_i := a(i, 0) * c_0 + \dots + a(i, n) * c_n + b_i$;
2. Вычисляют параметры q, k, m (13) СЛАУ (12) и невязку E_m (10) с символьными коэффициентами.
3. Вычисляют СЛАУ (12).
4. Вычисляют дифференциальную часть первообразных $D[i, y]$ порядка $i := 1, \dots, k$; оператора $D[y]$ (1) и СЛАУ (14).

Алгоритм 1. Операции преобразования -- вычислить:

1. Оператор $D[y]$ ЛДУМК (1).
2. Порядок дифференциального оператора $D[y]$.
3. Многочлен y_n (3) с символьными коэффициентами.
4. Преобразование $D[y_n]$ многочлена y_n оператором $D[y]$.
5. Порядок многочлена $D[y_n]$ и параметр m невязки.
6. Невязку E_m (10) с символьными коэффициентами для отрезка $[-1, 1]$.
7. Линейное преобразование $z: [a, b] \rightarrow [-1, 1]$.
8. Невязку E_m (10) с символьными коэффициентами для отрезка $[a, b]$.
9. Многочлен $D[y_n] + E_m^{(k)}$.
10. Систему линейных алгебраических уравнений (12).
11. Систему линейных алгебраических уравнений (14) -- для $i := 1, \dots, k$; интегрировать оператор $D[y]$ и вычислить:
 - 11.1. $D[i, y, x]$ -- дифференциальный оператор i -той первообразной оператора $D[y]$.
 - 11.2. $D[i, y, d]$ -- значение оператора $D[i, y, x]$ в точке $d := 0$; (4) -- дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.
 - 11.3. $D[i, y_n(x), d] := D_n(x)$; -- преобразование многочлена y_n (3) с символьными коэффициентами оператором $D[i, y, d]$.
 - 11.4. $D_i(x) := D[i, y_n(x), d] + E_m^{(k-i)}$; -- многочлен.
 - 11.5. $D_i(d)$ -- значение многочлена $D_i(x)$ в точке d .
 - 11.6. $D[i, init_cond, d]$ -- подстановка в оператор $D[i, y, d]$ условий (2), (4) -- число.
 - 11.7. Уравнение СЛАУ (14) -- аппроксимацию $k - i$ -- того условия (2).

12. Объединение СЛАУ (14) и СЛАУ (12).

Преобразование задачи Коши (16) по алгоритму 2 с базисом невязки (11), $interval := (0, 1)$; $n := 2$;

1. $D[y] := (x + 1) * y' + 1$;
2. $k := 1$;
3. $y_n := c_2 * x^2 + c_1 * x + c_0$;
4. $D[y_n] := (x + 1) * (2 * c_2 * x + c_1)$;
5. $q := deg(D[y_n]) := 2$; $m := q + k := 3$; $m - n := 1$;
6. $E_m := tau * cheb(3, x) := tau * (4 * x^3 - 3 * x)$;
7. $z := 2 * x - 1$;
8. $Em(z) := tau * cheb(3, 2 * x - 1) := tau * (32 * x^3 - 48 * x^2 + 18 * x - 1)$;
9. $D[y_n] + E_m^{(k)} := (x + 1) * (2 * c_2 * x + c_1) + tau * (96 * x^2 - 96 * x + 18)$;
10. $SD := \{coefTayl(D[y_n] + E_m^{(k)}, i) = 0, i := 0, \dots, m - k\}$
 $:= \{18 * tau + c_1 - 1 = 0,$
 $-96 * tau + 2 * c_2 + c_1 = 0,$
 $96 * tau + 2 * c_2 = 0\}$;
- 11.1. $D[1, y, x] := (x + 1) * y$;
- 11.2. $D[1, y, 0] := y$;
- 11.3. $D[1, y_n(x), 0] := c_2 * x^2 + c_1 * x + c_0$;
- 11.4. $D[1, y_n, 0] + E_m :=$
 $c_2 * x^2 + c_1 * x + c_0 + tau * (32 * x^3 - 48 * x^2 + 18 * x - 1)$;
- 11.5. $D[1, y_n(0), 0] + E_m(0) := -tau + c_0$;
- 11.6. $D[1, init_cond, 0] := 0$;
- 11.7. $\{D[1, y_n(0), 0] + E_m(0) = D[1, init_cond, 0]\} := \{-tau + c_0 = 0\}$;
12. $conc(SI, SD) :=$
 $\{-1 * tau + c_0 = 0,$
 $18 * tau + c_1 - 1 = 0,$
 $-96 * tau + 2 * c_2 + c_1 = 0,$
 $96 * tau + 2 * c_2 = 0\}$;

Структура данных. Структуру данных на входе и выходе построенного оператора определяет основная процедура. Для вычисления СЛАУ (24) оператор преобразует многочлены y_n , E_m с символьными коэффициентами. Аппроксимирующий многочлен (3) оператор вычисляет в виде

$$\mathbf{y_n} := \mathbf{c}(0) + \mathbf{c}(1) * \mathbf{x} + \dots + \mathbf{c}(n) * \mathbf{x}^n ;$$

Невязку (10) с базисом (11) оператор вычисляет на отрезке $[-1, 1]$ в виде

$$\mathbf{E_m} := \mathbf{c}(n + 1) * \mathbf{cheb}(n + 1, \mathbf{x}) + \dots + \mathbf{c}(m) * \mathbf{cheb}(m, \mathbf{x}) ;$$

и линейно переносит на отрезок аппроксимации $[a, b]$ -- заменой переменных

$$\mathit{subs}(x = z, E_m), z := 2 * (x - a) / (b - a) - 1 ;$$

Алгебраическая спецификация алгоритма 2.


```

aprox_Dzyadyk := proc( LDUMK , InitPoint , init_cond
, interval , n ) loc(y_n,k,SD,S,Dy,Dn,Di,D0,Ri,E_m,m) (
  let( LDUMK , Dy = 0 ); /* оператор D[y] */
  k := ord_equ(Dy); /* порядок ЛДУМК */
  y_n := main_pol(n); /* y_n с коэфф. c(i) */
/* АППРОКСИМАЦИЯ ЛДУМК */
  Dn := canplf(sub_du(Dy,y_n)); /* D[y_n] */
  m := deg(canplf(ein_pol(Dn))); /* порядок D[y_n] */
  E_m := Enl(n,m+k-n); /* E_m(x) */
  S := canplf( (2/(arg(interval,2) + (-1) * /* z(x)*/
arg(interval,1))*(x + (-1) * arg(interval,1) ) + (-1);
E_m --> canplf( subs( x = S, E_m )); /* E_m(z) */
  Dn --> canplf(Dn + nd_x(E_m,k)); /* аппрок. D[y] */
  SD := pol_equ(Dn,m); /* СЛАУ аппр. Dy = 0 */
/* АППРОКСИМАЦИЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ */
  for (i:=1, i<=k, i:=i+1,
    Dy --> intDy( Dy ); /* D[i,y,x] */
  D0 --> canplf(subs(x=InitPoint ,Dy)); /* D[i,y,d] */
  Dn --> sub_du(D0,y_n) ; /* D[i,y_n,d] */
  Dn --> Dn + nd_x(E_m,k-i); /*D[i,y_n,d]+D^(k-i)E_m */
  Di --> canplf(subs(x = InitPoint , Dn)); /* Dn(d)*/
  Ri --> canplf(subCondDy(D0,init_cond)); /*D[i,cond]*/
  S --> сору(Di = Ri); /* аппроксимация начальн. усл.*/
  SD --> conc(S,SD) /*объединение с полученной СЛАУ */);
  return(SD) /* возврат СЛАУ */ );

```

Выводы из алгебраической спецификации алгоритма 2.

1. Процедура *aprox_Dzyadyk* имеет только известные [2] APLAN-операторы.
2. Операторы процедуры *aprox_Dzyadyk* :
 - выполняют вычисления в арифметике рациональных чисел ;
 - имеют по параметру n полиномиальную сложность

$$\begin{aligned}
 Q(\text{let}(\text{equation}, Dy = 0), n) &= O(1); \\
 Q(k := \text{ord_equ}(Dy), n) &= O(1); \\
 Q(\text{main_pol}(n), n) &= O(n); \\
 Q(\text{canplf}(\text{sub_du}(Dy, y_n)), n) &= O(n^2) + O(Q(\text{canplf}, n^2)); \\
 Q(\text{deg}(\text{canplf}(\text{ein_pol}(Dn))), n) &= O(n^2) + O(Q(\text{canplf}, n^2)); \\
 Q(\text{Enl}(n, m + k - n), n) &= O(n^2); \text{ (для классического базиса);} \\
 Q(\text{canplf}(\text{subs}(x = S, E_m)), n) &= O(n^2) + O(Q(\text{canplf}, n^2)); \\
 Q(\text{canplf}(Dn + \text{nd_x}(E_m, k)), n) &= O(n^2) + O(Q(\text{canplf}, n^2)); \\
 Q(\text{pol_equ}(Dn, m), n) &= n * O(Q(\text{canplf}, n^2)) + O(n^3); \\
 Q(\text{intDy}(Dy), n) &= O(1); \\
 Q(\text{canplf}(\text{subs}(x = \text{InitPoint}, Dy)), n) &= O(1);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(\text{sub_du}(D0, y_n), n) &= O(n^2); \\
Q(Dn + \text{nd_x}(E_m, k-i), n) &= O(n); \\
Q(\text{canplf}(\text{subs}(x=\text{InitPoint}, Dn)), n) &= O(1); \\
Q(\text{canplf}(\text{subCondDy}(D0, \text{init_cond})), n) &= O(1); \\
Q(\text{copy}(Di = Ri), n) &= O(1); \\
Q(\text{conc}(S, SD), n) &= O(1);
\end{aligned}$$

3. Процедура *aprox_Dzyadyk* :

- выполняет вычисления в арифметике рациональных чисел ;
- имеет по параметру n полиномиальную сложность

$$Q(\text{solve_ode}, n) = O(n * Q(\text{canplf}, n^2)) + O(n^3);$$

Результаты преобразования оператором *solve_ode* задачи Коши (16) .

$n := 2;$

```

let( LDUMK , Dy = 0 );
      Dy := (x + 1) * dif(y , 1) + -1;
k := ord_equ(Dy) := 1;
y_n := main_pol(n) := c 2 * x^2 + c 1 * x + c 0;
Dn := canplf( sub_du(Dy, y_n) ) :=
c 2 * x ^ 2 $ 2 + c 1 * x + c 2 * x $ 2 + c 1 + -1 ;
m := deg(canplf(ein_pol(Dn))) := 2;
E_m := Enl(n,m+k-n) := c 3 * ( x^3 $ 4 + x $ -3 );
S := canplf((2/(arg(interval,2))+(-
1)*arg(interval,1))
* (x + (-1) * arg(interval,1) ) + (-1) := x $ 2 + -1;
E_m --> canplf( subs(x=S, E_m) ) := c 3 * x ^ 3 $ 32+
c 3 * x ^ 2 $ -48 + c 3 * x $ 10 + c 3 $ -1 ;
Dn --> canplf(Dn + nd_x(E_m,k)) :=
c 3 * x^2 $ 96 + c 3 * x $ -96 + c 3 $ 18 +
c 2 * x ^ 2 $ 2 + c 1 * x + c 2 * x $ 2 + c 1 + -1 ;
SD := pol_equ(Dn,m) :=
( c 3 $ 18 + c 1 + -1 = 0 ,
c 3 $-96 + c 2 $ 2 + c 1 = 0 ,
c 3 $ 96 + c 2 $ 2 = 0 ) ;
for( i := 1 )
Dy --> intDy( Dy ) := (x + 1) * y ;
D0 --> canplf(subs(x=InitPoint ,Dy)) := y ;
Dn --> sub_du(D0,y_n) :=
c 2 * x^2 + c 1 * x + c 0;
Dn --> Dn + nd_x(E_m,k-i) :=
c 2 * x^2 + c 1 * x + c 0 + c 3 * x ^ 3 $ 32+
c 3 * x ^ 2 $ -48 + c 3 * x $ 10 + c 3 $ -1 ;
Di --> canplf(subs(x= InitPoint ,Dn)) :=

```

```

c 3 $ -1 + c 0 ;
Ri --> canplf(subCond(D0,init_cond)) := 0;
S --> copy(Di = Ri) := ( c 3 $ -1 + c 0 = 0 );

```

7 Заключение

Построенная в работе APLAN-процедура :

- вычисляет алгебраический многочлен тождественный решению задачи Коши для ЛДУМК а-методом В.К.Дзядыка – оптимальную по точности аппроксимацию решения задачи Коши для ЛДУМК;
- имеет естественный для математики вид;
- выполняет вычисления в арифметике рациональных чисел – не вносит дополнительные вычислительные погрешности;
- не выполняет наиболее сложное преобразование а-метода В.К.Дзядыка – преобразование задачи Коши в ЛИУМК и, поэтому, легко включается в процедуры решающие задачу Коши для ОДУ общего вида ;
- имеет по параметру n полиномиальную сложность

$$O(n * Q(\text{canplf}, n^2)) + O(n^3) ;$$

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1988 – 387 с.
2. Денисенко П.Н., научная редакция Летичевский А.А. Алгебраическое программирование. Учебное пособие. – Кировоград: КННПК, 2002 – 120 с.
3. Денисенко П.Н. Модифікований метод Дзядыка розв'язування задачі Коші. // Наукові записки Кіровоградського державного педагогічного університету, вип. 12 (1997) , с. 44-51.

Кировоградский Национальный
технический университет

Надійшло 19 октября 2004

УДК 511.2

ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ІНВАРІАНТАМИ T І R

В. М. Євладенко, Ю.П. Пігарьов

Доведено узагальнення теореми 3 [1] про залежність між інваріантами R і T , яка дає можливість будувати множини, для яких $R > C \cdot T$, де C – як завгодно велике дійсне число. Обчислено значення R і T для множин, що налічують 6, 7, 8 елементів. Приводиться геометрична інтерпретація одержаних результатів.

Generalization of theorem 3 [1] on the dependence between invariants R and T has been proved that enables to build up sets for which $R > C \cdot T$, where C is any big real number. The meanings of R and T have been found for the sets, which consist of 6, 7, 8 elements. Geometric interpretation of the obtained data is given.

В роботі [1] доведена теорема 3, яка дає можливість будувати множини, для яких $R = T + n$, де n – довільне наперед задане натуральне число. Ця теорема, як доводиться нижче, допускає узагальнення.

З метою подальшого викладу розглянемо такі множини:

$$L_1 = \{0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}, a_i \in \mathbb{N} (i=1, 2, \dots, k-1),$$

$$L_2 = \{2 \cdot a_{k-1} + 1, 2 \cdot a_{k-1} + 1 + a_1, \dots, 2 \cdot a_{k-1} + 1 + a_{k-1}\},$$

$$L_3 = \{6 \cdot a_{k-1} + 3, 6 \cdot a_{k-1} + 3 + a_1, \dots, 6 \cdot a_{k-1} + 3 + a_{k-1}\},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$L_i = \{(2^i - 2) \cdot a_{k-1} + 2^{i-1} - 1, (2^i - 2) \cdot a_{k-1} + 2^{i-1} - 1 + a_1, \dots, (2^i - 2) \cdot a_{k-1} + 2^{i-1} - 1 + a_{k-1}\}$$

$$(i=1, 2 \dots n+1),$$

$$\bigcup_{i=1}^n L_i = K_n. \quad T(2L_i) = T_i. \quad \text{Елементи } L_i \text{ утворюють } R_i \text{ різних додатних}$$

різниць. Введемо позначення:

$$(2^{n+1} - 2) \cdot a_{k-1} + 2^n - 1 = A$$

$$(2^i - 2) \cdot a_{k-1} + 2^{i-1} - 1 = B_i (i=1, 2, \dots, n).$$

Теорема 4. Для побудованих множин K_n при будь-яких натуральних k і n мають місце рівності:

$$R_n = R_1 + \overline{R_1} \cdot \frac{n^2 - n}{2}, \quad (1)$$

$$T_n = T_1 \cdot \frac{n^2 + n}{2}. \quad (2)$$

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції по n при довільному фіксованому k .

При $n=1$, як легко перевірити, формули (1) і (2) мають місце.

1. Припустимо, що формула (1) справедлива при натуральному n і покажемо, що вона має місце і при $n+1$.

Розглянемо різні різниці, одержані за допомогою елементів множин L_{n+1} і L_i ($i=1, 2, \dots, n$), де

$$L_{n+1} = \{ A, A+a_1, A+a_2, \dots, A+a_{k-1} \}$$

$$L_i = \{ B_i, B_i+a_1, B_i+a_2, \dots, B_i+a_{k-1} \} :$$

$$A-B_i, A-B_i+a_1, A-B_i+a_2, \dots, A-B_i+a_{k-1},$$

$$A-B_i-a_1, A-B_i, A-B_i+a_2-a_1, \dots, A-B_i+a_{k-1}-a_1,$$

$$A-B_i-a_2, A-B_i+a_1-a_2, A-B_i, \dots, A-B_i+a_{k-1}-a_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A-B_i-a_{k-1}, A-B_i+a_1-a_{k-1}, A-B_i+a_2-a_{k-1}, \dots, A-B_i.$$

Елементи цих множин, які є різними різницями, очевидно утворюють квадратну матрицю, над діагоналлю якої, як легко перевірити, буде R_1 різних різниць. Стільки ж різних різниць буде і під діагоналлю, а тому елементи множини L_{n+1} утворюють з елементами множини L_i $\overline{R_1}$ різних різниць, де $\overline{R_1} = 2 \cdot R_1 + 1$. Всього ж нових різниць одержимо $n \cdot \overline{R_1}$. Значить

$$R_{n+1} = R_n + n \cdot \overline{R_1} = R_1 + \overline{R_1} \cdot \frac{n^2 - n}{2} + n \cdot \overline{R_1} = R_1 + \overline{R_1} \cdot \frac{n^2 + n}{2} = R_1 + \overline{R_1} \cdot \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2}.$$

Отже, формула (1) справджується і при $n+1$, що і потрібно було довести.

II. Для доведення формули (2) залишилось показати, що із припущення, що ця формула справедлива при довільному натуральному n , слідує, що вона має місце і при $n+1$.

З цією метою розглянемо нові суми, які одержуються за допомогою елементів множин L_{n+1} і L_i ($i=1, 2, \dots, n+1$):

$$A+B_i, A+a_1+B_i, A+a_2+B_i, \dots, A+a_{k-1}+B_i,$$

$$A+B_i+a_1, A+B_i+2 \cdot a_1, A+B_i+a_2+a_1, \dots, A+B_i+a_{k-1}+a_1,$$

$$A+B_i+a_2, A+B_i+a_1+a_2, A+B_i+2 \cdot a_2, \dots, A+B_i+a_{k-1}+a_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A+B_i+a_{k-1}, A+B_i+a_1+a_{k-1}, A+B_i+a_2+a_{k-1}, \dots, A+B_i+2 \cdot a_{k-1}.$$

Ці суми більші сум, одержаних за допомогою елементів множини K_n , і їх буде T_1 . Всього ж нових різних сум буде $(n+1) \cdot T_1$. Таким чином

$$T_{n+1} = T_n + (n+1) \cdot T_1 = T_1 \cdot \frac{n^2 + n}{2} + T_1 \cdot (n+1) = T_1 \cdot \frac{n^2 + n + 2 \cdot n + 2}{2} = T_1 \cdot \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2},$$

що і доводить формулу (2).

Наслідок 1. Якщо K_1 – множина степенів з основою $a > 1$ ($a \in \mathbb{N}$) і різними натуральними показниками, і $T(K_1) = k_1$, то легко довести, що кількість різних сум елементів цієї множини буде $T(2K_1) = \frac{k_1^2 + k_1}{2}$.

Дійсно, припустивши, що $a^s + a^t = a^p + a^q$, приходимо до протиріччя, яке полягає в тому, що якщо ліву і праву частину цієї рівності поділимо на мінімальну степінь, наприклад a^q , то одержимо $a^{s-q} + a^{t-q} = a^{p-q} + 1$. Звідси випливає, що число 1 повинне ділитися на a , що неможливо.

Аналогічно доводиться, що число різних додатних різниць обчислюється за формулою $R_1 = \frac{k_1^2 - k_1}{2}$ і $\bar{R}_1 = k_1^2 - k_1 + 1$.

Застосувавши теорему 4, одержимо множину з такими значеннями T_2 і \bar{R}_2 : $T_2 = T_1 \cdot \frac{k_2^2 + k_2}{2}$, $\bar{R}_2 = \bar{R}_1 \cdot (k_2^2 - k_2 + 1)$.

Застосувавши цю теорему ($m-1$) раз, приходимо до множини, для якої $T_m = \prod_{i=1}^m \frac{k_i^2 + k_i}{2}$, $\bar{R}_m = \prod_{i=1}^m (k_i^2 - k_i + 1)$.

Отже, при досить великих m ($m \in \mathbb{N}$), будемо одержувати множини з як завгодно великими значеннями T_m і \bar{R}_m .

Наслідок 2. Теорема 4 дозволяє будувати такі множини, для яких $R < T < R + T(K)$, і множини, для яких $T < R$.

Деякі з таких множин вказані у наведеній нижче таблиці.

№ з/п	k	n	(R_1, T_1)	T_n	R_n	$T(K_n) = n \cdot k$
1.	3	7	(3, 6)	168	150	21
2.	4	5	(6, 10)	150	136	20
3.	6	4	(15, 21)	210	201	24
4.	4	6	(5, 9)	189	170	24
5.	5	5	(7, 12)	180	157	25
6.	6	5	(14, 20)	300	304	30
7.	5	6	(10, 15)	315	325	30
8.	8	4	(27, 35)	350	357	32
9.	7	7	(21, 28)	784	924	49
10.	8	4	(28, 36)	360	370	32

Значення R і T для множин, що налічують 6-ть елементів

Шестиелементні множини беруться з таблиць 1, 11 роботи [3].

Інформація про класифікацію цих множин за значеннями R і T приведена нижче, де, наприклад, запис (12, 18), (19), № 49 означає: (12, 18) –

відповідні значення R і T , (19) – кількість множин з такими значеннями R і T , а № 49 – найменший номер такої множини.

1. (15, 21), (1), № 17.	14.8, 17), (2), № 29.
2. (14, 20), (1), № 214.	15.(10, 16), (16), № 142.
3. (13, 20), (1), № 36.	16.(9, 16), (30), № 9.
4. (13, 19), (4), № 57.	17.(8, 16), (9), № 10.
5. (12, 19), (9), № 28.	18.(9, 15), (8), № 68.
6. (11, 19), (3), № 24.	19.(8, 15), (12), №8.
7. (9,19), (1), № 45.	20.(7, 15), (5), № 18.
8. (12, 18), (19), № 49.	21.(8, 14), (4), № 126.
9. (11, 18), (39), № 3.	22.(7, 14), (5), № 91.
10. (10, 18), (18), № 16.	23.(7, 13), (2), № 12.
11.(11, 17), (30), № 36.	24.(6, 13), (3), № 64.
12.(10, 17), (41), №1.	25.(6, 12), (1), № 120.
13.(9, 17), (16), № 6.	26.(5, 11), (1), № 119.

Примітка. В роботі [3] є описка: множини № 215 і № 220 однакові.

Значення R і T для множин, що налічують 7 елементів

1. (21, 28), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 30}	28. (12, 23), {0, 1, 2, 4, 9, 12, 13}
2. (20, 27), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 28}	29. (12, 22), {0, 1, 2, 6, 8, 11, 12}
3. (19, 27), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 25}	30. (12, 21), {0, 1, 2, 3, 8, 11, 12}
4. (19, 26), {0, 4, 5, 8, 14, 16, 29}	31. (12, 20), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 12}
5. (18, 26), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 24}	32. (12, 19), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 13}
6. (18, 25), {0, 3, 6, 10, 12, 20, 31}	33. (11, 22), {0, 1, 2, 4, 9, 11, 12}
7. (17, 26), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 23}	34. (11, 21), {0, 1, 2, 4, 8, 11, 12}
8. (17, 25), {0, 4, 5, 8, 14, 16, 21}	35. (11, 20), {0, 1, 2, 4, 6, 10, 11}
9. (17, 24), {0, 1, 9, 11, 15, 18, 21}	36. (11, 19), {0, 1, 2, 3, 5, 10, 11}
10. (16, 25), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 22}	37. (11, 18), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 11}
11. (16, 24) {0, 1, 5,8, 10, 16, 18}	38. (10, 21), {0, 1, 2, 4, 8, 10, 11}
12. (16, 23), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 18}	39. (10, 20), {0, 1, 2, 4, 6, 9, 10}
13. (15, 26), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 21}	40. (10, 19), {0, 1, 2, 6, 7, 11, 12}
14. (15, 25), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 16}	41. (10, 18), {0, 1, 2, 3, 4, 9, 10}
15. (15, 24), {0, 1, 3, 9, 12, 13, 17}	42. (10, 17), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 10}
16. (15, 23), {0, 1, 4, 7, 14, 15, 16}	43. (9, 19), {0, 1, 2, 5, 6, 8, 9}
17. (15, 22), {0, 2, 3, 4, 5, 10, 19}	44. (9, 18), {0, 1, 2, 3, 6, 8, 9}
18. (14, 25), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 20}	45. (9, 17), {0, 1, 2, 3, 4, 8, 9}
19. (14, 24), {0, 1, 4, 7, 8, 17, 18}	46. (9, 16), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 9}
20. (14, 23), {0, 1, 8, 9, 10, 13, 15}	47. (8, 17), {0, 1, 2, 5, 6, 7, 8}

21. (14, 22), {0, 1, 2, 4, 7, 13, 15}	48. (8, 16), {0, 1, 2, 3, 4, 7, 8}
22. (14, 21), {0, 1, 2, 3, 5, 8, 17}	49. (8, 15), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8}
23. (13, 24), {0, 1, 2, 5, 11, 13, 16}	50. (7, 15), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7}
24. (13, 23), {0, 1, 2, 7, 9, 12, 13}	51. (7, 14), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}
25. (13, 22), {0, 1, 7, 8, 10, 13, 15}	52. (6, 13), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
26. (13, 21), {0, 1, 2, 6, 7, 10, 13}	
27. (13, 20), {0, 1, 2, 3, 5, 9, 13}	

Значення R і T для множин, що налічують 8 елементів

1. (28, 36), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 30, 61}	48. (16, 27), {0, 1, 2, 3, 7, 11, 15, 16}
2. (27, 35), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 28, 57}	49. (16, 26), {0, 1, 4, 7, 14, 15, 16, 17}
3. (26, 35), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 25, 51}	50. (16, 25), {0, 1, 2, 3, 4, 9, 14, 16}
4. (26, 34), {0, 4, 5, 8, 14, 16, 29, 59}	51. (16, 24), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 19}
5. (25, 34), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 24, 49}	52. (15, 29), {0, 1, 2, 5, 8, 11, 15, 16}
6. (25, 33), {0, 3, 6, 10, 12, 20, 31, 63}	53. (15, 28), {0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 17}
7. (24, 34), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 23, 47}	54. (15, 27), {0, 1, 2, 4, 7, 13, 15, 16}
8. (24, 33), {0, 4, 5, 8, 14, 16, 21, 43}	55. (15, 26), {0, 1, 8, 9, 10, 13, 15, 16}
9. (24, 32), {0, 1, 9, 11, 15, 18, 21, 43}	56. (15, 25), {0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 17}
10. (23, 33), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 22, 45}	57. (15, 24), {0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 17}
11. (23, 32), {0, 3, 6, 10, 12, 20, 31, 32}	58. (15, 23), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 17}
12. (23, 31), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 18, 37}	59. (14, 27), {0, 1, 2, 5, 8, 12, 13, 14}
13. (22, 34), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 21, 43}	60. (14, 26), {0, 1, 2, 7, 9, 12, 13, 14}
14. (22, 33), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 25, 26}	61. (14, 25), {0, 1, 2, 3, 5, 9, 13, 14}
15. (22, 32), {0, 1, 3, 9, 12, 13, 17, 35}	62. (14, 24), {0, 1, 2, 3, 4, 9, 11, 14}
16. (22, 31), {0, 1, 4, 7, 14, 15, 16, 33}	63. (14, 23), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 13, 14}
17. (22, 30), {0, 2, 3, 4, 5, 10, 19, 39}	64. (14, 22), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 11, 14}
18. (21, 33), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 20, 41}	65. (13, 26), {0, 1, 2, 4, 9, 12, 13, 14}
19. (21, 32), {0, 1, 4, 7, 8, 17, 18, 37}	66. (13, 25), {0, 1, 2, 4, 8, 11, 12, 13}
20. (21, 31), {0, 1, 8, 9, 10, 13, 15, 31}	67. (13, 24), {0, 1, 2, 3, 8, 11, 12, 13}
21. (21, 30), {0, 1, 2, 4, 7, 13, 15, 31}	68. (13, 23), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 12, 13}
22. (21, 29), {0, 1, 2, 3, 5, 8, 17, 35}	69. (13, 22), {0, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 13}
23. (20, 32), {0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 33}	70. (13, 21), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 13}
24. (20, 31), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 22, 23}	71. (12, 25), {0, 1, 2, 4, 9, 11, 12, 13}
25. (20, 30), {0, 1, 7, 8, 10, 13, 15, 31}	72. (12, 24), {0, 1, 2, 4, 6, 8, 11, 12}
26. (20, 29), {0, 1, 2, 6, 7, 10, 13, 27}	73. (12, 23), {0, 1, 2, 4, 6, 10, 11, 12}
27. (20, 28), {0, 1, 2, 3, 5, 9, 13, 27}	74. (12, 22), {0, 1, 2, 3, 5, 10, 11, 12}
28. (19, 32), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 21, 22}	75. (12, 21), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12}
29. (19, 31), {0, 1, 2, 4, 9, 12, 13, 27}	76. (12, 20), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 12}
30. (19, 30), {0, 1, 9, 11, 15, 18, 21, 22}	77. (12, 26), {0, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 14}
31. (19, 29), {0, 1, 2, 3, 8, 11, 12, 25}	78. (11, 23), {0, 1, 2, 4, 8, 10, 11, 12}
32. (19, 28), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 12, 25}	79. (11, 22), {0, 1, 2, 3, 6, 8, 9, 11}
33. (19, 27), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 13, 27}	80. (11, 21), {0, 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11}
34. (18, 31), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 20, 21}	81. (11, 20), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11}
35. (18, 30), {0, 1, 2, 4, 9, 11, 12, 25}	82. (11, 19), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 11}
36. (18, 29), {0, 1, 5, 8, 10, 16, 18, 19}	83. (10, 21), {0, 1, 2, 5, 6, 8, 9, 10}
37. (18, 28), {0, 1, 2, 4, 6, 10, 11, 23}	84. (10, 20), {0, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10}

38. (18, 27), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 18, 19}	85. (10, 19), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10}
39. (18, 26), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 11, 23}	86. (10, 18), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10}
40. (17, 30), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 16, 17}	87. (9, 19), {0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9}
41. (17, 29), {0, 1, 3, 9, 12, 13, 17, 18}	88. (9, 18), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9}
42. (17, 28), {0, 1, 2, 4, 6, 9, 10, 21}	89. (9, 17), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}
43. (17, 27), {0, 1, 2, 6, 7, 11, 12, 25}	90. (8, 17), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8}
44. (17, 26), {0, 2, 3, 4, 5, 10, 19, 20}	91. (8, 16), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}
45. (17, 25), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 10, 21}	92. (7, 15), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
46. (16, 29), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 15, 16}	
47. (16, 28), {0, 1, 2, 5, 8, 11, 14, 16}	

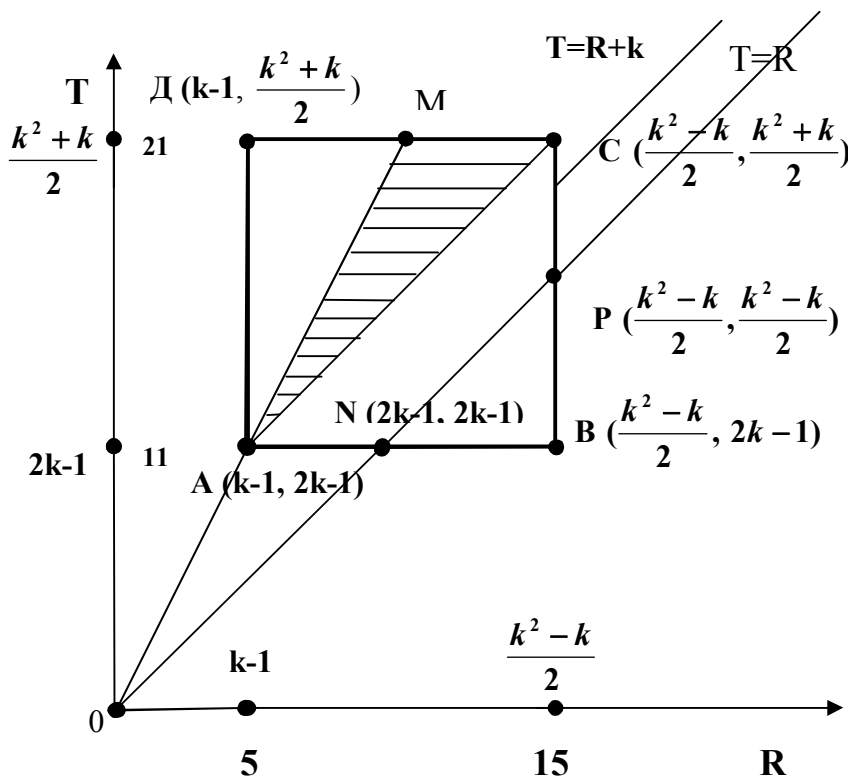
Геометрична інтерпретація

Відомо, що $2 \cdot k - 1 \leq T \leq \frac{k^2 + k}{2}$ (див. [2], стор. 19), а $k - 1 \leq R \leq \frac{k^2 - k}{2}$ (див. [2], стор. 57).

В прямокутній системі координат ROT побудуємо квадрат ABCD (k), координати вершин якого є:

A (k-1; 2k-1), B ($\frac{k^2 - k}{2}$; 2k-1), C ($\frac{k^2 - k}{2}$; $\frac{k^2 + k}{2}$), D (k-1, $\frac{k^2 + k}{2}$). Цей квадрат зображений на мал. 1 при значенні k=6.

Для множини $L_1 = \{0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$, $a_i \in N$ ($i=1, 2, \dots, k-1$) $T(L_1) = k$, $T(2 \cdot L_1) = T$, а кількість різних додатніх різниць елементів множини L_1 дорівнює R. Кожній множині $\{0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ поставимо у відповідність точку з координатами (R, T).



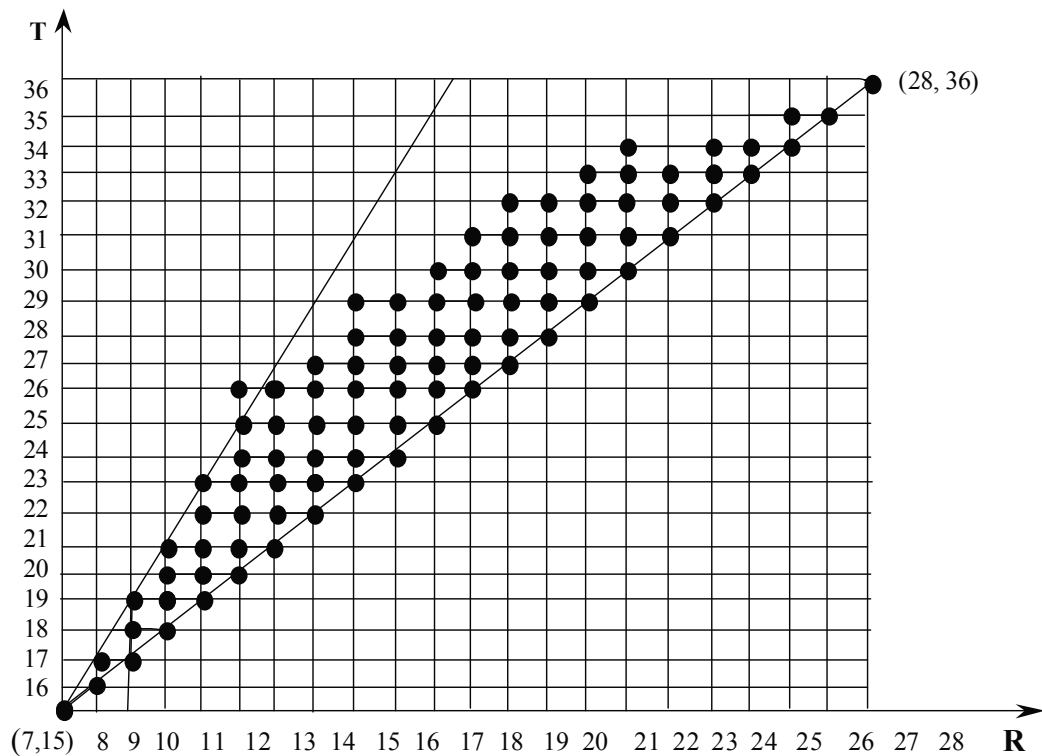
Мал. 1 (при k=6).

Точки з координатами (R, T) не виходять за межі квадрата $ABCD(k)$. Рівняння діагоналі (AC) цього квадрата має вигляд $T=R+k$. Пряма $T=\bar{R}=2 \cdot R+1$ проходить через вершину A і перетинає сторону $[CD]$ квадрата в точці

$M\left(\frac{k^2+k-2}{4}; \frac{k^2+k}{2}\right)$. Одержаний трикутник $AMC(k)$ будемо називати критичним. Виявляється, що при $k \leq 7$ точки з координатами (R, T) не виходять за межі відповідного критичного трикутника.

Бісектриса $T=R$ перетинає сторони квадрата $ABCD(k)$ ($k \geq 5$) в точках $N(2k-1, 2k-1)$ і $P\left(\frac{k^2-k}{2}, \frac{k^2-k}{2}\right)$. Точки, що відповідають множинам №1-№5 із наслідку 2, попадають у внутрішню область відповідної трапеції $ANPC(k)$. Точки ж, що відповідають множинам №6-№10, попадають у внутрішню область відповідного трикутника $NPB(k)$.

Для $k=8$ квадрат $ABCD(8)$ зображений на мал. 2.



Мал. 2

В 1973р. одержана множина $(13, 28), \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14\}$ [4]. Це привело до оцінки:

$$\frac{\lg T}{\lg R} = \frac{\lg 59}{\lg 55} \approx 1,0175.$$

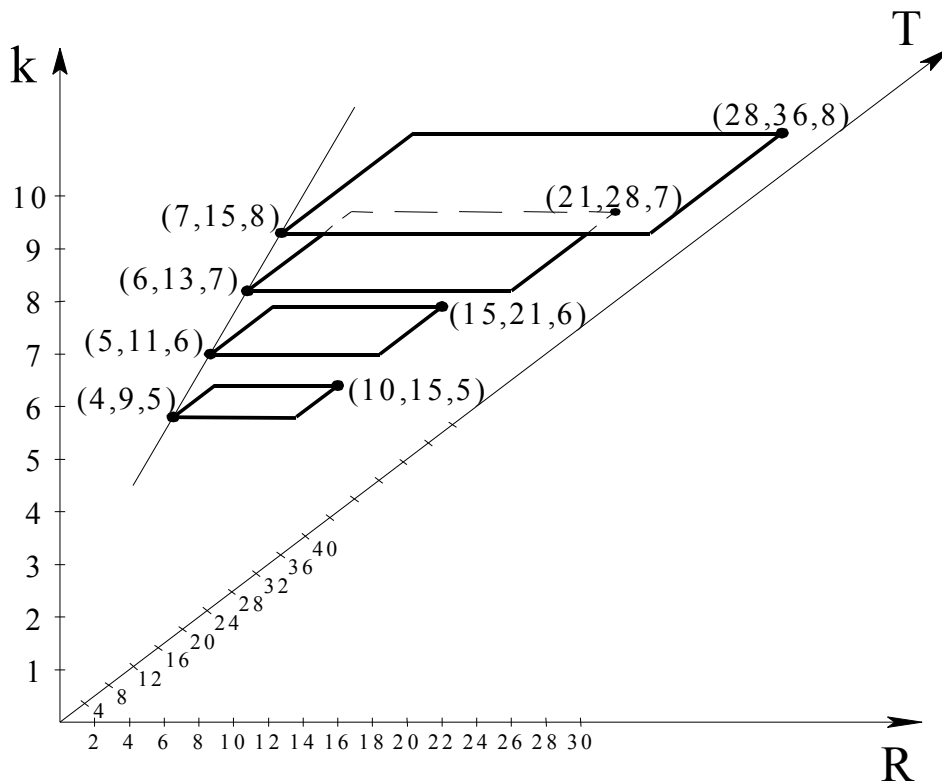
В 2004 р. Кузнецов С.Т. знайшов множини з такими значеннями (R, T) : $(12, 26), (23, 51)$ /

Пізніше Пігарьов Ю.П. побудував множини з наступними значеннями (R, T) : $(30, 67), (37, 83), (44, 99), (51, 119)$.

Множина $(51, 115), \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 17, 20, 21, 25, 28, 29, 33, 35, 37, 41, 44, 45, 49, 52, 53, 54, 56, 57\}$ приводить до оцінки:

$$\frac{\lg 115}{\lg 103} \approx 1,02378.$$

Просторова геометрична інтерпретація в системі координат (R, T, k) при $k=5, 6, 7, 8$ наведена на мал. 3, де зображені відповідні квадрати.



Мал. 3

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Євладенко 1997 – Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Про залежність між інваріантами R і T . //Наукові записки. –Вип. 12. Серія: Фізико-математичні науки.-Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 1997. –с. 51-55.
2. Фрейман 1966 –Фрейман Г.А. Начала структурной теории сложения множеств. – Казань, 1966. –140 с.
3. Асафова 1973 – Асафова Г.А. Об одном типе латинских квадратов шестого порядка: Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств.– М: Союз- полиграфпром при ГК СМ СССР, 1973, – с. 189-190.
4. Пигарев 1973 – Пигарев Ю.П. и Фрейман Г.А. О зависимости между инвариантами R и T : Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств. –М: Союзполиграфпром при ГК СМ СССР, 1973, -с. 172-174.

УДК 517.91

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ПЕРІОДИЧНИМИ ВІЛЬНИМИ ЧЛЕНАМИ

В.А. Кушнір, Г.А. Кушнір, А.І. Петюренко

У статті досліджуються умови існування T -періодичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами і T -періодичними вільними членами у випадку простих коренів характеристичного рівняння системи.

Дослідженню умов існування T -періодичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами присвячено чимало робіт [1,2]. Як відомо [3,4], точний розв'язок серед названих систем мають системи зі сталими коефіцієнтами і T -періодичними змінними членами. Такими системами описуються коливання в різних механічних і фізичних системах. Отже, відшукування умов існування T -періодичних розв'язків цих систем є нагальною задачею, чому й присвячена дана стаття.

Система

$$\begin{cases} y_1' = P_{11}y_1 + P_{12}y_2 + \dots + P_{1n}y_n + f_1(x) \\ y_2' = P_{21}y_1 + P_{22}y_2 + \dots + P_{2n}y_n + f_2(x) \\ \dots \\ y_n' = P_{n1}y_1 + P_{n2}y_2 + \dots + P_{nn}y_n + f_n(x) \end{cases} \quad (1)$$

називається неоднорідною системою диференціальних рівнянь n -го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Будемо записувати систему (1) у матрично-векторній формі

$$\vec{y}' = P\vec{y} + \vec{f}(x) \quad (2)$$

де

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} \vec{y}_1' \\ \vec{y}_2' \\ \dots \\ \vec{y}_n' \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

n -вимірні вектори.

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

$(n \times n)$ числова матриця.

Якщо матриця P системи (2) має прості характеристичні числа, то таку систему, як відомо з теорії матриць [5], можна записати так

$$\vec{y}' = T\Lambda T^{-1}\vec{y} + \vec{f}(x) \quad (3)$$

де Λ -діагональна матриця

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Матриця T -має своїми стовпцями власні вектори матриці P .

Помножимо зліва всі частини рівняння на T^{-1} , одержимо

$$(T^{-1}\vec{y})' = \Lambda(T^{-1}\vec{y}) + T^{-1}\vec{f}(x)$$

Або після заміни

$$\vec{z} = T^{-1}\vec{y} \quad (4)$$

$$\vec{z}' = \Lambda\vec{z} + T^{-1}\vec{f}(x)$$

Нехай $\vec{f}(x)$ - T -періодична вектор-функція. Тобто

$$\vec{f}(x+T) = \vec{f}(x)$$

Система (4) у розгорнутому вигляді буде такою

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1 + \varphi_1(x) \\ z_2' &= \lambda_2 z_2 + \varphi_2(x) \\ &\dots\dots\dots \\ z_n' &= \lambda_n z_n + \varphi_n(x) \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^n t_{ik}' f_k(x); \quad i = \overline{1, n} \quad (6)$$

а t_{ik} ; ($i = \overline{1, n}; k = \overline{1, n}$) елементи матриці T^{-1} . Оскільки функції $\vec{f}_i(x)$; ($i = \overline{1, n}$) T -періодичні, то згідно (6), будуть T -періодичні і функції $\varphi_i(x)$; ($i = \overline{1, n}$).

Проблема відшукування T -періодичних розв'язків неоднорідної системи (1) з T -періодичними вільними членами звелася до відшукування T -періодичних розв'язків окремих диференціальних рівнянь (5)

$$z_i' = \lambda_i z_i + \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, n} \quad (7)$$

Спочатку розглянемо однорідні рівняння

$$z_i' = \lambda_i z_i, \quad i = \overline{1, n}$$

Їх розв'язками будуть функції

$$z_i' = C_i e^{\lambda_i x}, \quad i = \overline{1, n} \quad (8)$$

де $C_i - const$.

Методом варіації довільної сталої знаходимо загальний розв'язок неоднорідних рівнянь

$$z_i' = C_i'(x)e^{\lambda_i x} + C_i \lambda_i e^{\lambda_i x}; \quad i = \overline{1, n} \quad (9)$$

Підставимо (8), (9) в (7), маємо

$$C_i'(x)e^{\lambda_i x} + C_i(x)\lambda_i e^{\lambda_i x} = C_i(x)\lambda_i e^{\lambda_i x} + \varphi_i(x)$$

Звідки маємо

$$C_i'(x)e^{\lambda_i x} = \varphi_i(x)$$

$$C_i'(x) = e^{-\lambda_i x} \varphi_i(x)$$

$$C_i(x) = \int_0^x e^{-\lambda_i x} \varphi_i(x) dx + C_i; \quad C_i - const, \quad i = \overline{1, n}$$

Тоді загальні розв'язки диференціальних рівнянь (7) матимуть вигляд

$$z_i = C_i e^{\lambda_i x} + e^{\lambda_i x} \int_0^x e^{-\lambda_i x} \varphi_i(x) dx \quad (10)$$

Розв'язок системи (1) матиме вигляд

$$\vec{y} = T\vec{z} = T\vec{z}_0 + T\vec{z}_H$$

де $\vec{y}_1 = T\vec{z}_0$ - загальний розв'язок однорідної системи, $\vec{y}_2 = T\vec{z}_H$ - частковий розв'язок неоднорідної системи, вектор-функція \vec{z} має своїми компонентами z_i , що виражаються формулою (10).

Умова існування T -періодичних розв'язків [2]

$$\vec{y}(0) = \vec{y}(T)$$

набуває вигляду

$$T\vec{z}_0(0) + T\vec{z}_H(0) = T\vec{z}_0(T) + T\vec{z}_H(T) \quad (11)$$

Згідно (11) $\vec{z}_H(0) = 0$. Тоді (11) набуває вигляду

$$T(\vec{z}_0(0) - \vec{z}_0(T)) = T\vec{z}_H(T)$$

Помноживши на T^{-1} зліва, маємо

$$\vec{z}_0(0) - \vec{z}_0(T) = \vec{z}_H(T)$$

Або в розгорнутому вигляді

$$C_1(1 - e^{\lambda_1 T}) = e^{\lambda_1 T} \int_0^T e^{-\lambda_1 x} \varphi_1(x) dx$$

$$C_2(1 - e^{\lambda_2 T}) = e^{\lambda_2 T} \int_0^T e^{-\lambda_2 x} \varphi_2(x) dx$$

.....

$$C_n(1 - e^{\lambda_n T}) = e^{\lambda_n T} \int_0^T e^{-\lambda_n x} \varphi_n(x) dx$$

(12)

Кожне із лінійних алгебраїчних рівнянь (12) матиме єдиний розв'язок відносно C_i , якщо $1 - e^{\lambda_i T} \neq 0$. Отже, якщо серед λ_i ; ($i = \overline{1, n}$) немає нульових, то

система (1) із T -періодичними вільними членами буде мати єдиний T -періодичний розв'язок.

Приклад.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 0,5y_2 + 0,5y_3 + 2\sin x \\ y_2' = y_1 + 2,5y_2 - 0,5y_3 + \cos x \\ y_3' = y_1 + 0,5y_2 + 1,5y_3 - \sin 2x \end{cases} \quad (13)$$

Вільні члени системи (13) є 2π -періодичними функціями.

Матриця системи (13)

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 2,5 & -0,5 \\ 1 & 0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

має ненульові характеристичні корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Отже система (13) матиме єдиний 2π -періодичний розв'язок. Знайдемо його.

Спочатку запишемо матрицю P у вигляді

$$P = T\Lambda T^{-1} \quad (14)$$

де

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

У векторно-матричній формі (13) матиме вигляд

$$\vec{y}' = P\vec{y} + \vec{f}(x) \quad (15)$$

де

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}; \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 2\sin x \\ \cos x \\ -\sin 2x \end{pmatrix}$$

Враховуючи (14), (13) можна записати так

$$\vec{z}' = \Lambda\vec{z} + \varphi(x) \quad (16)$$

де

$$\vec{z}' = (T^{-1}\vec{y})'; \quad \vec{z} = (T^{-1}\vec{y}); \quad \varphi(x) = T^{-1}\vec{f}(x)$$

Запишемо (16) у скалярній формі

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 + (-0,5 \cdot 2\sin x + 0 \cdot \cos x - 0,5\sin 2x) \\ z_2' &= 2z_2 + (0 \cdot 2\sin x - 0,5 \cdot \cos x + 0,5(-\sin 2x)) \\ z_3' &= 3z_3 + (0,5 \cdot 2\sin x + 0,5 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin 2x) \end{aligned}$$

Або після перетворень

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 + \sin x - 0,5 \sin 2x \\ z_2' &= 2z_2 - 0,5 \cos x - 0,5 \sin 2x \\ z_3' &= 3z_3 + \sin x + 0,5 \cos x \end{aligned} \quad (17)$$

Розв'яжемо перше рівняння із (17)

$$z_1' - z_1 = \sin x - 0,5 \sin 2x \quad (18)$$

Відповідне однорідне рівняння має загальний розв'язок

$$z_1 = C_1 e^x; C_1 - const$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння знаходимо методом невизначених коефіцієнтів

$$z = a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x \quad (19)$$

$$z' = a_1 \cos x - b_1 \sin x + 2a_2 \cos 2x - 2b_2 \sin 2x \quad (20)$$

Підставимо вирази для z, z' у (18), маємо

$$\begin{aligned} a_1 \cos x - b_1 \sin x + 2a_2 \cos 2x - 2b_2 \sin 2x - a_1 \sin x - \\ - b_1 \cos x - a_2 \sin 2x - b_2 \cos 2x = \sin x - 0,5 \sin 2x \end{aligned}$$

Звідки знаходимо

$$a_1 = \frac{1}{2}; b_1 = \frac{1}{2}; a_2 = 0,1; b_2 = 0,2$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (18) має вигляд

$$z_1 = C_1 e^x + 0,5 \sin x + 0,5 \cos x + 0,1 \sin 2x + 0,2 \cos 2x$$

Умова існування 2π -періодичного розв'язку $y(0) = y(2\pi)$ набуде вигляду

$$C_1 e^0 + 0,5 \sin 0 + 0,5 \cos 0 + 0,1 \sin 0 + 0,2 \cos 0 =$$

$$C_1 e^{2\pi} + 0,5 \sin 2\pi + 0,5 \cos 2\pi + 0,1 \sin 4\pi + 0,2 \cos 4\pi$$

$$C_1 - 0,5 + 0,2 = C_1 e^{2\pi} - 0,5 + 0,2$$

$$C_1(1 - e^{2\pi}) = 0;$$

$$C_1 = 0$$

Отже

$$z_1 = 0,5 \sin x + 0,5 \cos x + 0,1 \sin 2x + 0,2 \cos 2x$$

2π -періодичний розв'язок і він єдиний.

Розв'яжемо друге рівняння із (17) аналогічно до попереднього

$$z_2' = 2z_2 - 0,5 \cos x - 0,5 \sin 2x \quad (21)$$

Відповідне однорідне рівняння

$$z_2' = 2z_2$$

має загальний розв'язок

$$z_2 = C_2 e^{2x}; C_2 - const$$

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння (21) шукаємо у вигляді (19).

Підставляючи (19) і (20) у (21) маємо

$$a_1 \cos x - b_1 \sin x + 2a_2 \cos 2x - b_2 \sin 2x - 2a_1 \sin x - \\ - 2b_1 \cos x - 2a_2 \sin 2x - 2b_2 \cos 2x = -0,5 \sin x - 0,5 \sin 2x$$

Звідки

$$\begin{cases} a_1 - 2b_1 = -0,5 \\ -2a_1 - b_1 = 0 \end{cases}$$

$$b_1 = -2a_1$$

$$a_1 - 4a_1 = -0,5$$

$$-3a_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6}; b_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} a_2 - b_2 = 0 \\ 2a_2 + 2b_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$a_2 = b_2$$

$$2a_2 + 2a_2 = \frac{1}{2}$$

$$4a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{8}; b_2 = \frac{1}{8}$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння (21) має вигляд

$$z_2 = C_2 e^{2x} + \frac{1}{6} \sin x - \frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \quad (22)$$

Умова періодичності

$$z_2(0) = z_2(2\pi);$$

Або із (22)

$$C_2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = C_2 e^{2\pi} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}$$

$$C_2(1 - e^{2\pi}) = 0$$

$$C_2 = 0$$

Тоді

$$z_2 = \frac{1}{6} \sin x - \frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x$$

буде 2π -періодичним розв'язком другого рівняння із (17)

Третє рівняння із (17)

$$z_3' = 3z_3 + \sin x + 0,5 \cos x \quad (23)$$

Частковий розв'язок шукаємо у вигляді

$$z_{3H} = a \sin x + b \cos x$$

$$z_{3H}' = a \cos x - b \sin x$$

Підставимо ці значення в (23), маємо

$$a \cos x - b \sin x - 3a \sin x - 3b \cos x = \sin x + 0,5 \cos x$$

$$\begin{cases} a - 3b = 0,5 \\ -3a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,5 + 3b \\ -1,5 - 9b - b = 1 \end{cases}$$

$$-10b = 2,5 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}; a = -\frac{1}{4}$$

Отже,

$$z_3 = C_3 e^{3x} - \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x \quad (24)$$

$$z_3(0) = z_3(2\pi)$$

$$C_3 - \frac{1}{4} = C_3 e^{6\pi} - \frac{1}{4}$$

$$C_3 = 0$$

Тоді 2π -періодичним розв'язком третього рівняння із (17) буде

$$z_3 = -\frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x$$

Зауваження. Із вигляду загальних розв'язків рівнянь (17) (наприклад із (24)), очевидно, що при $C_3 = 0$ матимемо частковий 2π -періодичний розв'язок. Однак, далеко не завжди можна скористатися методом невизначених коефіцієнтів, який допомагає уникнути відшукування інтегралів, які в скінченному вигляді взагалі можуть не братися. Тоді розв'язок буде доведено тільки до квадратур. Якщо при цьому виконується умова існування T -періодичного розв'язку, то ми його зможемо знайти в квадратурах, а потім наближеними методами, чисельними чи за допомогою рядів, знайти відповідні інтеграли.

Таким чином, вектор \vec{z} знайдено

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{10} \sin 2x + \frac{1}{5} \cos 2x \\ \frac{1}{6} \sin x - \frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \\ -\frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x \end{pmatrix}$$

Вектор $\vec{y} = T\vec{z}$. Або

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{10} \sin 2x + \frac{1}{5} \cos 2x \\ \frac{1}{6} \sin x - \frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \\ -\frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x \end{pmatrix}$$

Звідки

$$\begin{aligned}
y_1 &= -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x - \\
&\quad - \frac{1}{6}\sin x - \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x = \\
&= -\frac{11}{12}\sin x - \frac{13}{12}\cos x + \frac{1}{40}\sin 2x - \frac{3}{40}\cos 2x \\
y_2 &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x + \\
&\quad + \frac{1}{6}\sin x + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x = \\
&= \frac{2}{3}\sin x + \frac{5}{6}\cos x - \frac{1}{40}\sin 2x + \frac{3}{40}\cos 2x \\
y_3 &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{10}\sin 2x + \frac{1}{5}\cos 2x - \\
&\quad - \frac{1}{6}\sin x - \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x = \\
&= \frac{1}{12}\sin x - \frac{1}{12}\cos x + \frac{9}{40}\sin 2x + \frac{13}{40}\cos 2x
\end{aligned}$$

Функції y_1, y_2, y_3 , є єдиним 2π -періодичним розв'язком системи (13).

Розглянемо випадок, коли відповідна системі (1) однорідна система має T -періодичний розв'язок. Це можливо, коли одне з характеристичних чисел рівне нулю. Нехай $\lambda_1 = 0$. Тоді перше рівняння із (12) набуде вигляду

$$C_1 \cdot 0 = \int_0^T \varphi_1(x) dx$$

Зрозуміло, що це рівняння відносно C_1 буде мати ненульовий розв'язок тільки при умові

$$\int_0^T \varphi_1(x) dx = 0$$

У протилежному разі T -періодичних розв'язків не існує.

Приклад.

$$\begin{cases}
y_1' = y_3 + 1 \\
y_2' = -1,5y_1 + 1,5y_2 + 1,25y_3 - \cos x \\
y_3' = -y_1 + y_2 + 1,5y_3 + 2\sin x
\end{cases} \quad (25)$$

Відповідна однорідна система буде мати вигляд

$$\begin{cases}
y_1' = y_3 + 1 \\
y_2' = -1,5y_1 + 1,5y_2 + 1,25y_3 \\
y_3' = -y_1 + y_2 + 1,5y_3
\end{cases}$$

Матриця перетворення має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,75 \\ 0,5 & -0,5 & 0,25 \\ -0,5 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Систему (25) у матрично-векторній формі можна записати так

$$\vec{y}' = P\vec{y} + \vec{f}$$

де

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}; \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos x \\ 2 \sin x \end{pmatrix}$$

Або враховуючи (26)

$$\vec{y}' = T\Lambda T^{-1}\vec{y} + \vec{f}(x)$$

Звідки

$$\vec{z}' = \Lambda\vec{z} + \vec{\varphi}(x), \quad \vec{\varphi}(x) = T^{-1}\vec{f}(x)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,75 \\ 0,5 & -0,5 & 0,25 \\ -0,5 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos x \\ 2 \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 - 0,5 \cos x - 1,5 \sin x \\ 0,5 + 0,5 \cos x + 0,5 \sin x \\ -0,5 - 0,5 \cos x + 0,5 \sin x \end{pmatrix}$$

У розгорнутому вигляді система запишеться так

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 - 0,5 \cos x - 1,5 \sin x \\ 0,5 + 0,5 \cos x + 0,5 \sin x \\ -0,5 - 0,5 \cos x + 0,5 \sin x \end{pmatrix} \quad (27)$$

Із (27) маємо скалярні рівняння

$$\begin{cases} z_1' = 0,5z_1 - 0,5 \cos x - 1,5 \sin x \\ z_2' = z_2 + 0,5 + 0,5 \cos x + 0,5 \sin x \\ z_3' = 2z_3 - 0,5 - 0,5 \cos x + 0,5 \sin x \end{cases} \quad (28)$$

Із першого рівняння маємо

$$z_1 = 0,5x + 1,5 \cos x - 0,5 \sin x + C_1$$

Умова $z_1(0) = z_1(2\pi)$ не виконується ні при якому значенні C_1 . Отже, перше рівняння із (28) не має 2π -періодичних розв'язків. Значить не має 2π -періодичних розв'язків і система (25).

Приклад.

$$\begin{cases} y_1' = y_3 - \sin x \\ y_2' = -1,5y_1 + 1,5y_2 + 1,25y_3 - \cos x \\ y_3' = -y_1 + y_2 + 1,5y_3 + 2 \sin x \end{cases} \quad (29)$$

Після перетворень будемо мати систему

$$\begin{cases} z_1' = -0,5 \cos x - 2 \sin x \\ z_2' = z_2 0,5 \cos x \\ z_3' = z_3 - 0,5 \cos x + \sin x \end{cases} \quad (30)$$

Із першого рівняння системи (30) маємо

$$z_1 = 2 \cos x - 0,5 \sin x + C_1$$

Умова $z_1(0) = z_1(2\pi)$ виконується при будь-якому значенні C_1 . Тобто, всі часткові розв'язки першого рівняння є 2π -періодичними.

Загальний розв'язок другого однорідного рівняння

$$z_2 = C_2 e^x; \quad C_2 - \text{const}$$

Частковий розв'язок другого рівняння шукаємо у вигляді

$$z_{2H} = a \sin x + b \cos x$$

$$z_{2H}' = a \cos x - b \sin x$$

Підставляємо значення z_{2H}, z_{2H}' у друге рівняння системи (30)

$$a \sin x + b \cos x - a \cos x + b \sin x = 0,5 \cos x$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 0,5 \end{cases}$$

$$2b = 0,5 \Rightarrow b = \frac{1}{4}; a = \frac{1}{4}$$

Загальний розв'язок другого рівняння системи (30) буде

$$z_2 = C_2 e^x - \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x$$

Умова $z_2(0) = z_2(2\pi)$ перетворюється у рівність

$$C_2 + \frac{1}{4} = C_2 e^{2\pi} + \frac{1}{4}$$

$$C_2 = 0$$

Отже,

$$z_2 = -\frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x$$

2π -періодичний розв'язок другого рівняння системи (30).

Частковий розв'язок третього неоднорідного рівняння також будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів

$$z_{3H} = a \sin x + b \cos x$$

$$z_{3H}' = a \cos x - b \sin x$$

$$a \sin x + b \cos x - a \cos x + b \sin x = \sin x - 0,5$$

$$\begin{cases} a + b = \\ -a + b = -0,5 \end{cases}$$

$$2b = 0,5 \Rightarrow b = \frac{1}{4}; a = \frac{3}{4}$$

$$z_3 = C_3 e^{2x} + \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x$$

Умова періодичності $z_3(0) = z_3(2\pi)$ приводить до того, що $C_3 = 0$.

$$z_3 = \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x$$

буде 2π -періодичним розв'язком третього рівняння системи (30).

Знайдемо 2π -періодичний розв'язок системи (29)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,75 \\ 0,5 & -0,5 & 0,25 \\ -0,5 & 0,5 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,5 \sin x + 2 \cos x + C_1 \\ -\frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x \\ \frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{4} \cos x \end{pmatrix}$$

Звідки

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{15}{16} \sin x + \frac{15}{16} \cos x + 0,5C_1 \\ y_2 = -\frac{1}{16} \sin x + \frac{15}{16} \cos x + 0,5C_1 \\ y_3 = -\frac{5}{16} \sin x - \frac{13}{16} \cos x - 0,5C_1 \end{cases}$$

Це і будуть 2π -періодичні розв'язки системи (29).

Отже, якщо серед коренів характеристичного рівняння системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і періодичними вільними членами немає нульових, то неоднорідна система буде мати єдиний T -періодичний розв'язок. Якщо одне з характеристичних чисел рівне нулю ($\lambda_i = 0$), то неоднорідна система диференціальних рівнянь матиме T -періодичний розв'язок лише при умові $\int_0^T \varphi_i(x) dx = 0$.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Шкіль Н.И., Вороной А.Н., Лейфура В.Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. – К.: Вища школа, 1986. – 248 с.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 564 с.
4. Шкіль М.І., Сотніченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1992. – 303 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

*Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка,
Кіровоградський національний технічний
університет*

Надійшло 14 вересня 2004р.

УДК 619.1

ПРО ХАРАКТЕРИСТИКИ АРЕХ-ГРАФІВ.

В. І. Петренюк ,Т.В. Петровська

Запропоновано дві нові характеристики множини точок планарних графів, які породжені числом досяжності цієї множини для дослідження арех-графів.

Two new characteristics set of points planar graph which are generated by the reachability number of this set for investigation apex-graphs

В роботах В. Мохи [6] було введено поняття арех- графа, який можливо створити із площинного графа та зірки шляхом ϕ -перетворення заданого на деякій множині точок X площинного графа G та кінцевих вершинах зірки $St(g)$. В [4,5] було отримано верхню оцінку роду шляхом вивчення структурних властивостей множині точок X площинного графа G .

Метою подальшої роботи стало розширення характеристики $\theta_G(X)$ множини точок X та введення нової $\partial\theta(G,X)$ –характеристики .

Основні поняття та позначення узяті із [1]÷[3]. Для неорієнтованого без петель графа G , $G = G^0 \cup G^1$, розглянемо мінімальне укладання $f : G \rightarrow \sigma_V$, де $V = \gamma(G)$, σ_V -замкнутий орієнтовний многовид, $S_G(G^0, f) = \sigma_V \setminus f(G^0 \cup G^1)$.

На множині 2–клітин $\{\Delta_i\}_1^N$, $N = |S_G(G^0, f)|$, визначаємо граф $F(G^0, \sigma_V)$ - граф межування 2-кліток кліткового укладення графа G в 2-многовид σ_V . Тобто, дві вершини графа межування суміжні тільки за наявності спільного ребра їхніх границь відповідних 2-клітин. Для множини точок X , $X \subset G^0 \cup G^1$, визначають мінімальну множину 2-кліток $\Delta_i \in S_G(X)$ на границі яких “виходять” точки із X графа G . В [4] було введено $\theta_G(X)$ – характеристику множини $S_G(X)$, яка стосувалася наявності у трьох 2-кліток спільної вершини, або ними утвореного простого цикла довжини ≥ 3 графа $F(G^0, \sigma_V)$.

Задача полягає у введення іншої характеристики $\partial\theta(G,X)$ множини точок X та її використання з метою “приклеювання” ручки h до них так, щоб замість чотирьох 2-клітин мати дві 2-клітини із $\sigma_{V+1} \setminus f(G)$ на границі яких виходять всі ті точки, що виходили на границі чотирьох 2-кліток.

Означення 1: Будемо говорити, що множина точок X , $S_G(X) = \{\Delta_i\}_1^3$, із числом досяжності $t_G(X) = 3$ та $\theta_G(X) = 0$ має $\partial\theta_G(X) = 1$, якщо виконуються наступні умови:

- 1) $(\bigcap_{i=1}^3 \partial\Delta_i = \emptyset) \wedge (f : G \rightarrow \sigma_V; f \text{ –реалізує } t_G(X));$
- 2) $(\partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2 \cap (G^1 \cup G^0) \neq \emptyset) \wedge (\partial\Delta_3 \cap \partial\Delta_2 \cap (G^1 \cup G^0) \neq \emptyset);$
- 3) $(\exists \Delta_0)(\Delta_0 \in \sigma_V(G, f) / S_G(X)) [(\partial\Delta_0 \cap \partial\Delta_i \cap G \in e_i)(i = 1,2,3)];$

- 4) $(\exists f' : G' \rightarrow \sigma_{V+1})[(f'(e_1 \cup e_3) \subset h(\Delta_1, \Delta_0)) \wedge (f' | G / \{e_1, e_{13}\} = f | G / \{e_{13}\})]$;
 де $h(\Delta_1, \Delta_0)$ - трубка ("ручка") приклеєна φ -перетворенням до 2-кліток Δ_0 та Δ_2 ; причому для такого укладення f' виконуються співвідношення:
 а) $f'(\partial\Delta_2 / \partial\Delta_0) \cup f'(\partial\Delta_0 / (\partial\Delta_1 \cup \partial\Delta_2 \cup \partial\Delta_3)) \cup f'(e_1) \cup f'(e_2) = \partial\Delta'_1$;
 б) $f'(\partial\Delta_1 / e_1) \cup f'(e_2) \cup f'(\partial\Delta_2 \cap \partial\Delta_0) \cup f'(\partial\Delta_3 / \partial\Delta_0) \cup f'(e_3) \cup f(\partial\Delta_2 \cap \partial\Delta_0) = \partial\Delta'_2$;
 в) $(f'(X) \subseteq \partial\Delta'_1 \cup \partial\Delta'_2) \wedge (f'(X) \cap \partial\Delta'_1 \neq \emptyset) \vee (f'(X) \cap \partial\Delta'_2 \neq \emptyset)$,
 де $\Delta_i \in \sigma_{V+1}(G, f')$.

Означення 1.0. Будемо говорити, що множина точок X , де $X \subset G^0 \cup G^1$, $S_G(X) = \{\Delta_i\}'_1$, $t = t_G(X)$ – число досяжності множини X на σ_V , $t \geq 3$, та θ -характеристикою $\theta_G(X) = 0$, має $\partial\theta$ характеристику $\partial\theta_G(X)$ рівну k , $k > 0$, якщо існує 2-кліткове вкладення $f' : G \rightarrow \sigma_{V+k}$, де $V = V(G)$ – род графа G при якому $f'(X)$ є досяжною на поверхні роду $V+k$, тобто $t_G(X, \sigma_{V+k}) = 1$, за умови, що з точністю до перенумерації мають місце співвідношення:

- а) $(\partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2 \cap G^1 \neq \emptyset)(\partial\Delta_2 \cap \partial\Delta_3 \cap G^1 \neq \emptyset) \wedge (\partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_3 = \emptyset)$;
 б) $(\exists \Delta_0)(\Delta_0 \in \sigma_V(G, f') / S_G(X))[(\partial\Delta_0 \cap \partial\Delta_i \cap G^1 \neq \emptyset) \wedge (i = 1(1)3)]$.

Означення 2: Будемо говорити, що ребро U , $U \in G^1$ суттєве відносно $\partial\theta_G(X)$, де $X \subseteq G^1 \cup G^0$, при операції видалення ребра, якщо має місце нерівність:

$$\partial\theta_{G \setminus U}(X) < \partial\theta_G(X), \text{ де } G \setminus U = (G^0, G^1, \{U\}).$$

Означення 3: Будемо говорити, що ребро U , $U \in G^1$ суттєве відносно $\partial\theta_G(X)$, $X \subseteq G^1 \cup G^0$, при операції зтискання ребра, якщо має місце нерівність: $\partial\theta_{G_U}(X) < \partial\theta_G(X)$, де G_U визначимо наступним φ -перетворенням:

$$\varphi(G \setminus (a, b), a + b) = (G_{(ab)}, a^*).$$

Означення 4: Будемо називати граф G – мінімальним відносно $\partial\theta_G(X)$, якщо кожне ребро графа G є суттєвим відносно $\partial\theta_G(X)$ при операціях зтискання чи видалення цього ребра, де $X \subseteq G^0 \cup G^1$.

Означення 5: Будемо називати граф G - t мінімальним відносно t , $t = t_G(X)$ ($\text{rut} = \theta_G(X)$) якщо видалення чи зтискання довільного ребра U , $U \in G^1$, зменшує обидві характеристики множини X -точок графа G , де під точкою розумітимемо або вершину, або внутрішню точку ребра графа.

Лема 1: Мають місце наступні твердження:

- 1) Графи K_4 та $K_{2,3}$ є 2-мінімальними відносно $t_G(G^0)$.
- 2) Графи наведені в списку 1 (в додатку до цієї статті) є 3-мінімальними відносно $t_G(G^0)$.
- 3) Графи із списку 1 є мінімальними відносно $\theta_G(G^0)$, де $\theta_G(G^0) = 1$, $\partial\theta_G(G^0) = 0$.

4) Для графа G - φ -образа графа $G_1 + G_2$ при φ -перетворенні визначеному на ребрах чи їх частинах наступним чином:

$$\varphi(G_1 + G_2, \sum_{i=1}^n U_{1i} + U_{2i}) = (G, \sum_{i=1}^n U_i^*), \text{ де } p_1(L(G_1 + G_2, G) \geq 0)$$

та графа G_0 гомеоморфного $K_{2,3}$ існує φ -перетворення визначено на простих циклах наступним чином:

$$\varphi(G + G_0, z + z_0) = (L, z^*), \text{ де } t_G(G^0)=2,$$

має місце рівність: $\partial \theta_j(J^0) \geq 1$, де $t_j(J^0)=3$.

Доведення леми 1: Твердження 1), 2), 3), не потребують доведення. Для наочності доведення твердження 4) використаємо рис. 1:

Розглянемо множину точок X графа G , яка має число досяжності t , $t=t_G(X)$, та 2-кліткове вкладення $f, f: G \rightarrow \sigma_V$, яке реалізує число t .

Нехай $S_G(X)=\{\Delta_i\}'_1$, $S_G(X) \subset \sigma_V(G, f)$. Покладемо, що $t=3$. Оскільки $\theta_G(X)=0$, то це означає, що не має місце співвідношення:

$$\left(\bigcap_{i=1}^3 \partial \Delta_i = \emptyset\right) \wedge ((\partial \Delta_1 \cap \partial \Delta_2 \cap G^1 \neq \emptyset) \wedge (\partial \Delta_1 \cap \partial \Delta_3 \cap G^1 \neq \emptyset) \wedge (\partial \Delta_2 \cap \partial \Delta_3 \cap G^1 \neq \emptyset))$$

Згідно визначення 1 маємо побудувати 2-кліткове вкладення $f', f': G \rightarrow \sigma_{V+1}$ на основі вкладення f . Для цього приклеїмо ручку $h(\Delta_1, \Delta_0)$ до 2-кліток Δ_1, Δ_0 , які задовольняють визначенню 1, застосувавши φ -перетворення із [1]. А також наступні співвідношення:

а) $f' | \bigcup_{i=4}^n \partial \Delta_i \cap G^1 = f | \bigcup_{i=4}^n \partial \Delta_i \cap G^1, n = |\sigma_V(G, f) / \{\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}|$

б) $\partial \Delta'_1 = f'(\partial \Delta_2 / \partial \Delta_0) \cup f'(\partial \Delta_0 / (\partial \Delta_1 \cup \partial \Delta_2 \cup \partial \Delta_3)) \cup f'(e_1) \cup f'(e_2)$

в) $\partial \Delta'_2 = f'(\partial \Delta_1 \cap G^1 \setminus e_1) \cup f'(e_2) \cup f'(\partial \Delta_2 \cap \partial \Delta_0) \cup f'(\partial \Delta_3 / \partial \Delta_0) \cup f'(e_3) \cup f'(\partial \Delta_2 \cap \partial \Delta_0)$

г) $(f'(X) \subseteq \partial \Delta'_1 \cup \partial \Delta'_2) \wedge ((f'(X) \cap \partial \Delta'_1 \neq \emptyset) \vee (f'(X) \cap \partial \Delta'_2 \neq \emptyset)),$

при цьому $\Delta'_i \in \sigma_{V+1}(G, f')$.

В загальному випадку $X=G^0$. Наступні граfi G матимуть $\partial \theta_G(G^0)=1$ та наведені в списку 2 додатку разом із вкладенням $f': G \rightarrow \sigma_1$.

Відмітимо, що граф г) зтягуватиметься до графа ж), а граф й) отримано із з) шляхом стискання ребра. Доведення леми закінчено.

Теорема: Нехай G - t -мінімальний площинний граф такий, що $X=G^0$, $\theta_G(X)=\theta$, $\partial \theta_G(X)=\partial \theta$. Існує φ -перетворення наступного виду:

$$\varphi(G_1 + G_2 + G_3, R) = (J, R^*) \wedge (p_1(J(\varphi)) \geq 0)$$

де $(G_i \cong K_4)$ або $(G_i \cong K_{2,3})$, R - означатиме множину пар простих циклів чи пар ланцюгів, визначених на множині точок графів $G_i, i=1(1)3$, R^* - результат попарного ототожнення ланцюгів чи циклів, в результаті якого маємо $(J \cong G) \wedge (\partial \theta = 1)$.

Доведення теореми впливає з наведеної вище леми.

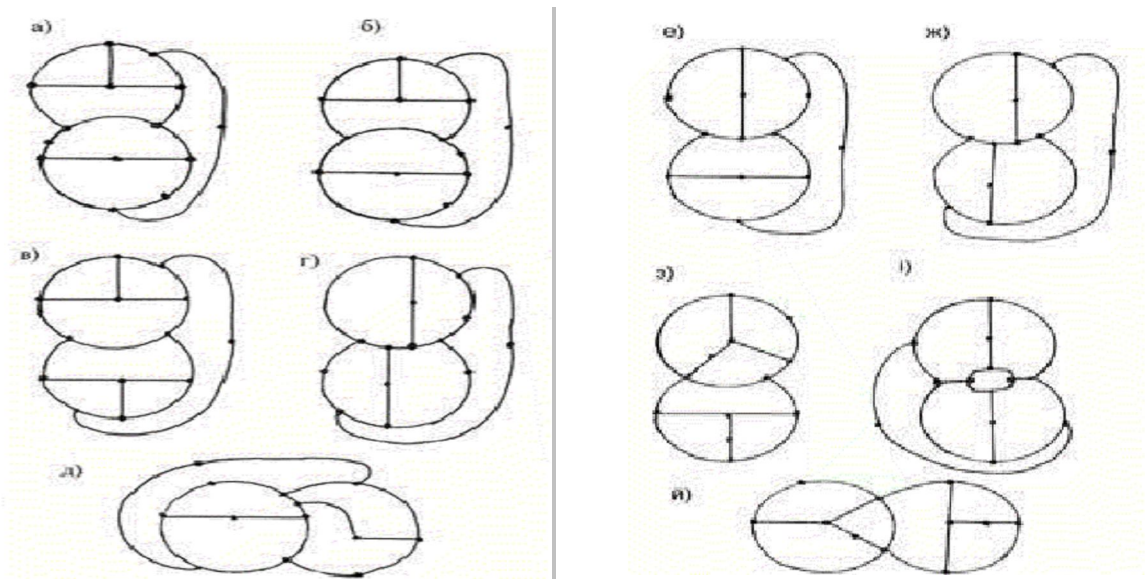


Рис. 1. Графи із списку 2

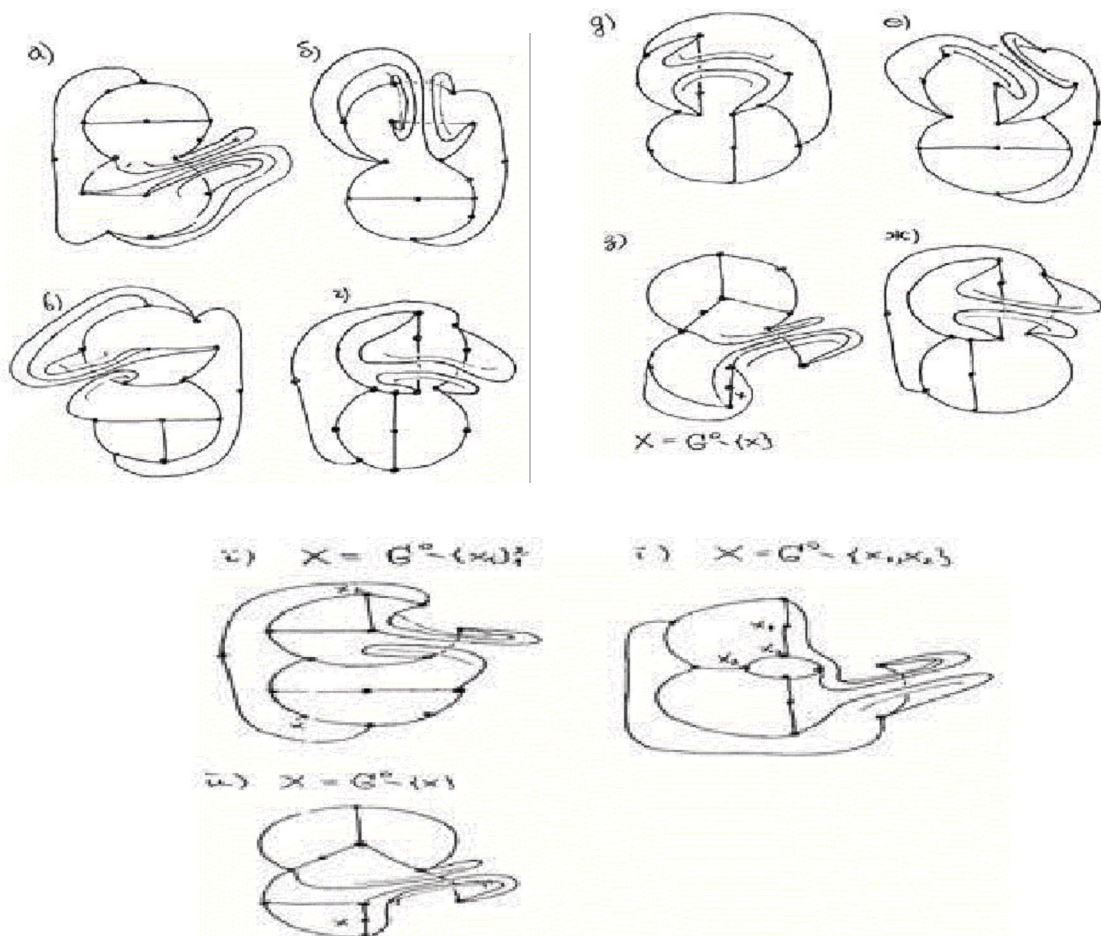


Рис.2. Графи із списку 2 та їхнє укладання на торі

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Хоменко М. П. φ -перетворення графів. // препринт ИМ АНУ, Киев, 1973
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. // препринт ИМ АНУ, Киев, 1971
3. Хоменко Н. П. Островерхий Е. Б. Существенные элементы и род графа. // препринт "Минимальные вложения графов" ИМ АНУ Киев 1972
4. Петренюк В. І. Об оценке рода специальных графов. // деп. рукопис в УкрНИИТИ №1415 15.11.1986
5. Петренюк В. І. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества точек. // деп. рукопис в УкрНИИТИ N 814 19.08.1985
6. V. Mochar. Face covers and the genus of apex graphs, J. Combin. Theory, Ser. B 82 (2001) 102-117. []

*Кіровоградський національний
технічний університет*

Надійшло 21 жовтня 2004 р.

УДК 519.13

ІСНУВАННЯ ДЕЯКИХ Т-ФАКТОРІЗАЦІЙ ПОРЯДКУ 12

Л.П.Петренюк, А.Я.Петренюк

We investigate the existence of T -factorizations of the complete graph of order 12. The algorithm is described constructing a T -factorization for the given tree T when the factorization does exist. With computer aid, T -factorizations are constructed for 143 admissible non-isomorphic trees of the order.

Досліджується задача про існування T -факторизацій повних графів, поставлена у 1964 році Л.Байнеке [1]. Створено алгоритм побудови T -факторизацій порядку 12, реалізований на ПАСКАЛі, з допомогою якого кількість допустимих дерев порядку 12, про які відомо, що вони допускають T -факторизації, доведено до 144.

Нехай T – дерево порядку n , K_n – повний граф того ж порядку.

T -факторизацією графу K_n називають таку сукупність дерев $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$, що (1) всі T_i ізоморфні дереву T , (2) всі T_i – підграфи графу K_n і (3) кожне ребро графу K_n належить одному і тільки одному з дерев T_1, T_2, \dots, T_k . Задача полягає в тому, щоб при заданому n для кожного дерева T порядку n з'ясувати, існує чи ні T -факторизація графу K_n .

1. Результати попередників. Л.Байнеке [1] встановив необхідні умови існування T -факторизації порядку n , а саме: 1) парність числа n , $n=2k$, та 2) виконання нерівності $\Delta(T) \leq k$, де $\Delta(T)$ – найвищий степінь вершини у дереві T . Древа, що задовільняють умови Байнеке, називають *допустимими*.

Наступний крок у розвитку цієї задачі зробили Ш.Хуанг та А.Роса [2], розв'язавши у 1978 задачу існування T -факторизацій для всіх порядків n , $n \leq 8$. Нещодавно А.Я.Петренюк [3,4] розв'язав її у випадку $n=10$ та, за винятком 20 дерев, у випадку $n=14$.

Успіху у випадках $n=10$ та $n=14$ досягнуто здебільшого завдяки зручним необхідним умовам існування T -факторизацій, знайденим автором статей [3,4],

та біциклічному методу побудови T -факторизацій, з допомогою якого проведено побудови T -факторизацій у випадках їх існування.

У статті [9] (скорочена версія – [11]) одержано ряд результатів про неіснування T -факторизацій порядку 12, для чого застосовано раніше відомі та знайдено нові необхідні умови їх існування.

Дану статтю присвячено існуванню T -факторизацій порядку 12. Порядки $n \equiv 0 \pmod{4}$ вирізняються з-поміж інших тим, що у цих випадках не існує біциклічних T -факторизацій [3, 4]. Ця обставина привносить певні труднощі у дослідження. Тому на даний момент відомо про існування тільки 20 дерев порядку 12, для яких існують T -факторизації. Ці T -факторизації побудовано півобертвовим методом у статті [5].

Нижче описано алгоритм побудови T -факторизацій та викладено результати, одержані з його допомогою для порядку 12.

2. Алгоритм побудови T -факторизацій.

Ми скористалися зображенням дерев, яке носить назву *шаблонного*. Дерево T порядку $m=2k$ з множиною вершин $\{1,2,\dots,n\}$ зображується парою об'єктів $(\Pi, \text{Ш})$: *послідовністю* Π вершин $a_1 a_2 \dots a_n$ та *шаблоном* Ш – сукупністю $n-1$ пар чисел виду $i, j, 1 \leq i < j \leq n$, таких, що (a_i, a_j) – ребро дерева T для кожної пари i, j шаблону.

Задаючи конкретний шаблон Ш , ми тим самим фіксуємо дерево T , якому ізоморфні всі компоненти шуканої T -факторизації. Коли послідовність Π пробігає всі можливі значення у лексикографічному порядку, то представлення $(\Pi, \text{Ш})$ дає всі можливі дерева з указаною множиною вершин, ізоморфні дереву T . Цю послідовність дерев ми називаємо *трасою* перебору. Для того, щоб дерева не повторювалися, ми застосовуємо так звані *умови стандартизації*, невиконання яких сигналізує про те, що це дерево вже зустрічалося на трасі, і тому воно пропускається. За рахунок цього перебір істотно скорочується.

Нехай дерева T_i, T_j – підграфи графу K_n . Ці дерева називають *сумісними*, якщо вони не мають спільних ребер. T -факторизацію можна уявляти як підпослідовність k попарно сумісних дерев траси.

Опишемо тепер обіцяний алгоритм.

0°. Покладаємо $\mathbf{T} = \emptyset$.

1°. Виберемо та зафіксуємо першу компоненту $T_1 = (\Pi_1, \text{Ш})$ шуканої T -факторизації, де Π_1 – лексикографічно найперша підстановка: $\mathbf{T} = \{T_1\}$.

2°. Нехай вибрано компоненти T_1, \dots, T_{i-1} шуканої T -факторизації. В пошуках i -ої компоненти, $i > 1$, здійснюємо перегляд траси у лексикографічному порядку, починаючи з того дерева, яке обрано за $i-1$ компоненту. При цьому кожне дерево перевіряємо на стандартність та на сумісність з усіма компонентами T_1, \dots, T_{i-1} . Якщо ці умови виконуються – знайдено компоненту T_i ; додаємо її до \mathbf{T} , $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T} \cup \{T_i\}$, покладаємо $i \rightarrow i+1$ і здійснюємо перехід до пункту 3°. Якщо ж до кінця траси не знайдено сумісне з \mathbf{T} стандартне дерево – переходимо до виконання пункту 4°.

3°. Якщо $i=k+1$, то \mathbf{T} являє собою шукану T -факторизацію, і роботу закінчуємо.

4°. Якщо $i=2$, то T -факторизації не існує, і роботу закінчуємо. В іншому випадку покладаємо $i \rightarrow i-1$, $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T} \setminus \{T_i\}$, і переходимо до пункту 2°.

Для перевірки сумісності дерева T' з раніше вибраними компонентами використовується матриця $A = (a_{ij})$ порядку n , яка на початку обчислень нульова. Як тільки до \mathbf{T} додається нова компонента, остання *реєструється* у матриці A , тобто кожне її ребро ij відзначається покладенням $a_{ij} = a_{ji} = 1$. Безпосередньо перед відкиданням компоненти з \mathbf{T} ця компонента *дереєструється*. Таким чином, у момент перевірки сумісності матриця A містить інформацію про сукупний реберний склад множини \mathbf{T} . Тому для встановлення сумісності досить пересвідчитися, що дерево T' не містить жодного ребра ij з $a_{ij} = 1$.

Істотне прискорення роботи алгоритму досягається за рахунок використання *стратегії стрибків*, яка полягає ось у чому. Якщо переглянуто біжуче дерево $T' = (P', S')$ і виявлено його нестандартність чи несумісність з T , можна вказати найпершу позицію j підстановки P' , яка заважає включити T' у T . Після цього можна “перескочити” через відрізок траси від T' до найпершого з наступних дерев, яке відрізняється від T' у позиції j і не відрізняється у попередніх позиціях, і продовжити перегляд, починаючи з цього дерева.

Наведений алгоритм явно не поліноміальний, але кращого на даний час невідомо.

На основі цього алгоритму автори у випадку $n=12$ створили комп'ютерну програму побудови T -факторизацій. Вона почала значно швидше видавати побудовні результати після введення ще одного прискорюючого фільтру. Опишемо цей фільтр.

Коли побудована і зареєстрована в A передостання, п'ята компонента T_5 , єдиною можливою шостою компонентою може бути граф Z , що складається з усіх невикористаних у T ребер. Добудова T до T -факторизації можлива тоді і тільки тоді, коли Z ізоморфний T . Для розрізнення неізоморфів ми застосували відомий інваріант $d(Z) = (d_1, d_2, \dots, d_{11})$ – розподіл степенів вершин графу Z , у якому d_i означає кількість тих вершин у графі Z , які мають степінь i ($i=1, \dots, 11$). Обчисливши $d(Z)$, порівнюємо його з $d(T)$. Якщо $d(Z) \neq d(T)$, то T не добудовується до T -факторизації, і можна будувати нову п'яту компоненту. У випадку $d(Z) = d(T)$ продовжуємо роботу так, як вказано в алгоритмі.

3. Результати роботи програми. Створена нами програма дозволила побудувати T -факторизації для ряду дерев класу $T(12, 3)$, тобто тих дерев порядку 12, у яких $\Delta(T)=3$. Нижче під кожним номером подано дерево T у канонічній формі та компоненти відповідної T -факторизації. Дерева зображені списками їх ребер та розміщені у канонічному порядку. Звертаємо увагу читача на те, що півсиметричні дерева (які допускають півобертові T -факторизації), у список не включені.

Список побудованих T -факторизацій для дерев класу $T(12, 3)$

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|
| 1. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 6B 7C | 15 29 2B 36 4A 5C 6A 78 8C AB BC |
| 16 18 1B 27 3B 45 46 67 79 8A 9C | 17 23 3C 4B 4C 59 68 7A 89 9A AC |
| 19 1A 24 34 35 39 57 58 69 6C 7B | 1C 28 2A 2C 3A 47 48 56 5B 8B 9B |
| 2. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 6B 9C | 15 16 17 27 2C 35 3A 45 4B 68 69 |
| 18 1C 23 24 28 36 39 47 4A 56 9B | 19 2B 3C 46 5C 67 7A 89 8A 8B AC |
| 1A 29 34 4C 58 6A 79 7B 8C AB BC | 1B 2A 3B 48 57 59 5B 6C 78 7C 9A |
| 3. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 6B AC | 15 16 17 27 35 3A 45 4C 68 69 AB |
| 18 23 24 28 36 39 47 4A 56 5C 9B | 19 1A 2B 3B 46 57 58 6C 79 9C BC |
| 1B 2C 34 48 5B 6A 78 7B 7C 89 9A | 1C 29 2A 3C 4B 59 67 7A 8A 8B 8C |
| 4. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 7B 9C | 15 16 17 27 2C 35 3A 45 68 69 8B |
| 18 1B 23 24 28 36 39 47 4A 56 7C | 19 2B 34 4C 5C 67 78 8A 9B AB AC |

- 1A 29 3C 48 57 59 5B 6B 7A 89 BC 1C 2A 3B 46 4B 58 6A 6C 79 8C 9A
 5. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 7B AC 15 16 17 27 35 3A 45 68 69 8C AB
 18 23 24 28 36 39 47 4A 56 5B 7C 19 1A 2A 3C 46 4C 58 79 8B 9B BC
 1B 29 34 4B 5C 67 6B 6C 78 7A 89 1C 2B 2C 3B 48 57 59 6A 8A 9A 9C
 6. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 9B AC 15 16 17 27 2C 35 3A 45 68 69 AB
 18 1B 23 24 28 36 39 47 4A 56 5C 19 2A 34 48 5B 6B 79 7A 8C 9C BC
 1A 29 3B 4C 58 59 6A 7B 7C 8A 8B 1C 2B 3C 46 4B 57 67 6C 78 89 9A
 7. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 9B BC 15 16 17 27 2A 35 3B 45 68 69 AC
 18 1C 23 24 28 36 39 47 4A 5C 6B 19 2B 3A 48 4C 57 67 78 8A 9C AB
 1A 29 3C 46 56 50 5B 6A 79 8B 8C 1B 2C 34 4B 58 6C 7A 7B 7C 89 9A
 8. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A AB BC 15 16 17 2B 2C 35 3B 45 68 69 7A
 18 29 3A 46 56 58 59 67 7C 8B AC 19 2A 34 4B 5C 6C 79 7B 89 8A 8C
 1A 28 3C 47 4C 5B 6A 78 9A 9B 9C 1B 1C 23 24 27 36 39 48 4A 57 6B
 9. 12 13 14 25 26 37 38 49 9A AB BC 15 16 17 2B 2C 35 45 68 69 7A AC
 18 28 3A 4C 5C 6A 6B 78 79 7C 9B 19 29 3B 3C 46 47 58 7B 8A 8C 9C
 1A 2A 34 4B 56 59 5A 67 6C 89 8B 1B 1C 23 24 27 36 39 48 4A 57 5B
 10. 12 13 14 25 26 37 38 59 6A 7B 8C 15 23 24 27 35 39 48 4A 69 8B AC
 16 2A 39 3C 49 57 68 6B 78 8A 9B 17 18 1A 29 34 47 56 5A 7C 9A BC
 19 1C 28 2B 3A 45 5B 5C 67 6C AB 1B 2C 36 46 4B 4C 58 79 7A 89 9C
 11. 12 13 14 25 26 37 38 59 6A 7B 9C 15 16 17 23 2C 35 45 4A 68 69 8B
 18 2A 39 3B 4C 5B 67 7C 89 8C 9A 19 1C 2B 36 49 5A 6C 78 7A AB BC
 1A 24 27 28 34 3A 46 57 5C 6B 79 1B 29 3C 47 48 4B 56 58 8A 9B AC
 12. 12 13 14 25 26 37 38 59 6A 7B BC 15 16 17 23 35 45 4B 68 69 8A AC
 18 2C 39 3C 49 56 5B 7A 8B 9A AB 19 2A 2B 36 4C 58 67 78 7C 9B 9C
 1A 1B 29 3B 47 48 4A 5A 6C 89 8C 11C 24 27 28 34 3A 46 57 5C 6B 79
 13. 12 13 14 25 26 37 38 59 6A 9B AC 15 16 17 23 2C 35 45 4A 68 69 AB
 18 2B 39 3C 47 49 4B 5B 6C 8A 9A 19 29 36 4C 56 58 7A 7B 8B 8C 9C
 1A 24 27 28 34 3A 46 57 6B 79 BC 1B 1C 2A 3B 48 5A 5C 67 78 7C 89
 14. 12 13 14 25 26 37 38 59 6A 9B BC 15 16 17 23 2A 35 45 4B 68 69 AC
 18 2B 39 47 56 5B 6C 7C 89 8A 9C 19 29 36 3B 4A 5C 78 7B 8C 9A AB
 1A 1C 24 27 28 34 3A 46 57 6B 79 1B 2C 3C 48 49 4C 58 5A 67 7A 8B
 15. 12 13 14 25 26 37 38 59 7A 9B AC 15 16 17 23 2C 35 45 68 69 8A AB
 18 2B 36 3B 4C 5A 5C 67 8B 8C 9A 19 1C 29 3C 47 49 4A 56 6B 78 7B
 1A 24 27 28 34 3A 46 57 5B 79 BC 1B 2A 39 48 4B 58 6A 6C 7C 89 9C
 16. 12 13 14 25 26 37 38 59 7A 9B BC 15 16 17 23 2A 35 45 68 69 8B AC
 18 29 3C 47 48 49 56 6B 8A 9C AB 19 2B 36 3B 4C 5A 5C 78 7B 7C 9A
 1A 1C 24 27 28 34 3A 46 57 5B 79 1B 2C 39 4A 4B 58 67 6A 6C 89 8C
 17. 12 13 14 25 26 37 38 59 9A AB BC 15 16 17 2B 2C 35 3A 45 68 69 AC
 18 29 3C 46 5C 6B 7A 7B 89 8A 9C 19 2A 34 47 49 58 5A 67 7C 8C 9B
 1A 28 3B 4B 4C 57 6A 6C 78 79 8B 1B 1C 23 24 27 36 39 48 4A 56 5B
 18. 12 13 14 25 26 37 48 59 6A 7B 7C 15 16 17 27 35 39 45 4A 68 8B 8C
 18 23 24 28 36 3A 47 57 6B 79 AC 19 2C 3C 4B 56 58 5A 6C 78 9A AB
 1A 29 2A 38 3B 46 49 5C 7A 9B BC 1B 1C 2B 34 4C 5B 67 69 89 8A 9C

19. 12 13 14 25 26 37 48 59 6A 7B 8C 15 19 1B 2B 3A 46 58 5C 6C 79 8A
 16 18 23 27 2A 35 47 4B 67 9A BC 17 28 3C 45 49 4A 5B 6B 7A 89 AC
 1A 24 2C 38 39 57 68 7C 9B 9C AB 1C 29 34 36 3B 4C 56 5A 69 78 8B
20. 12 13 14 25 26 37 48 59 6A 7B BC 15 24 28 29 3B 3C 46 58 78 7C 9A
 16 19 23 2C 3A 4B 57 5C 8A 9B 9C 17 1A 2B 39 45 4A 67 68 6B 79 8C
 18 27 36 49 4C 5B 6C 7A 89 AB AC 1B 1C 2A 34 35 38 47 56 5A 69 8B
21. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 7B 8C 15 16 17 27 2C 35 39 45 68 8A 8B
 18 1B 23 24 28 36 3A 47 56 79 7C 19 2B 34 46 57 5B 6A 89 9C AB AC
 1A 29 38 3B 4C 5C 6B 6C 78 9A 9B 1C 2A 3C 49 4A 4B 58 5A 67 69 BC
22. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 7B 9C 15 16 17 27 35 39 45 68 8A 8C 9B
 18 23 24 28 36 3A 47 56 5B 79 7C 19 1A 2C 34 38 46 4B 5C 67 6A BC
 1B 2A 2B 3B 4C 57 58 69 89 9A AC 1C 29 3C 49 4A 5A 6B 6C 78 8B AB
23. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 7B AC 15 16 17 27 35 39 45 68 8A 8C AB
 18 23 24 28 36 3A 47 56 79 7C 9B 19 1C 2B 38 4C 57 5A 6A 89 9A BC
 1A 2C 34 3B 46 4A 5B 69 6C 78 8B 1B 29 2A 3C 49 4B 58 5C 67 6B 9C
24. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 8B 9C 15 2A 34 39 3A 45 67 68 8A 9B BC
 16 23 24 35 5A 5B 6B 78 79 9A AB 17 18 28 29 2C 38 3B 47 56 6C AB
 19 1B 1C 27 36 4A 4B 57 5C 69 8C 1A 2B 3C 46 49 4C 58 6A 7B 7C 89
25. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 8B AC 15 19 2A 2C 35 46 4B 5B 67 8C AB
 16 24 36 38 3B 4C 5A 6A 79 89 BC 17 18 27 29 2B 3A 3C 47 4A 58 69
 1A 1C 28 39 45 56 5C 6B 78 7C 9A 1B 23 34 49 57 68 6C 7B 8A 9B 9C
26. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 79 9C 15 16 17 27 35 3A 45 68 89 AB AC
 18 23 24 28 36 39 47 56 5A 5C 7B 19 2C 34 38 46 49 58 6A 6B 7C BC
 1A 2B 3B 4A 4B 57 69 6C 79 8C 9A 1B 1C 29 2A 3C 4C 5B 67 78 8A 8B
27. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 9B AC 15 28 3A 3C 45 46 49 5B 67 8B 9A
 16 17 18 23 39 4B 57 6C 79 8A BC 19 2A 2C 36 3B 4A 5C 68 7B 89 8C
 1A 1C 24 29 2B 34 38 47 56 6B 7C 1B 27 35 4C 58 5A 69 6A 78 9C AB
28. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 9B BC 15 23 28 36 3A 46 49 5A 6B 79 7C
 16 17 1A 2B 2C 34 4A 56 69 78 9C 18 1C 24 39 4C 57 5B 68 8B 9A AB
 19 27 38 3B 3C 4B 5C 67 6A 89 AC 1B 29 2A 35 45 47 58 6C 7B 8A 8C
29. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A AB AC 15 16 17 27 35 3A 45 68 89 9B 9C
 18 23 24 28 36 39 47 57 5B 5C 6A 19 1C 2A 3C 46 49 4A 56 6B 7C 8B
 1A 2B 34 3B 4C 58 69 6C 7B 8A 8C 1B 29 2C 38 4B 5A 67 78 79 9A BC
30. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A AB BC 15 24 3B 3C 47 56 57 68 79 9A AC
 16 17 2A 38 49 4B 5C 6B 89 8A 9C 18 19 27 2C 36 4A 5B 6A 6C 8C 9B
 1A 1B 23 28 29 34 3A 45 69 7B 7C 1C 2B 35 39 46 4C 58 5A 67 78 8B
31. 12 13 14 25 26 37 48 59 9A AB BC 15 16 17 2A 2B 36 45 5A 78 9B 9C
 18 23 29 2C 34 38 47 5B 5C 6A 6B 19 28 3A 3B 4B 56 67 79 7B 8C AC
 1A 1B 27 35 3C 46 49 4C 7C 89 8A 1C 24 39 4A 57 58 68 69 6C 7A 8B
32. 12 13 14 25 26 37 48 79 7A 8B 9C 15 16 17 27 2C 35 45 68 89 8A 9B
 18 1A 23 24 28 36 39 47 57 5C 7C 19 2B 3A 3C 49 58 5B 6A 6B 7C 9A
 1B 29 3B 4A 4C 59 5A 67 6C 8C AB 1C 2A 34 38 46 4B 56 69 78 AC BC
33. 12 13 14 25 26 37 48 79 7A 8B BC 15 16 17 27 2A 35 45 68 89 8C AB

- 18 1A 23 24 28 36 39 47 57 7B AC
1B 2B 3A 49 4A 56 5C 67 8A 9B 9C
34. 12 13 14 25 26 37 48 79 7A 9B AC
18 23 24 28 36 39 47 57 5A 7B BC
1A 29 3A 46 4C 5B 5C 69 6A 78 8C
35. 12 13 14 25 26 37 48 79 7A 9B BC
18 23 24 28 36 39 47 57 5A 7C AB
1A 2C 34 38 3A 49 4B 56 5C 67 8C
36. 12 13 14 25 26 37 48 79 8A 9B 9C
18 1A 23 24 28 36 39 47 57 5B 5C
1B 2C 3B 46 49 59 6A 6C 7A 7B 8C
37. 12 13 14 25 26 37 48 79 8A 9B AC
18 1B 23 24 28 36 39 47 57 5A BC
1A 2C 38 46 49 58 5B 6B 6C 7C 9A
38. 12 13 14 25 26 37 48 79 8A 9B BC
18 29 36 49 4A 5B 5C 67 6A 8B AC
1A 2C 3A 4B 4C 57 59 68 6B 78 AB
39. 12 13 14 25 26 37 48 79 9A 9B AC
18 1A 2B 34 38 3B 49 4C 56 5A 7A
1B 23 24 28 36 39 47 57 5B 5C 8A
40. 12 13 14 25 26 37 48 79 9A AB AC
18 1A 23 24 27 36 39 4A 57 8B 8C
1B 2A 38 46 4C 5B 6A 6B 78 7C 89
41. 12 13 14 25 26 37 48 79 9A AB BC
16 24 2B 34 35 38 46 7A 7C 9B 9C
1A 1B 23 36 4C 58 5B 5C 6A 78 89
42. 12 13 14 25 26 37 58 69 7A 7B AC
18 2B 3C 4B 4C 5A 67 79 8B 9A 9C
1A 1C 2C 36 38 3B 47 59 6C 78 89
43. 12 13 14 25 26 37 58 69 7A AB AC
18 2A 2B 3C 47 49 4B 5C 67 6C 8B
1A 29 36 38 3B 4C 56 59 79 8A 8C
44. 12 13 14 25 26 37 58 79 7A 8B 9C
18 1B 2A 3C 4B 59 69 6C 78 8C AB
1A 29 3B 47 48 5C 6A 6B 7C 9A BC
45. 12 13 14 25 26 37 58 79 7A 8B BC
18 2B 3C 48 4C 59 6A 6B 78 9A 9C
1A 29 3B 49 4A 56 6C 7B 7C 8A 9B
46. 12 13 14 25 26 37 58 79 7A 9B AC
18 29 3B 47 4A 5C 6A 6C 8B 8C 9A
1A 24 27 28 34 39 46 57 5A 5B BC
47. 12 13 14 25 26 37 58 79 7A 9B BC
18 29 3B 47 48 49 5C 6B 6C 8A AB
- 19 2C 34 38 3B 59 5A 6A 6B 6C 7C
1C 29 3C 46 4B 4C 58 5C 69 78 9A
15 16 17 27 35 45 68 89 8A 9C AB
19 1C 2B 2C 38 4A 4B 56 67 6C 8B
1B 2A 34 3B 3C 49 58 59 6B 7C 9A
15 16 17 27 35 45 68 89 8B 9A AC
19 1B 2B 3C 4C 58 5B 69 6A 78 9C
1C 29 2A 3B 46 4A 59 6B 6C 7B 8A
15 16 17 27 29 35 45 68 8B AB BC
19 2B 3C 4A 4B 58 5A 69 7C 89 AC
1C 2A 34 38 3A 4C 56 67 6B 78 9A
15 16 17 27 2A 35 45 68 89 9C AB
19 2B 3B 4A 4C 56 59 67 7A 7B 8C
1C 29 34 3A 3C 4B 5C 69 6A 78 8B
15 16 17 24 3B 3C 47 58 5A 69 9C
19 1B 23 28 2A 34 39 46 56 7B 7C
1C 27 2B 35 38 45 6C 7A 89 8C 9A
15 16 17 27 35 45 68 8B 9C AB BC
19 2C 3A 4A 58 69 6A 6B 7B 7C 8C
1C 29 2A 3C 46 4B 59 67 6C 78 89
15 16 17 28 29 35 45 68 7A 9B 9C
19 2C 3C 47 4B 56 58 5A 67 69 BC
1C 2A 38 46 4C 5B 6A 6B 78 89 7A
15 27 3A 45 4A 4B 59 67 6C 8B 8C
17 18 19 29 2A 3B 3C 47 57 68 AC
1C 28 2C 39 49 56 5A 69 6B 7B 8A
15 16 17 35 23 45 49 68 8A 8C AB
19 29 2A 3A 48 4A 56 6B 7C 9B BC
1B 24 27 28 34 39 46 57 5B 5C 6A
15 16 17 23 35 45 4A 68 89 9B 9C
19 1C 2C 3A 48 5A 6B 78 7B 7C 9A
1B 24 27 28 34 39 46 57 5B 6A BC
15 16 17 23 2C 35 45 68 89 8A 9B
19 24 27 28 34 39 46 57 5A 5B AC
1C 2B 36 38 3A 49 4A 4C 56 67 7B
15 16 17 23 2A 35 45 68 89 8C AB
19 1C 24 27 28 34 39 46 57 5A 5B
1B 2C 36 37 3A 47 4B 5C 67 69 AC
15 16 17 23 35 45 68 89 8A 9C AB
19 2C 36 38 3A 4B 56 69 78 7B 7C
1B 1C 2A 2B 3C 48 49 4C 59 67 6B
15 16 17 23 35 45 68 89 8B 9A AC
19 2B 2C 36 38 3A 4C 56 69 7B 8C

- 1A 1C 24 27 28 34 39 46 57 5A 5B
48. 12 13 14 25 26 37 58 79 8A 9B 9C
18 1A 2A 3A 49 5C 67 69 6B 7C 89
1B 24 27 28 34 3B 46 57 5A 9A AC
49. 12 13 14 25 26 37 58 79 8A 9B BC
17 24 38 3A 4B 4C 5B 69 6C 78 AB
1A 2C 35 48 49 57 5C 67 6B 8C 9A
50. 12 13 14 25 26 37 58 79 9A 9B AC
18 1C 2A 3B 49 4A 57 6C 7B 7C 8A
1A 29 2B 3C 48 59 67 6A 6B 89 8C
51. 12 13 14 25 26 37 58 79 9A AB AC
18 28 38 3A 4A 4C 59 6C 7B 9B 9C
1A 27 3B 4B 57 5C 67 69 6A 8B 8C
52. 12 13 14 25 26 37 58 79 9A AB BC
16 27 3A 3B 45 56 57 78 8A 9B 9C
19 1A 23 24 28 35 39 68 7B 7C AC
53. 12 13 14 25 26 37 78 79 8A 9B AC
18 2B 3B 46 4C 57 5C 69 6B 7A 8C
1A 2C 34 39 3A 4B 58 5B 6A 7B 7C
54. 12 13 14 25 26 37 78 79 8A AB BC
18 2C 3C 46 4A 4C 57 59 67 7B 89
1B 2A 34 39 3A 4B 56 5B 6C 7A 8C
55. 12 13 14 25 26 37 78 89 8A 9B AC
18 24 38 39 3A 4B 58 6A 6B 7B 7C
1A 1B 27 3C 49 4A 56 69 6C 7A 8C
56. 12 13 14 25 26 37 78 89 8A 9B BC
18 2C 38 39 3A 46 4C 58 67 6B AB
1A 27 3C 4A 4B 5C 69 6A 79 7C 8B
57. 12 13 14 25 26 37 78 89 9A 9B AC
18 29 38 3A 3B 49 4C 58 67 6A 79
1B 23 24 27 36 39 48 5A 5B 5C 8A
58. 12 13 14 25 26 37 78 89 9A AB AC
16 19 23 24 27 57 67 8A 8B 8C 9B
1A 2A 35 38 39 47 4A 4C 68 6B BC
59. 12 13 14 25 26 37 78 89 9A AB BC
18 2B 3B 47 4C 56 59 6A 6B 79 8C
1A 1B 23 24 27 36 39 48 5B 5C 8A
60. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 6B 7C
18 23 24 27 38 45 5B 5C 67 69 8A
1B 2C 37 3A 4A 4C 57 6C 8B 9A 9B
61. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 6B 8C
16 29 2A 3B 46 5C 67 7A 89 9C AB
1A 26 28 2C 3A 4A 4B 57 69 7B 8B
1B 2A 3C 4A 4B 59 6A 78 7C 9C
15 16 17 23 29 45 68 8B AB BC AB
19 2B 3C 47 4A 4B 59 5B 6C 78 8C
1C 2C 36 38 39 48 4C 56 6A 7A 7B
15 16 18 27 3B 3C 45 5A 7A 89 9C
19 1B 23 28 2A 34 39 56 6A 7B 7C
1C 29 2B 36 46 47 4A 59 68 8B AC
15 6 17 23 35 45 68 8B 9C AB BC
19 2C 36 38 3A 47 4B 4C 56 69 78
1B 24 27 28 34 39 46 5A 5B 5C 7A
15 16 17 2A 2B 2C 35 39 45 68 8A
19 1B 23 29 34 36 47 48 5B 7A BC
1C 24 3C 46 49 56 5A 6B 78 7C 89
15 18 2C 34 3C 4B 59 5C 6A 6B 7A
17 1B 29 38 48 49 4A 5B 67 6C 8C
1C 2A 2B 36 46 47 4C 5A 69 89 8B
15 16 17 28 2A 35 45 68 89 9C AB
19 1B 23 24 27 36 38 49 59 5A BC
1C 29 3C 47 48 4A 56 67 6C 8B 9A
15 16 17 28 29 35 45 68 8B 9A AC
19 1A 23 24 27 36 38 49 5A 5C 9B
1C 2B 3B 47 48 58 69 6A 6B 7C 9C
15 16 17 28 29 2A 35 45 68 9C AB
19 2C 3B 46 4C 57 5A 67 79 8B BC
1C 23 2B 34 36 47 48 59 5B 5C 9A
15 16 17 28 29 2B 35 45 68 9A AC
19 1C 23 2A 34 36 47 48 59 5A 5B
1B 24 3B 49 56 57 6C 7A 7B 8C 9C
15 16 17 28 2B 35 45 68 9C AB BC
19 1A 2A 3C 47 4A 56 6B 6C 7B 8C
1C 2C 34 46 4B 57 59 69 7A 7C 8B
15 28 29 34 45 48 56 7A 7B 7C 9C
17 18 1B 2B 3A 3C 46 5B 5C 69 6A
1C 2C 36 3B 49 4B 58 59 5A 6C 79
15 16 17 28 2A 35 45 68 9B 9C AC
19 29 34 3C 49 4B 58 5A 67 6C 7A
1C 2C 38 3A 46 4A 57 69 7B 7C 8B
15 16 17 26 2A 2B 34 35 39 78 8C
19 1A 28 3B 48 49 5A 68 7A 9C BC
1C 29 3C 46 4B 56 79 7B 89 AB AC
15 17 19 24 34 3C 45 68 78 8A 9B
18 1C 27 35 39 49 4C 56 5A 79 BC
1B 23 2B 37 38 48 5B 6C 7C 9A AC

62. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 7B 8C
16 1A 2A 34 4C 56 5B 6C 79 8B 9B
18 1B 1C 27 29 2C 3A 3B 46 48 57
63. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 7B AC
16 17 23 34 46 5A 6B 7A 8C 9C BC
1A 1C 24 27 2B 35 38 48 56 89 9A
64. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 8B 9C
16 1C 2B 2C 34 3A 4C 57 7B 89 9B
19 27 28 35 3B 4A 4B 6B 6C 8A 9A
65. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 8B AC
16 18 28 2B 35 3B 48 4A 7A 7C 9B
19 1C 23 2C 4B 56 6B 79 7B 8A 9A
66. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 8B BC
16 27 29 37 3A 4A 5B 5C 67 89 9B
18 23 26 34 45 4B 78 79 7B 9C AC
67. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A AB AC
18 2C 37 46 48 49 5C 6C 7A 7B 9A
1A 1C 2B 3B 4B 4C 56 57 68 69 7C
68. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A AB BC
16 17 2A 37 3B 4A 4B 56 68 79 9C
1A 2C 34 39 46 5C 78 7A 7B 8C 9B
69. 12 13 14 25 36 47 58 59 8A AB AC
18 23 24 27 38 45 6A 6B 6C 79 8B
1A 28 29 2A 39 46 48 4C 5B 7B BC
70. 12 13 14 25 36 47 58 59 8A AB BC
16 23 2A 48 4A 57 69 7B 7C 9B AC
1A 26 27 35 38 45 46 5B 6A 89 9C
71. 12 13 14 25 36 47 58 69 7A 8B 8C
16 1A 26 27 34 3B 59 6B 79 8A 9C
18 28 2B 37 48 56 5B 5C 6A 7C 9A
72. 12 13 14 25 36 47 58 69 7A 8B 9C
16 24 34 3C 59 6A 7B 7C 8A 8C 9B
18 1B 28 35 37 45 46 5B 6C 79 9A
73. 12 13 14 25 36 47 58 69 8A 8B AC
16 19 2C 39 48 4B 5B 6A 6C 7A 7B
18 1A 28 2B 34 45 56 5A 67 79 8C
74. 12 13 14 25 36 47 58 69 8A 9B AC
16 27 2A 2B 34 38 57 6C 8B 9A 9C
19 1B 24 39 46 5A 5C 67 6B 78 8C
75. 12 13 14 25 36 47 58 69 8A AB AC
16 1C 24 35 39 46 4A 78 7B 9B 9C
18 28 2B 37 48 56 57 5C 6A 9A BC
76. 12 13 14 25 36 47 58 69 8A AB BC
15 24 37 45 5C 69 6B 78 89 9C AB
17 26 38 39 3C 4B 5A 68 7A 9A BC
19 23 28 2B 35 49 4A 67 7C 8A AC
15 18 28 29 3A 3C 45 57 68 6C 9B
19 2A 2C 39 49 4B 5C 67 78 8B AB
1B 26 37 3B 4A 4C 5B 69 79 7C 8A
15 18 23 29 45 49 5C 67 69 7A BC
17 1A 26 2A 37 39 46 5A 5B 78 8C
1B 24 38 3C 48 56 68 79 7C AB AC
15 1B 29 3B 3C 45 57 68 6C 78 89
17 24 26 37 38 39 49 4C 5A 5C AB
1A 27 2A 34 46 5B 67 69 8C 9C BC
15 19 1A 2B 2C 38 39 3B 46 56 7A
17 1C 28 2A 3C 48 4C 57 68 69 AB
1B 24 35 49 5A 6B 6C 7C 8A 8C 9A
15 16 17 26 29 34 35 3A 78 9B 9C
19 28 2A 39 3C 4A 5A 6B 79 8B 8C
1B 23 24 27 38 45 5B 67 89 8A BC
15 18 28 29 38 3A 45 57 6B 6C AC
19 26 2B 35 3C 49 4C 67 7C 8B 9A
1B 1C 23 24 27 48 5A 5B 69 89 8A
15 16 17 26 34 35 3A 49 78 9B 9C
19 2C 37 3B 4A 5C 67 69 7A 89 8C
1B 1C 2B 3C 4B 56 57 5A 68 7C 9A
15 18 19 2B 2C 34 30 3A 4B 56 78
17 24 29 3B 4C 5C 67 68 6B 8C 9A
1B 1C 28 37 3C 49 5A 6C 79 7A 8B
15 1B 2A 2C 3A 45 57 68 6C 89 BC
17 19 24 39 3C 46 4C 5A 78 9B AB
1C 23 29 35 38 49 4A 4B 67 7B AC
15 1C 23 2A 39 4A 4C 67 6B 89 AB
17 19 26 27 2B 38 48 4B 56 5A AC
1A 29 2C 3A 3B 49 57 5C 68 78 BC
15 26 29 35 3C 4A 4C 78 7C 9A 9B
17 1B 23 24 27 38 46 5C 89 AB BC
1C 2A 37 3A 3B 49 57 59 68 6B 9C
15 18 26 2C 37 45 4C 7A 89 AB BC
17 29 3A 3C 48 4A 4B 59 5B 68 7C
1A 1C 23 28 35 3B 49 56 6A 79 7B
15 1B 27 29 2C 38 3C 4B 59 6B 7A
17 19 23 26 3A 3B 45 49 68 7C 89
1A 2A 34 4C 5A 5B 67 6C 79 8B 8C
15 1A 27 29 35 39 48 6B 6C 78 7C

- 16 23 2A 34 46 37 5B 5C 79 8B AC
18 19 24 26 3C 45 68 7A 7B 9B 9C
77. 12 13 14 25 36 47 58 89 8A 9B BC
16 1B 23 37 4C 57 5A 69 7C 8B AB
1A 26 27 35 38 3B 45 46 6A 8C 9C
78. 12 13 14 25 36 47 58 89 9A 9B AC
16 1B 23 3C 49 5C 6C 79 7A 7B 8A
1A 26 27 35 38 45 46 6A 8B 8C 9C
79. 12 13 14 25 36 47 58 89 9A AB AC
16 1B 29 37 3B 4C 57 5A 6C 79 8C
1A 26 27 35 38 45 46 6A 8B 9B BC
80. 12 13 14 25 36 47 58 89 9A AB BC
17 18 29 2A 35 49 4B 57 6A 6C 7C
1B 24 28 3B 3C 59 5C 68 69 78 7A
81. 12 13 14 25 36 57 58 69 6A 7B 9C
18 1C 23 26 27 34 49 4A 59 78 8B
1A 28 35 4C 56 5B 6C 79 7C 8A AB
82. 12 13 14 25 36 57 58 69 6A 7B BC
18 2A 3A 46 47 4B 59 68 7A 8C 9C
1B 2C 37 3C 4C 5A 67 79 8A 8B 9B
83. 12 13 14 25 36 57 58 69 7A 9B 9C
16 18 27 29 2A 37 3B 4B 56 6A BC
19 1C 26 28 39 49 5A 6B 6C 78 8A
84. 12 13 14 25 36 57 58 69 7A 9B AC
18 1A 24 35 3B 45 46 67 78 79 BC
1B 2B 2C 38 4A 59 5A 68 6C 7C 89
85. 12 13 14 25 36 57 58 69 9A 9B AC
18 1A 28 3A 3C 47 4B 4C 5A 67 89
1B 2A 3B 45 46 49 5B 6C 78 7A 7C
86. 12 13 14 25 36 57 58 69 9A AB AC
16 1B 23 37 3C 4B 5B 67 89 8A 8C
19 26 27 39 3B 49 56 6C 78 7A BC
87. 12 13 14 25 36 57 58 69 9A AB BC
16 18 19 23 24 28 5A 5B 6B 7A 7C
1B 29 2C 38 3B 46 47 4A 59 79 8C
88. 12 13 14 25 36 57 68 79 7A 8B 9C
16 19 23 24 37 3C 4B 5B 6C 8A AB
1A 26 28 39 48 4C 58 6A 7B 9B BC
89. 12 13 14 25 36 57 68 79 7A 8B BC
16 17 19 2B 2C 34 45 4A 56 89 8C
1A 1B 27 29 35 38 3B 47 69 6A AC
90. 12 13 14 25 36 57 68 79 8A 9B 9C
16 19 1B 26 27 34 47 4C 58 5A 8B
- 17 28 2C 3B 4B 4C 57 59 6A 89 9A
1B 1C 2B 38 3A 49 4A 56 5A 67 8C
15 18 19 24 2A 34 39 4B 56 78 AC
17 29 2B 3C 48 4A 59 67 6B 6C 9A
1C 28 2C 3A 49 5B 5C 68 79 7A 7B
15 18 19 24 2A 2C 34 39 56 78 AB
17 29 3B 48 4C 5A 5B 67 68 69 BC
1C 28 2B 37 3A 4A 4B 5B 59 6B 7C
15 18 19 2A 2B 2C 34 39 4A 56 78
17 23 24 48 4B 59 5B 67 7C 8A 9C
1C 28 3A 3C 49 5C 68 69 6B 7A 7B
15 16 26 27 34 46 5A 8B 8C 9B AC
19 1A 2B 2C 37 38 3A 48 5B 67 9C
1C 23 39 45 4A 4C 56 6B 79 7B 8A
15 16 17 24 2C 37 39 3A 45 48 9B
19 2A 37 3B 4B 4C 5C 6B 89 8C 9A
1B 29 2B 38 46 5A 67 68 7A AC BC
15 16 17 26 29 2B 34 35 38 4A AC
19 1A 23 24 27 39 45 56 5C 89 AB
1C 28 3B 48 49 5B 6B 6C 78 7C 9A
15 1A 23 24 38 46 47 59 5C 89 8B
17 2C 34 3C 45 48 68 79 7B AB AC
1B 2B 35 3A 4A 4C 5B 67 7C 8C 9A
15 16 17 26 29 34 3A 47 48 9C AB
19 27 28 2A 3C 4B 56 5C 6B 8C 9A
1C 23 37 39 49 4C 5B 6A 7B 8A 8B
15 16 17 26 2B 34 35 38 9C AB BC
19 23 24 27 39 4A 59 68 6A 6B 8C
1C 29 2C 37 48 56 5C 79 7B 8A 8B
15 17 1C 29 2A 2B 34 38 46 4C 8B
18 24 28 35 4A 59 5A 68 79 7B 7C
1A 2C 3A 45 47 48 5C 6A 6B 9B 9C
15 17 27 35 45 68 6A 78 9B 9C AC
1A 2A 37 3C 48 49 4B 56 6C 7B 8A
1C 26 2B 34 39 3A 4C 5C 67 89 8B
15 17 27 38 3B 49 69 6B 7C 9A AC
18 1B 2C 34 3A 46 47 59 5A 5C 78
1C 29 2A 2B 35 45 4A 56 67 89 8C
15 23 28 37 39 49 4B 58 5A 6B 6C
18 2A 3A 46 4C 5B 5C 67 78 9C AB
1C 24 26 3C 48 59 7B 7C 8A 9A 9B
15 2C 3C 49 4B 5B 69 78 7A 89 AC
17 28 2A 35 39 3B 45 46 67 7C AB

- 18 1C 24 29 2B 37 3A 48 5C 6A 6C
 91. 12 13 14 25 36 57 68 79 8A 9B BC
 17 2A 35 3B 48 4A 59 6A 6B 7C 8C
 19 26 27 28 38 3C 46 4B 5A 5B 9C
 92. 12 13 14 25 36 57 68 79 8A 9B BC
 17 18 29 35 39 47 4C 5B 6C AB AC
 1B 2C 3A 46 4B 56 59 78 7A 8C 9A
 93. 12 13 14 25 36 57 68 79 9A 9B AC
 16 1A 27 2C 35 37 39 4B 56 8A AB
 1B 24 29 3A 3B 46 48 5A 7B 7C 8C
 94. 12 13 14 25 36 57 68 79 9A AB BC
 18 2B 3A 3C 46 48 59 5C 6A 78 7B
 1A 2C 3B 49 4C 56 58 69 7A 7C 8B
 95. 12 13 14 25 36 57 78 89 9A AB AC
 18 19 23 24 27 38 45 6A 6B 6C 9C
 1B 2B 39 3B 48 4A 4C 56 5A 69 7C
 96. 12 13 14 25 36 57 78 89 9A AB BC
 18 1A 23 24 27 38 49 5A 5B 6B 6C
 1B 2C 39 3A 4A 4B 58 5C 67 69 7C
 97. 12 13 14 25 56 67 78 89 9A AB BC
 18 26 27 3B 3C 48 4B 57 59 5A 6C
 1B 29 2C 35 37 38 49 4A 5C 6A 6B
- 1A 23 38 4A 56 59 6B 7B 8C 9A BC
 15 16 1C 2B 34 39 4C 67 78 8B 9A
 18 1A 29 3A 47 49 58 5C 6C 7B BC
 1B 23 24 2C 37 45 56 69 7A 89 AB
 15 16 1A 2B 34 38 4A 67 7B 89 9C
 19 26 27 28 3B 3C 48 49 5A 5C 6A
 1C 23 24 2A 37 45 58 69 6B 7C 8B
 15 17 23 26 38 49 59 67 6A 9C BC
 18 19 2B 3C 4A 4C 58 5B 69 6C 78
 1C 28 2A 34 45 47 5C 6B 7A 89 8B
 15 16 17 26 28 34 32 4A AC 9B 9C
 19 1B 23 24 27 38 45 5A 6B 6C 89
 1C 29 2A 37 39 47 4B 5B 67 8A 8C
 15 16 17 26 34 35 49 8A 8B 8C 9B
 1A 28 29 2A 37 3C 47 59 5B 67 BC
 1C 2C 3A 46 4B 58 5C 68 79 7A 7B
 15 16 17 26 34 35 48 8A AC 9B 9C
 19 2B 37 45 4C 56 6A 79 7A 8B 8C
 1C 28 29 2A 3B 3C 46 47 59 68 7B
 15 16 17 23 28 34 47 8A 9B 9C AC
 19 1A 24 36 39 45 46 7A 7B 8B 8C
 1C 2A 2B 3A 4C 58 5B 68 69 79 7C

Поданий список є підставою для наступної теореми.

Теорема 1. *Принаймні 97 неізоморфних дерев класу $T(12,3)$ допускають T -факторизацію.*

Крім цього, побудовано T -факторизації для наступних дерев (вказано значення інваріанту d кожного дерева).

98. 12 13 14 15 16 27 28 29 3A 4B 7C $d(T)=(7,3,0,1,1,0)$
 12 13 14 15 16 27 28 29 3A 4B 7C
 18 23 2B 34 35 36 37 48 49 4B 5C
 1A 1B 24 3B 47 5B 67 79 7B 8C BC
 17 25 2C 39 45 56 57 58 69 6A 6B
 19 26 38 4C 5A 68 78 89 8A 9B 9C
 1C 2A 3C 46 59 6C 7A 8B 9A AB AC
 99. 12 13 14 15 16 27 28 29 3A 4B AC $d(T)=(7,3,0,1,1,0)$
 12 13 14 15 16 27 28 29 3A 4B AC
 18 1A 24 39 47 59 67 78 79 7B 9C
 1B 23 2B 34 35 36 37 48 49 4A 5C
 17 25 2C 3C 45 56 58 69 6A 6B 7C
 19 2A 3B 46 5B 6C 7A 8A 9B AB BC
 1C 26 38 4C 5A 68 7C 89 8B 8C 9A
 100. 12 13 14 15 16 27 28 29 3A 7B AC $d(T)=(7,3,0,1,1,0)$
 12 13 14 15 16 5A 67 68 69 7B AC
 18 28 2A 34 35 36 37 38 7C 89 BC
 1A 29 39 49 56 5C 7A 8A 8B 9A 9C
 17 1C 23 24 25 26 27 6A 78 79 AB
 19 2C 3A 3C 45 47 48 4B 4C 6C 9B
 1B 2B 3B 46 4A 57 58 59 6A 6B 8C
 101. 12 13 14 15 16 27 28 29 3A 7B 8C $d(T)=(7,3,0,1,1,0)$
 12 13 14 15 16 5A 67 68 69 7B 8C
 18 28 2B 34 35 36 37 38 7A 89 9C
 17 1C 23 24 25 26 27 6A 78 79 8B
 19 2A 3B 45 47 48 49 4B 6C AB BC

1A 29 3A 4A 4C 57 59 6B 8A 9A 9B	1B 2C 39 3C 46 56 58 5B 5C 7C AC
102. 12 13 14 15 26 67 78 79 8A 9B AC	$d(T)=(5,5,1,1,0,0)$
12 13 14 15 56 67 78 79 8A 9B AC	16 17 23 24 25 26 7A 7B 8B 9A 9C
18 2A 3B 3C 45 47 49 4C 68 6B AB	19 1A 27 28 34 35 36 37 89 8C BC
1B 29 2B 39 3A 46 57 58 5A 5C 69	1C 2C 38 48 4A 4B 59 5B 6A 6C 7C
103. 12 13 14 15 26 67 78 79 8A AB BC	$d(T)=(5,5,1,1,0,0)$
12 13 14 15 56 67 78 79 8A AB BC	16 17 23 24 25 26 7A 7B 89 8C 9A
18 19 27 28 34 35 36 37 8B 9C AC	1A 2A 2B 39 3A 45 47 48 4B 69 6C
1B 2C 38 3B 46 4C 57 58 59 5A 6B	1C 29 3C 49 4A 5B 5C 68 6A 7C 9B

Наша програма побудувала також T -факторизації для 20 неізоморфних дерев порядку 12, які мають розподіл степенів вершин $d(T)=(6,3,2,1,0,0)$. Ці T -факторизації опубліковано в тезах [10].

Враховуючи щойно наведені результати та 20 напівсиметричних дерев, для яких T -факторизації побудовано в [5], ми формулюємо підсумкову теорему.

Теорема 2. *Існують принаймні 143 неізоморфних допустимих дерев порядку 12, для яких існують T -факторизації.*

Висновки та перспективи. З наведених результатів випливає, що існування T -факторизацій порядку 12 для багатьох дерев можна встановити (і для багатьох вже встановлено!) побудовою, яка проводиться комп'ютерною програмою, створеною авторами за описаним вище алгоритмом. Продовжується систематичний пошук з допомогою цієї програми нових

T -факторизацій порядку 12.

З іншого ж боку, не виключена можливість неіснування T -факторизацій для певних дерев порядку 12, не знайдених у [9]. З метою доведення неіснування слід не припиняти пошук нових необхідних умов існування. Наша програма здатна (при наявності достатньої кількості машинного часу) встановити неіснування T -факторизацій для певного дерева T порядку 12. Тому бажано модернізувати цю програму з метою збільшення швидкодії. Вкажемо на один із шляхів такої модернізації – створення спеціалізованих програм побудови (чи доведення неіснування) T -факторизацій для дерев T , взятих з окремих класів дерев.

Зазначимо, що час від початку роботи до одержання програмою першої T -факторизації істотно залежить від вибору вигляду початкового шаблону дерева T . Тому актуальна наступна задача, яка в описаних вище дослідженнях розв'язувалася на інтуїтивному рівні: вибрати початковий шаблон так, щоб мінімізувати цей час.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Beineke L. W., Decomposition of complete graphs into forests // Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl. – 1964. – № 9. – P. 589–594
2. Huang C., Rosa A., Decomposition of complete graphs into trees // Ars Combinatoria – 1978. – № 5. – P.23–63.

3. Petrenjuk A. J., On tree factorizations of K_{10} // Journal of Combin. Math. and Combin. Computing –2002. – 41. – P.193–202.
4. Петренюк А. Я. Древесные факторизации полных графов: существование, построение, перечисление // Материалы 7 Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, 29 января – 2 февраля 2001 г.). М.– 2001. – С. 26–30.
5. Петренюк А. Я., Півоберткові деревні факторизації повних графів // Укр. матем. журнал. – 2001. –53, №5. – С. 710–716.
6. Петренюк А. Я., Необхідні умови існування Т-факторизацій // Доповіді НАНУ. –2002. – 3. – С.71–73.
7. Петренюк А. Я., Екстремальні розклади повних графів: існування, перелік // Докторська дис., Київ, 2002.– 266 стор.
8. Petrenjuk A. J., Nonisomorphic double star factorizations of order 12 // Наукові праці академії: випуск 4, частина 1 (за ред. Р. М. Макарова) –Кіровоград: Видавництво ДЛАУ, 1999, С. 212–214.
9. Петренюк А. Я. Петренюк Д. А., Неіснування деяких Т-факторизацій порядку 12, УМЖ (здано до друку)
10. Petrenjuk L. P. Petrenjuk A. J., On the existence of T-factorizations of order 12 // Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції “Динаміка наукових досліджень’2003”, 20–27 жовтня 2003 року, Дніпропетровськ–Кіровоград–Одеса, Т. 32, Математика. Дніпропетровськ, “Наука і освіта”, 2003, 21–23.
11. Petrenjuk A. J. Petrenjuk D. A., The nonexistence of some T-factorizations // Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції “Динаміка наукових досліджень’2003”, 20–27 жовтня 2003 року, Дніпропетровськ–Кіровоград–Одеса, Т. 32, Математика. Дніпропетровськ, “Наука і освіта”, 2003, 19–20.
12. Petrenjuk L. P. Petrenjuk A. J., 100 новых Т-факторизаций порядка 12. // Материалы 8 Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, 29 января – 2 февраля 2004 г.), М.– 2004 (публікується).

*Кіровоградський національний
технічний університет*

Надійшло 11 травня 2004р.

УДК 517.98

ЗГОРТКИ З НЕПЕРЕРВНИМИ ВЕКТОРНИМИ МІРАМИ

В. О. Романов

Доводяться теореми неперервності згорток для кожної з основних топологій в просторі векторних мір.

The theorems of continuity of convolutions for every of the basic topologies in a space of vector measures are proved.

Відомо [1, 2], що для скалярних мір в топологічних лінійних просторах операція згортки має суттєве значення при побудові теорії розподілів та теорії наближень. У зв'язку з подальшим розвитком функціонального аналізу виникає потреба в дослідженні векторних мір, в тому числі неперервних [3, 4]. Згортки з такими мірами можуть бути використані при побудові розв'язків задачі Коші [5,6]. Тому дослідження згорток з неперервними векторними мірами є актуальними як для розвитку самої теорії міри, так і до застосувань до теорії розподілів, диференціальних рівнянь та теорії наближень. Метою даної статті є одержання результатів про неперервність згорток в основних топологіях простору векторних мір.

1. Згортки з векторними мірами. Під векторними мірами розуміємо зчисленно адитивні функції множини, які визначені на сигма-алгебрі борелевських підмножин повного сепарабельного метризовного топологічного лінійного простору X , приймають значення в сепарабельному банаховому просторі Y та мають скінченну повну варіацію.

Нехай m є векторною мірою. Тоді для кожного функціоналу f із спряженого до Y простору композиція $f \circ m$ цього функціоналу з m є скалярною мірою на X . Оскільки простір X є сепарабельним та метризовним, то з результатів роботи [7, с.62-63] випливає, що для кожної борелевської множини E функція $f \circ m (E - x)$ аргументу x є вимірною на цьому просторі. Таким чином, векторна функція $m (E - x)$ аргументу x є слабо вимірною на X . Оскільки простір Y , в якому вона приймає значення, є сепарабельним, то за теоремою Пеггіса [8, с. 187] ця векторна функція є також сильно вимірною. Оскільки для кожного x норма вектора $m (E - x)$ не перевищує повної напівваріації цієї векторної міри m , то ця норма є інтегрованою відносно кожної цілком скінченної скалярної міри на X з невід'ємними значеннями. Тому за теоремою Бохнера [8, с. 190] векторна функція $m (E - x)$ є інтегрованою за Бохнером відносно вказаної міри з невід'ємними значеннями. Це дає змогу ввести наступне означення.

Означення 1. Згорткою векторної міри m та скалярної знаковмінної міри ρ скінченної повної варіації називається така векторна міра $m * \rho$, значення якої на кожній борелевській множині E дорівнює різниці інтегралів Бохнера від векторної функції $m(E - x)$ аргументу x простору X відносно компонент розкладання Жордана знаковмінної міри ρ .

Зауваження 1. Дане означення є узагальненням означення згортки двох скалярних мір на X . Згортка скалярних мір на X розглядається в роботах [1, с. 150], [2, с. 44], [7, с.62-63].

Нехай H є лінійним підпростором простору X . Нагадаємо [4], що векторна міра називається H -неперервною в даній топології, якщо для кожного напрямку h з H нескінченно малі зсуви вздовж h приводять до нескінченно малої стосовно даної топології зміни векторної міри.

Нагадаємо також, що в просторі векторних мір основними є топології збіжності на системі вимірних множин, збіжності за іапівваріацією та збіжності за варіацією [9].

2. Випадок топології збіжності на системі вимірних множин. Спочатку нагадаємо, що варіація $v(m)$ векторної міри m має як функція множини властивість зчисленної адитивності [7, с.104], а тому вона є мірою, причому скалярною та невід'ємною.

Нагадаємо також, що верхня грань даної сім'ї скалярних мір – це така міра, яка мажорує кожну з мір цієї сім'ї і яка не перевищує жодної з інших мажорантних мір даної сім'ї.

Позначимо через B одиничну кулю спряженого до Y простору.

Лема 1. *Варіація $v(m)$ векторної міри m співпадає з верхньою гранню сім'ї невід'ємних мір $v(f \cdot m)$, що є варіаціями композицій даної векторної міри з функціоналами f , які належать множині B .*

Доведення. Із теореми Гана – Банаха випливає, що для кожної борелевської підмножини E простору X норма в просторі Y вектора $m(E)$ дорівнює $\sup\{f \cdot m(E), f \in B\}$. Оскільки $f \cdot m(E)$ не перевищує $v(f \cdot m)(E)$, то звідси легко одержати, що $v(m)$ не перевищує верхньої грані сім'ї мір $v(f \cdot m)$. З іншого боку, жодна з таких мір $v(f \cdot m)$ мажорується мірою $v(m)$, а тому верхня грань сім'ї цих мір не перевищує міри $v(m)$.

Теорема 1. *Нехай B знову є одиничною кулею спряженого до Y простору. Тоді для H -неперервності векторної міри m в топології збіжності на системі вимірних множин необхідно і досить, щоб для всіх функціоналів f з множини B скалярні міри $f \cdot m$ були H -неперервними.*

Доведення. Необхідність випливає з того факту, що композиція H -неперервної векторної міри та лінійного неперервного функціоналу є скалярною H -неперервною мірою. Обґрунтуємо достатність. Згідно з пропозицією 2 роботи [10, с. 770]» варіація H -неперервної скалярної міри теж H -неперервна. Тому з леми 1 даної статті випливає, що варіація нашої векторної міри співпадає з верхньою гранню деякої сім'ї H -неперервних невід'ємних мір. Але тоді з леми 1 роботи [11, с.105] випливає, що варіація H -неперервна. Згідно з теоремою 1 роботи [11, с. 105-106], цього досить для H -неперервності самої векторної міри в топології збіжності на системі вимірних множин. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай векторна міра m є H -неперервною в топології збіжності на системі вимірних множин. Тоді її згортка з довільною*

скалярною знакозмінною мірою ρ скінченної повної варіації теж H -неперервна в топології збіжності на системі вимірних множин.

Доведення. Позначимо нашу згортку через Q . Тоді для кожної борелевської множини E простору X , довільної збіжної до нуля числової послідовності (t_n) , кожного вектора h з підпростору H та довільного функціоналу f із спряженого до Y простору величина $f(Q(E + t_n h))$ дорівнює інтегралу від функції $(f_m)(E + t_n h - x)$ аргументу x простору X відносно міри ρ .

Послідовність підінтегральних функцій є рівномірно обмеженою (вона обмежується повною варіацією міри f_m) і збігається на просторі X до функції $f_m(E - x)$ аргументу x . Тому можна застосувати теорему Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла, звідки випливає H -неперервність скалярної міри $f(Q)$. Для завершення доведення залишається застосувати теорему 1.

3. Випадок топології збіжності за напівваріацією. Спочатку нагадаємо, що через m^h позначається зсунута векторна міра, значення якої на довільній борелевській множині E дорівнює $m(E + h)$.

Теорема 3. *Згортка H -неперервної за напівваріацією векторної міри m та довільної скалярної міри ρ скінченної повної варіації теж H -неперервна за напівваріацією.*

Доведення. Знову позначимо нашу згортку через Q . Тоді для довільного вектора h з підпростору H , кожного дійсного числа t та довільних неперерізних борелевських множин A та E величина $[(Q^h - Q)(A) - (Q^h - Q)(E)]$ дорівнює інтегралу відносно ρ від функції $[(m^h - m)(A - x) - (m^h - m)(E - x)]$ аргументу x простору X .

Підінтегральна функція мажорується повною напівваріацією векторної міри $(m^h - m)$. Звідси випливає, що норма інтеграла не перевищує добутку повної напівваріації векторної міри $(m^h - m)$ на константу, яка дорівнює повній варіації міри ρ . Але тоді норма величини $[(Q^h - Q)(A) - (Q^h - Q)(E)]$ теж не перевищує згаданого добутку. Оскільки неперервні борелевські множини A та E можна змінювати, то з урахуванням пропозиції 1 роботи [12, с. 3 Ю] одержуємо, що і повна напівваріація векторної міри $(Q^h - Q)$ не перевищує згаданого добутку. Звідси і випливає твердження теореми.

4. Випадок топології збіжності за варіацією.

Теорема 4. *Згортка H -неперервної за варіацією векторної міри m та довільної скалярної міри ρ скінченної повної варіації теж H -неперервна за варіацією.*

Доведення. Знову позначимо нашу згортку через Q . Тоді для довільного вектора h з підпростору H , кожного дійсного числа t та довільної борелевської множини E величина $(Q^h - Q)(E)$ дорівнює інтегралу відносно міри ρ від функції $(m^h - m)(E - x)$ аргументу x простору X .

Тому для довільної системи із скінченного числа неперерізних борелевських множин E_n сума норм величин $(Q^h - Q)(E_n)$ не перевищує

інтеграла відносно варіації $v(p)$ скалярної міри p від суми норм величин $(m_{th} - m)(E_{p-x})$, а ця остання не перевищує повної варіації векторної міри $(m_{th} - m)$. Тому після переходу в лівій частині нерівності до верхньої грані по множині всіх систем із скінченної кількості неперервних боелевських множин E_p одержуємо, що повна варіація векторної міри $(Q_{th} - Q)$ не перевищує добутку повної варіації векторної міри $(m_{th} - m)$ на константу, яка дорівнює повній варіації скалярної міри p . Звідси і випливає твердження теореми 4.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. Обобщённые функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах // Тр. Моск. Матем. О-ва. –1971.–т. 24.–С. 133–174.
2. Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, – М.: Наука, 1983. – 384 с.
3. Романов В.А. Пределы аналитических векторных мер // Укр. Матем. Журн. – 1992. – т. 44, № 8. – С. 1133 – 1135.
4. Романов В.А. Векторные меры различных классов гладкости и их пределы // Там же. – 1995. – т. 47, № 4. – С. 512 – 516.
5. Романов В.А. Применение мер к дифференциальным уравнениям. Кировоград: Редакционно–издательский центр Кировоградского Гос. Педаг. Ун – та, 2000.–24с.
6. Романов В. О. Різні види неперервності початкової умови в задачі Коші для векторних мір // Наук. Зал. Кіров. Держ. Педаг. Ун – ту. Сер. Фіз.-матем.наук. –2002. – вип.43. – С. 79 – 82.
7. Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А, Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
8. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ, 1962.–895 с.
10. Романов В. А. Интегральные операторы, порождаемые H -непрерывными мерами//Укр. Матем. Журн.– 1989. –т, 41, №6.–С. 769–773.
11. Романов В. О. Напрями неперервності та границі векторних мір // Наук. Зап. Кіровогр. Держ. Педаг. Ін-ту. – 1995. –т. 10. – С. 104 –108.
12. Романов В.А. О неэквивалентности трёх определений непрерывных направлений для векторных мер//Матем. Заметки.– 1995. –т, 57, №2.– С. 310 –312.

*Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка*

Надійшло 6 квітня 2004р.

УДК 519.17

АЛГЕБРИ ГРАФА І ВІДОБРАЖЕННЯ В^(Q)**К.М.Шевченко**

У цій роботі розглядається зв'язок подвійних суміжнісних алгебр довільного графа та його гомеоморфного образу. Отримані результати узагальнюються на випадок симетрично орієнтованих симетрично 1-мічених графів без кратних дуг з петлею в кожній вершині.

In this work is considered the connection of double adjacency algebras of any graph and its homeomorphic image. Received results are generalized for symmetrically oriented symmetrically 1-marked graphs without multiple arcs and with one loop in each vertex.

Вступ. Проблема ізоморфізму графів тісно пов'язана з теорією груп підстановок, для яких існують комутаторні алгебри, описані у Вейля [1]. Одним з напрямків дослідження цієї проблеми є застосування лінійної асоціативної алгебри, яка дає систему інваріантів графа, настільки сильну, що перші знайдені графи, для яких застосування цієї алгебри не розв'язало проблеми ізоморфізму, мали порядок 26 [2]. Алгебри графів дозволяють розв'язувати в комплексі проблеми ізоморфізму, побудови групи автоморфізмів, повної системи інваріантів графа та знаходження всіх графів даного порядку, для яких дана група підстановок є групою автоморфізмів [3-5]. Необхідність ідентифікації графів виникає і в теорії і безпосередньо з практичних проблем, зокрема в процесі автоматизації інформаційної служби в хімії. Вейсфейлер і Леман в 1968 р.[6] спробували розв'язати поставлену перед ними хіміками проблему пошуку алгоритму канонізації графа саме за допомогою алгебри графа.

Ще в 1959 р. Бос і Меснер [7] описали множину матриць, яка тепер називається стандартним базисом матричної алгебри, і побудували ряд конструкцій, які дають можливість для практичних застосувань. Ідейно це започатковано ще в 1939 р. У вивчення подібних об'єктів великий внесок зробив Хігмен у своїх працях про когерентні конфігурації [8-9]. У Біггса [10] описано суміжнісну алгебру графа. За аналогією описана в [6] алгебра графа нижче називається подвійною суміжнісною. За її допомогою проблему ізоморфізму та пов'язані з нею проблеми розв'язано для класу квазізовні площинних графів (KVP-графів) [11,3-5], а потім і для класів деяких їх φ -образів [12-13].

Ці класи графів замкнені відносно гомеоморфізмів [14]. Дана стаття присвячена питанням зв'язку між алгебрами графа G і його гомеоморфного образу і між відповідними алгебрами графа G_{η} , тінню якого є граф G , і утвореного з нього графа меншого порядку. Викладені в цій статті результати потрібні, щоб обґрунтувати розв'язання проблеми ізоморфізму для класів деяких φ -образів квазізовні площинних графів за допомогою алгебр. Ці результати доповідались на П'ятій Міжнародній Науковій Конференції імені академіка М.Кравчука [15].

1. Означення [16]. Подвійною лінійною асоціативною алгеброю над полем P називається система $(A, \oplus, \otimes, \circ, \{\omega_a / a \in P\})$, за умови, що системи $(A, \oplus, \otimes, \{\omega_a / a \in P\})$ і $(A, \oplus, \circ, \{\omega_a / a \in P\})$ є лінійними асоціативними алгебрами над полем P .

Нехай M_n – множина всіх квадратних матриць порядку n над полем Q , \circ – поелементне множення матриць.

Твердження 1 [16]. Система $(M_n, \div, \bullet, \circ, \{\omega_q / q \in Q\})$, $\omega_q(M) = qM$, $q \in Q$, є подвійною лінійною асоціативною алгеброю над полем Q .

Позначимо через \check{A} будь-яку підалгебру алгебри $(M_n, \div, \bullet, \circ, \{\omega_q / q \in Q\})$, а через \ddot{A} – будь-яку підалгебру алгебри $(M_n, \div, \bullet, \circ, \{\omega_q / q \in Q\})$.

Означення. Стандартним базисом [16] алгебри \check{A} називається множина $\{E_\mu\}_{\mu=1}^r$ її ненульових матриць, для якої виконується умова

$$(\forall \mu, \mu') (\mu, \mu' \in N_r) \left(E_\mu \circ E_{\mu'} = \begin{cases} E_\mu, & \mu' = \mu, \\ 0, & \mu' \neq \mu \end{cases} \right). \quad (1)$$

Різні стандартні базиси однієї алгебри можуть відрізнятися не більш ніж упорядкуванням (нумерацією) їх елементів. Нижче скрізь розглядається той стандартний базис, нумерація елементів якого зручна для даного доведення. Це не обмежує загальності висновків.

Означення [16]. Зростаючою послідовністю алгебр \check{A} , породженою множиною $\{M_l\}_{l=1}^s$, називається послідовність

$$A_1, A_2, \dots, A_b, \dots, \quad (2)$$

де $A_1 = \check{A}(\{M_l\}_{l=1}^s)$, $A_{t+1} = \check{A}(\{E_{t,\mu}\}_{\mu=1}^s \cup \{E_{t,\mu'} \bullet E_{t,\mu''} : \mu', \mu'' \in N_{r_t}\})$, (3) $\{E_{t,\mu}\}_{\mu=1}^s$ – стандартний базис алгебри A_t , $t=1, 2, \dots$.

Означення [16]. Зростаючою послідовністю різних алгебр \check{A} , породженою множиною $\{M_l\}_{l=1}^s$, називається максимальна по включенню підпослідовність послідовності (2), всі елементи якої різні.

Теорема 1 [16]. Зростаюча послідовність різних алгебр \check{A} , породжена множиною $\{M_l\}_{l=1}^s$, закінчується алгеброю $\ddot{A}(\{M_l\}_{l=1}^s)$.

2. Нижче мова йде про неорієнтовані графи G без кратних ребер і про орієнтовані графи $G_{\check{u}}$ без кратних дуг.

Означення [16]. l -міченим графом називається пара $(G_{\check{u}}, f_{\check{u}})$, $f_{\check{u}}: G_{\check{u}}^1 \rightarrow N$, $G_{\check{u}}^0 = \{a_i\}_{i=1}^n$, – множина вершин, $G_{\check{u}}^1$ – множина дуг графа $G_{\check{u}}$, $f_{\check{u}}(G_{\check{u}}^1) = \{\tau_i\}_{i=1}^b$ – множина міток дуг графа $G_{\check{u}}$.

Означення [16]. Орієнтований граф $G_{\check{u}}$ називається симетрично орієнтованим, якщо $(\forall a_i, a_j \in G_{\check{u}}^0) ((a_i a_j) \in G_{\check{u}}^1 \Rightarrow ((a_j a_i) \in G_{\check{u}}^1)$.

Означення [16]. Симетрично орієнтований l -мічений граф називається симетрично l -міченим, якщо $(\forall a_i, a_j, a_k, a_l \in G_{\check{u}}^0) ((f_{\check{u}}((a_i a_j)) = f_{\check{u}}((a_k a_l)) \Rightarrow f_{\check{u}}((a_j a_i)) = f_{\check{u}}((a_l a_k))) \wedge (k \neq l \Rightarrow f_{\check{u}}((a_i a_j)) \neq f_{\check{u}}((a_l a_k)))$.

Число $\tau_i = f_{\check{u}}((a_i a_i))$ називається міткою дуги $(a_i a_i)$.

Нижче скрізь під $G_{\bar{u}}$ розуміємо симетрично орієнтований симетрично 1-мічений граф.

Означення [16]. Тінню графа $G_{\bar{u}}$ називається простий граф G з тими ж множиною вершин і суміжністю, що і в графі $G_{\bar{u}}$.

Степінь вершини a_i в графі G позначається через $\rho(a_i, G)$. Граф $G_{\bar{u}}$ задається набором $\{A_{u,\tau}\}_{\tau=1}^b$ τ -матриць, що відповідають міткам його дуг і в сумі дають матрицю $A=A(G)=(a_{ij})$ суміжності вершин графа G .

Означення [16]. Ізоморфізмом одного графа $G_{\bar{u}}$ на другий називається такий ізоморфізм тині G графа $G_{\bar{u}}$ на тинь відповідного графа, який зберігає мітки дуг графа $G_{\bar{u}}$.

Проблеми ізоморфізму і симетрії довільних скінченних графів з кратними чи зваженими ребрами зводяться до тих же проблем для графів $G_{\bar{u}}$.

Означення. Головним орбіталом графа $G_{\bar{u}}$ називається орбітал, тобто система транзитивності групи автоморфізмів графа $G_{\bar{u}}$ на множині пар суміжних вершин графа $G_{\bar{u}}$.

Означення. Подвійною суміжнісною алгеброю графа $G_{\bar{u}}$ називається алгебра $\bar{A}(\{A_{u,\tau}\}_{\tau=1}^b \cup \{E_n, J_n\})$, де E_n, J_n – одиничні елементи повної матричної алгебри матриць порядку n відносно операцій звичайного і поелементного множення відповідно.

Скрізь нижче під алгеброю графа розуміємо його подвійну суміжнісну алгебру.

Означення. Будемо говорити, що алгебра графа $G_{\bar{u}}$ розділяє пари $(a_t, a_s), (a_k, a_l)$ (дуги $(a_t a_s), (a_k a_l) \in G_{\bar{u}}^1$), якщо в стандартному базисі алгебри графа $G_{\bar{u}}$ існує матриця $E_{\mu}=(e_{\mu,ij})$, в якій $e_{\mu,ts}=1, e_{\mu,kl}=0$; не розділяє дуги $(a_t a_s), (a_k a_l)$, якщо існує така матриця $E_{\mu}=(e_{\mu,ij})$, в якій $e_{\mu,ts}=e_{\mu,kl}=1$.

Означення. Будемо говорити, що алгебра графа $G_{\bar{u}}$ визначає орбітал O графа $G_{\bar{u}}$, якщо вона не розділяє пари $(a_t, a_s), (a_k, a_l)$ (дуги $(a_t a_s), (a_k a_l) \in G_{\bar{u}}^1$), якщо $(a_t a_s), (a_k a_l) \in O$, і розділяє пари $(a_t, a_s), (a_k, a_l)$, якщо $(a_t a_s) \in O, (a_k a_l) \notin O$.

3. Розглянемо довільний зв'язний граф $G_{\bar{u}}$, тинь G якого має хоча б одну вершину, степінь якої більший 2. Позначимо через c_j його підграфи, визначені наступними умовами. Тинь кожного підграфа c_j складається з вершин і ребер простого ланцюга або простого цикла графа G , всі вершини якого, крім кінцевих, мають степінь 2 в G , а степені кінцевих – 1 або більші 2. Нехай $c_j, j=1(1)k$, - всі підграфи графа $G_{\bar{u}}$, визначені цими умовами.

Позначимо через S_1 множини дуг усіх підграфів $c_j, j=1(1)k$, включаючи петлі в їх вершинах, а через S_2 – множини всіх інших дуг графа $G_{\bar{u}}$.

В [6] доведено факт, сформульований тут у вигляді наступного твердження.

Твердження 2. Існує така нумерація вершин графа $G_{\bar{u}}$, при якій діагональні матриці E_{μ} стандартного базису його алгебри визначають розбиття квадратної матриці порядку n на блоки: для кожного діагонального блока існує діагональна матриця E_{μ} , в якій вся головна діагональ цього блока

заповнена одиницями, а всі інші елементи в E_μ - нулі. Ненульові елементи будь-якої недиагональної матриці з того ж стандартного базису алгебри графа $G_{\tilde{u}}$ всі знаходяться в одному з блоків цього розбиття.

Нижче будемо розглядати ту нумерацію вершин графа $G_{\tilde{u}}$, яка описана в твердженні 2.

Лема 1. Алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ розділяє будь-які дві петлі $(a_s a_s) \in S_1$, $(a_r a_r) \in S_2$.

Доведення. Нехай $(a_l a_l) \in S_1$, $\rho(a_l, G) \leq 2$. Оскільки $\rho(a_r, G) > 2$, то вже алгебра графа G розділяє ребра, інцидентні вершинам a_r, a_l , бо ці вершини мають різні степені в графі G . Це доведено в [6]. Алгебра графа G є підалгеброю алгебри графа $G_{\tilde{u}}$. Елементи стандартного базису алгебри графа G є сумами елементів E_μ стандартного базису алгебри графа $G_{\tilde{u}}$. Тому і алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ розділяє петлі $(a_r a_r)$, $(a_l a_l)$.

Нехай тепер $(a_l a_l)$, $(a_s a_s) \in S_1$, $\rho(a_l, G) \leq 2$, $\rho(a_s, G) > 2$, $(a_r a_r) \in S_2$. Розглянемо будь-яку дугу $(a_r a_m)$ графа $G_{\tilde{u}}$ і дугу $(a_s a_l)$. Нехай $E_\mu = (e_{\mu, ij})$ – будь-яка матриця стандартного базису алгебри графа $G_{\tilde{u}}$. Нехай E_l - матриця, в якій $e_{1, sl} = 1$. Тоді з твердження 2 випливає, що $e_{1, rm} = 0$, бо $\rho(a_l, G) \leq 2$, $\rho(a_m, G) > 2$. Значить, алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ розділяє дуги $(a_s a_l)$ і $(a_r a_m)$. Якщо степені вершин a_s і a_r в графі G різні, то алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ розділяє петлі $(a_s a_s)$, $(a_r a_r)$. Якщо ж $\rho(a_s, G) = \rho(a_r, G)$, то розглянемо матрицю $D = (d_{ij})$, яка є сумою таких матриць E_μ , що для кожної дуги $(a_r a_l)$ графа $G_{\tilde{u}}$ в цю суму входить матриця E_μ , в якій $e_{\mu, rl} = 1$, і навпаки, для кожного $d_{rp} = 1$ $(a_r a_p)$ – дуга графа $G_{\tilde{u}}$, інцидентна вершині a_r . Матриця E_l не входить в цю суму, бо $e_{1, rm} = 0$. Тому в s -тому рядку матриці D менше одиниць, ніж в r -тому. Дійсно, кількість одиниць в її r -тому рядку рівна $\rho(a_r, G)$, що дорівнює $\rho(a_s, G)$. Але в s -тий рядок матриці D не входить 1, яка позначає дугу $(a_s a_l)$, бо $e_{1, sl} = 1$. Матриця D^T , отримана з матриці D транспонуванням, також належить до алгебри графа $G_{\tilde{u}}$. В матриці $D \cdot D^T$ кожен елемент головної діагоналі дорівнює сумі елементів рядка матриці D з тим же номером. Тому s -тий і r -тий елементи її головної діагоналі різні. Матриця $D \cdot D^T$ належить до алгебри графа $G_{\tilde{u}}$, тому є лінійною комбінацією елементів E_μ . А тому знайдеться діагональна матриця E_μ , в якій $e_{\mu, ss} = 1$, $e_{\mu, rr} = 0$. Таким чином алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ розділяє петлі $(a_s a_s)$ та $(a_r a_r)$.

Лема 2. Алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ розділяє будь-які дві дуги $(a_l a_l) \in S_1$, $(a_r a_m) \in S_2$.

Доведення. Щодо дуг $(a_r a_m)$, $(a_l a_s) \in S_1$, $\rho(a_s, G) > 2$, доведення леми 2 є частиною доведення леми 1. А якщо $\rho(a_l, G) \leq 2$, $\rho(a_r, G) \leq 2$, то алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ розділяє петлі $(a_l a_l)$ і $(a_r a_r)$, а також $(a_s a_s)$ і $(a_m a_m)$, бо $\rho(a_r, G) > 2$, $\rho(a_m, G) > 2$. З твердження 2 випливає, що тоді алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ розділяє і дуги $(a_l a_l)$ та $(a_r a_m)$.

Означення. Через $b^{(1)}(G)$ позначимо граф, отриманий з G видаленням зірки (a_i) , $\rho(a_i, G) = 1$, через $b^{(2)}(G)$ – граф, отриманий з G видаленням зірки (a_j) , $\rho(a_j, G) = 2$, $(a_j a_k)$, $(a_j a_l) \in (a_j)$, якщо $(a_k a_l) \in G^1$, і заміною зірки (a_j) ребром $(a_k a_l)$, якщо $(a_k a_l) \notin G^1$.

Означення. Через $b^{(q)}(G_{\tilde{u}})$, $q=1,2$, позначимо граф, тінь якого співпадає з $b^{(q)}(G)$.

Позначимо через $G_{\tilde{u},a}$ граф, отриманий з $G_{\tilde{u}}$ приписуванням всім його дугам нових міток. Однакові мітки отримують ті й лише ті дуги, які не розділяє алгебра графа $G_{\tilde{u}}$.

За допомогою перетворень $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ видалимо з графа $G_{\tilde{u}}$ всі дуги, що належать до S_1 , та всі ізольовані вершини, які при цьому утворюються. Потім знову приєднаємо до утвореного графа $(b^{(q)})^s(G_{\tilde{u}})$ всі щойно видалені вершини і петлі при них (тільки для спрощення подальших доведень) а також нові дуги $(a_l a_d)$ для тих $a_l, a_d \in c_j^0$, $l \neq d$, що $\rho(a_l, G) > 2$, $\rho(a_d, G) > 2$, $(a_l a_d) \notin G_{\tilde{u}}^1$. Якщо пара (a_t, a_s) , $\rho(a_t, G) > 2$, $\rho(a_s, G) > 2$, $a_t, a_s \in c_1^0$, належить до множини вершин не лише графа c_1 , а графів c_1, c_2, \dots, c_r , то позначимо через $G_{\tilde{u},t,s}$ об'єднання всіх таких підграфів c_1, c_2, \dots, c_r (рівність $t=s$ допускається), з мітками, які їх дуги мають у графі $G_{\tilde{u},a}$. Припишемо всім дугам $(a_t a_s) \in c_j^0$, $\rho(a_t, G) > 2$, $\rho(a_s, G) > 2$, $j=1(1)k$, що належать до новоутвореного графа, нові мітки, яких не має жодна інша дуга графа $G_{\tilde{u}}$. Двом дугам, які належали і до графа $G_{\tilde{u}}$, приписуємо однакові мітки тоді й лише тоді, коли алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ їх не розділяє, а двом приєднаним дугам $(a_l a_d)$, (a_t, a_s) – коли алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ не розділяє пари вершин (a_l, a_d) , (a_t, a_s) і коли відповідні їм підграфи $G_{\tilde{u},l,d}$, $G_{\tilde{u},t,s}$ ізоморфні, причому існує такий ізоморфізм $\psi: G_{\tilde{u},l,d} \rightarrow G_{\tilde{u},t,s}$, що $\psi(a_l) = a_t$, $\psi(a_d) = a_s$. Побудувати ізоморфізм підграфа $G_{\tilde{u},l,d}$ на підграф $G_{\tilde{u},t,s}$ легко, бо ці графи квазізовніплощинні, а для квазізовніплощинних графів існує ефективний алгоритм встановлення їх ізоморфності чи неізоморфності [5]. Приписування нових міток визначає відношення еквівалентності Φ на множині всіх дуг $(a_t a_s)$, $\rho(a_t, G) > 2$, $\rho(a_s, G) > 2$, $a_t, a_s \in c_j^0$, $j=1(1)k$. Дуги з однаковими мітками еквівалентні, з різними – ні. Утворений таким чином граф позначимо через G_a .

Зауваження 1. Графи $G_{\tilde{u}}$ і $G_{\tilde{u},a}$ мають однакові групи автоморфізмів, оскільки подвійна суміжнісна алгебра довільного графа не розділяє подібні пари його вершин. Аналогічно, і введення нових міток дуг графа $G_{\tilde{u}}$ і приєднаних дуг, яке визначає відношення Φ , не порушує симетрії графа $G_{\tilde{u}}$.

Нижче еквівалентними називаються ті й лише ті дуги графа G_a , які знаходяться у відношенні Φ .

Теорема. Алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ визначає головні орбітали графа $G_{\tilde{u}}$ тоді й лише тоді, коли алгебра графа G_a визначає головні орбітали графа G_a і є підалгеброю алгебри графа $G_{\tilde{u}}$.

Доведення. Необхідність. Нехай алгебра графа $G_{\tilde{u}}$ визначає його головні орбітали. Тоді, якщо вона не розділяє пари (a_l, a_d) , (a_t, a_s) , для яких $(a_l a_l)$, $(a_d a_d)$, $(a_t a_t)$, $(a_s a_s) \in S_1$, $\rho(a_l, G) > 2$, $\rho(a_d, G) > 2$, $\rho(a_t, G) > 2$, $\rho(a_s, G) > 2$, то петлі $(a_l a_l)$, $(a_t a_t)$ при $l=d$, $t=s$ а також, при $(a_l a_d)$, $(a_t a_s) \in G_{\tilde{u}}^1$, дуги $(a_l a_d)$, $(a_t a_s)$ еквівалентні.

Нехай тепер $(a_l a_d), (a_l a_s)$ - такі еквівалентні дуги графа G_a , еквівалентних дуг відповідні пари вершин не можуть належати до од-ного орбіталу, бо такі дуги мають різні мітки в графі G_a . Тоді алгебра графа G_a не розділяє ці дуги, як і подвійна суміжнісна алгебра будь-якого графа.

Нехай тепер $(a_l, a_d) \in O, (a_p, a_q) \notin O$, але дуги $(a_l a_d), (a_p a_q)$ еквівалентні в графі G_a . Припустимо, що алгебра графа G_a не розділяє $(a_l a_d)$ і $(a_p a_q)$, $(a_p a_q) \in G_a^1$. Якщо $(a_l a_d), (a_p a_q) \in G_{\tilde{H}}^1$, то $(a_l, a_d), (a_p, a_q)$ належать до головних орбіталів графа $G_{\tilde{H}}$. Якщо припустити, що всі вони належать до одного орбіталу графа $G_{\tilde{H}}$, то автоморфізм θ графа $G_{\tilde{H}}$, який відображає (a_l, a_d) на (a_p, a_q) , індукує автоморфізм θ_a графа G_a , бо в лемі 2 доведено, що алгебра графа $G_{\tilde{H}}$ розділяє будь-які дві петлі, одна з яких належить до S_1 , а друга – до S_2 . Отже, множина вершин зв'язної частини графа G_a складає деяку множину повних орбіт групи автоморфізмів графа $G_{\tilde{H}}$. Але автоморфізм θ_a відображає (a_l, a_d) на (a_p, a_q) , отже, ці пари належать до одного орбіталу графа G_a всупереч умові. Якщо $(a_l a_d) \notin G_{\tilde{H}}^1, (a_p a_q) \in G_{\tilde{H}}^1$, то $(a_l a_d)$ і $(a_p a_q)$ в графі G_a нееквівалентні, адже алгебра графа $G_{\tilde{H}}$ розділяє будь-яку пару дуг $(a_l a_d) \notin G_{\tilde{H}}^1, (a_p a_q) \in G_{\tilde{H}}^1$. Це також суперечить умові.

Нехай тепер $(a_l a_d) \notin G_{\tilde{H}}^1, (a_p a_q) \notin G_{\tilde{H}}^1$. За означенням відношення Φ з того, що $(a_l a_d)$ і $(a_p a_q)$ еквівалентні, випливає, що відповідні їм графи $G_{\tilde{H},l,d}$ та $G_{\tilde{H},p,q}$ ізоморфні. Звідси випливає, що для кожної дуги графа $G_{\tilde{H},l,d}$ знайдеться така дуга графа $G_{\tilde{H},p,q}$, що алгебра графа $G_{\tilde{H}}$ не розділяє ці дуги. Але алгебра графа $G_{\tilde{H}}$ визначає головні орбітали графа $G_{\tilde{H}}$, тому існує автоморфізм графа $G_{\tilde{H}}$, який відображає кінці однієї з цих дуг на кінці другої. Але кожен такий автоморфізм відображає весь підграф $G_{\tilde{H},l,d}$ на $G_{\tilde{H},p,q}$ і пару (a_l, a_d) на (a_p, a_q) . Це відомо з загальної теорії ізоморфізму графів. Тому і в цьому випадку залишаються справедливими міркування, проведені вище для $(a_l a_d), (a_p a_q) \notin G_{\tilde{H}}^1$, і висновок, що $(a_l a_d)$ і $(a_p a_q)$ належать до одного орбіталу графа G_a всупереч умові. Отже, алгебра графа G_a визначає його головні орбітали.

Достатність. Нехай алгебра графа G_a визначає головні орбітали графа G_a , $(a_l a_d)$ і $(a_p a_q)$ – дві дуги графа $G_{\tilde{H}}$, які є і в графі G_a , тільки, можливо, з іншими мітками. Якщо пари (a_l, a_d) та (a_p, a_q) належать до одного орбіталу графа $G_{\tilde{H}}$, то алгебра графа $G_{\tilde{H}}$ їх не розділяє, як і подвійна суміжнісна алгебра будь-якого графа. Нехай тепер пари (a_t, a_s) та (a_r, a_m) належать до різних орбіталів графа $G_{\tilde{H}}$. Якщо припустити, що алгебра графа $G_{\tilde{H}}$ їх не розділяє, то їх не розділяє і алгебра графа G_a , бо за умовою алгебра графа G_a є підалгеброю алгебри графа $G_{\tilde{H}}$. Але тоді вони належать до одного орбіталу O графа G_a , бо за умовою алгебра графа G_a визначає головні орбітали графа G_a . Нехай θ_a – такий автоморфізм зв'язної частини графа G_a , що $\theta_a(a_t) = a_r, \theta_a(a_s) = a_m$. Нехай тепер (a_l, a_d) та (a_p, a_q) – такі пари вершин графа G_a , що $a_l, a_d \in c_1^0, \rho(a_l, G) > 2, \rho(a_d, G) > 2, a_p, a_q \in c_2^0, \rho(a_p, G) > 2, \rho(a_q, G) > 2, \theta_a(a_l) = a_p, \theta_a(a_d) = a_q$. (За означенням відношення Φ такі пари вершин будь-який автоморфізм зв'язної частини графа G_a може відображати лише одну на

другу, а не на іншу пару вершин графа G_a). Тоді за означенням відношення Φ відповідні цим парам вершин графа $G_{\mathfrak{y},l,d}$ та $G_{\mathfrak{y},p,q}$ ізоморфні, причому існує такий ізоморфізм $\psi: G_{\mathfrak{y},l,d} \rightarrow G_{\mathfrak{y},p,q}$, що $\psi(a_l) = a_p, \psi(a_d) = a_q$. Але тоді автоморфізм θ_a можна продовжити ізоморфізмом ψ . Продовживши аналогічним чином даний автоморфізм θ_a зв'язної частини графа G_a ізоморфізмами ψ всіх графів $G_{\mathfrak{y},l,d}$ на відповідні їм графи $G_{\mathfrak{y},p,q}$, ми отримуємо автоморфізм графа $G_{\mathfrak{y}}$, який відображає (a_t, a_s) на (a_r, a_m) . Але це суперечить умові, що пари (a_t, a_s) та (a_r, a_m) належать до різних орбіталів графа $G_{\mathfrak{y}}$. Тому припущення, що алгебра графа $G_{\mathfrak{y}}$ не розділяє ці пари, приводить до суперечності. Алгебра графа $G_{\mathfrak{y}}$ їх розділяє. Отже, алгебра графа $G_{\mathfrak{y}}$ визначає головні орбітали графа $G_{\mathfrak{y}}$.

Зауваження 2. Теорема має місце і тоді, коли замінити граф $G_{\mathfrak{y}}$ простим графом G , бо простий граф можна розглядати, як симетрично орієнтований граф, всі дуги якого мають однакові мітки.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления – М., 1947. – 408 с.
2. Адельсон-Вельский Г.М., Вейсфейлер Б.Ю., Леман А.А., Фараджев И.А. Об одном примере графа, не имеющего транзитивной группы автоморфизмов // ДАН СССР, 185, 5., 1969. – С.975-976.
3. Хоменко Н.П., Шевченко Е.Н. Полная система инвариантов KVP-графа // Теория графов. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С.189-196.
4. Шевченко Е.Н. Группа KVP-графа // Теория графов. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С.197-201.
5. М.П.Хоменко, К.М.Шевченко. Дослідження проблем виділення і підрахунку, ізоморфізму і симетрії графів алгебричними методами// ДАН УРСР, Сер.А, 10, 1980. – С.22-26.
6. Вейсфейлер Б.Ю., Леман А.А. Приведение графа к каноническому виду и возникающая при этом алгебра// Сб. ВИНТИ, Сер.2, 9, 1968. – С.12-16.
7. Bose R.C., Mesner D.M. On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs// Ann. Math. Stat. V. 30, 1959/ - P.28-38.
8. Higman D.C. Coherent configurations. I// Rend. Sem. Padova. 44, 1970. – P.1-25. Math. (Roma). V.13, London – N.Y., 1974. – P.467-477.
9. Higman D.C. Shur relations for weighted adjacency algebras // Symp. Math. (Roma). V13, London-N.Y., 1974. -P.467-477.
10. Biggs N. Algebraic Graph Theory. – Cambridge. Cambridge Univ. Press., 1974. – 169 p.
11. Н.П.Хоменко, Е.Н.Шевченко. KVP-графы// Препринт Ин-та математики АН УССР, 77.17. – К., 1977.- 48 с.
12. Шевченко К.М. Розв'язання проблеми ізоморфізму і відшукування головних орбіталів $(KVP)_1$ -графів // Матеріали 7-ої Міжнародної Наукової Конференції імені академіка М.Кравчука, К., 1998. – С.505.
13. Шевченко К.М. Розв'язання проблеми ізоморфізму для деяких ϕ -образів порядку $n-2$ максимальних зовнішньоплощинних графів порядку n // Матеріали Українського математичного конгресу 2001, секція 1 “Алгебра і теорія чисел” – К.: Ін-т математики НАН України, 2001. – С.56.
14. К.М.Шевченко. Квазізовнішньоплощинні графи // Наукові записки КДПУ ім.В.Винниченка. Сер.: фізико-математичні науки, Вип.11, 1996. – С.27-37.

15. Шевченко К.М. Алгебри графів і відображення $b^{(q)}$ // П'ята Міжнародна Наукова Конференція імені академіка М.Кравчука, 1996. – С.494.
16. Хоменко Н.П., Шевченко Е.Н. Алгебры графов // Структура и топологические свойства графов. Препр.81.28. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С.34-54.

*Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка*

Надійшло 15 квітня 2004р.

УДК 512.552.1

НЕТЕРОВІ БІРЯДНІ КІЛЬЦЯ З СИЛЬНОЗВ'ЯЗНИМ САГАЙДАКОМ.

Ю. В. Яременко, Ю.М.Демченко.

Описано нетерові бірядні кільця з чотирьохточковим сильнозв'язним сагайдаком.

The noetherian biserial rings with four-dotted closely connected quiver are described in the article.

В статті розглядаються асоціативні кільця з $1 \neq 0$.

Бірядні кільця є важливим узагальненням добре відомих напівланцюгових кілець. Напівланцюгові кільця є напівдосконалими кільцями, над якими всі нерозкладні праві й ліві проєктивні модулі мають лінійну структуру підмодулів. Ці кільця характеризуються тим, що над ними всі скінченно зображувані модулі напівланцюгові. Цей клас кілець має безпосереднє використання в деяких питаннях лінійної алгебри і теорії абелевих груп.

Артинові бірядні кільця ввів Фуллер [1] в зв'язку з вивченням кілець дистрибутивного модульного типу. В роботі [2] поняття бірядного кільця перенесено на напівдосконалі кільця.

Нагадаємо, що кільце A називається **напівдосконалим**, якщо факторкільце A/R артинове і ідемпотенти можна піднімати за модулем радикала Джекобсона R [3].

Ідемпотенти можна піднімати за модулем R , якщо для будь-якого елемента $u \in A$, для якого $u^2 - u \in R$ існує елемент $e^2 = e \in A$ такий, що $e - u \in R$ (тобто існує ідемпотент в кільці A конгруентний з u за модулем R).

Теорема 1 [4]. *Кільце A напівдосконале тоді і тільки тоді, коли $1 \in A$ розкладається в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів.*

Нехай $1 = e_1 + \dots + e_n$ – розклад одиниці кільця A в суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів і $a = 1a1 = (e_1 + \dots + e_n)a(e_1 + \dots + e_n) =$

$$= \sum_{i,j=1}^n e_i a e_j.$$

Неважко перевірити, що це розклад кільця A в пряму суму абелевих груп $e_i A e_j$ ($i, j = 1, \dots, n$). Елементи із $e_i A e_j$ ми будемо позначати через a_{ij} . Будь-який елемент $a \in A$ зручно записувати у вигляді матриці (a_{ij}) . Кільце A зображується таким чином у вигляді кільця матриць з елементами із $A_{ij} = e_i A e_j$ з звичайними операціями додавання і множення. Таке представлення називається **двостороннім пірсовським розкладом кільця A** [5, с.31].

Модуль M називається **бірядним**, якщо він дистрибутивний і містить ланцюгові підмодулі K_1 і K_2 (можливо й рівні нулеві) такі, що $K_1 + K_2 = M$, або найбільший власний підмодуль в M , а $K_1 \cap K_2 = 0$, або простий модуль [2].

Напівдосконале кільце A називається **бірідним кільцем**, якщо кожний правий і кожний лівий головний A модуль бірідний [2].

Теорема 2 [2]. Нехай e – довільний ідемпотент бірідного кільця A . Тоді eAe являється бірідним кільцем.

Напівдосконале кільце A з радикалом Джекобсона R називається **зведеним**, якщо A/R є прямим добутком тіл [6].

За теоремою Моріти [7] категорія модулів над довільним напівдосконалим кільцем натурально-еквівалентна категорії модулів над зведеним кільцем. Тому при вивченні напівдосконалих кілець можна обмежитись зведеними кільцями.

Означення. Нехай A – нетерове справа напівдосконале кільце з радикалом Джекобсона R . P_1, \dots, P_s – всі попарно неізоморфні проективні нерозкладні A -модулі. Позначимо $P(P_i R)$ – проективне накриття модуля $P_i R$. Тоді

$$P(P_i R) = \bigoplus_{j=1}^s P_j^{t_{ij}} \quad (i, j = 1, \dots, s).$$

Поставимо у відповідність модулям P_1, \dots, P_s точки $1, \dots, s$ і сполучимо точку i з точкою j t_{ij} – стрілками. Отриманий граф називається сагайдаком нетерова справа напівдосконалим кільця A [6]. Позначимо його $K(A)$.

Теорема 3 [8]. Нехай A – нетерове бірідне кільце. Тоді із кожної точки сагайдака кільця A виходить не більше двох стрілок, в кожену точку сагайдака кільця A входить не більше двох стрілок, причому із однієї точки в другу (можливо й співпадаючу з першою) іде не більше однієї стрілки. Навпаки, якщо є скінченний граф, який задовольняє ці умови, то існує бірідне кільце, сагайдаком якого являється цей граф.

Лема 1 [8]. Якщо із точки сагайдака нетерового бірідного кільця виходить одна стрілка, то головний модуль, що відповідає цій точці – ланцюговий.

Розглянемо нетерові бірідні кільця, сагайдаки яких складаються з 4-х точок.

Тоді розклад одиниці кільця A у суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів матиме вигляд: $1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Позначимо $P_i = e_i A$, $Q_i = A e_i$, $U_i = P_i / P_i R$, $V_i = Q_i / R Q_i$, $A_{ij} = e_i A e_j$, R_i – радикал Джекобсона кільця A_{ii} , $i, j = 1, \dots, 4$.

За теоремою 2, і теоремами 10.5 [9] та 6.1 [10] $A_{ii} = \mathcal{G}_i$ – дискретно нормовані кільця, або однорядні кільця Кете, A_{ij} – циклічний лівий A_{ii} і циклічний правий A_{jj} – модуль.

Лема 2 [6]. Мають місце рівності $U_i e_j = 0$, $e_j V_i = 0$ при $i \neq j$ і $U_i e_i = U_i$, $e_i V_i = V_i$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Лема 3 [6]. Простий модуль U_k (V_k) входить в прямий розклад модуля $e_i R / e_i R^2$ ($R e_i / R^2 e_i$) тоді і тільки тоді, коли $e_i R^2 e_k$ ($e_k R^2 e_i$) строго міститься в $e_i R e_k$ ($e_k R e_i$).

Твердження 1 [8]. Для нетерових кілець єдиний правий максимальний A_{jj} – підмодуль в A_{ij} співпадає з єдиним лівим максимальним A_{ii} – підмодулем в A_{ij} .

Нагадаємо, що сагайдак називається *незв’язним*, якщо множину його точок можна розбити на дві множини, які не перетинаються і між якими немає стрілок.

У протилежному випадку сагайдак називається *зв’язним*.

Орієнтований граф називається *сильнозв’язним*, якщо із будь-якої його точки в іншу є шлях.

Якщо в сагайдаку відкинути петлі, то він називається *базовим*.

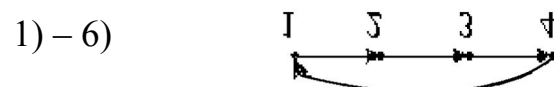
В роботі [11] описані нетерові бірядні кільця з чотирьохточковим ациклічним базовим сагайдаком.

Ми вкажемо будову всіх нетерових бірядних кілець, з сильнозв’язним чотирьохточковим сагайдаком.

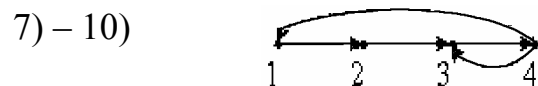
Враховуючи теорему 3 отримаємо 54 сильнозв’язних сагайдаки, побудовані на 4-х вершинах, а отже і 54 кільця, двосторонній пірсівський розклад яких має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & \mathcal{G}_2 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & \mathcal{G}_3 & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & \mathcal{G}_4 \end{pmatrix}, \text{ з умовами, накладеними на їх компоненти.}$$

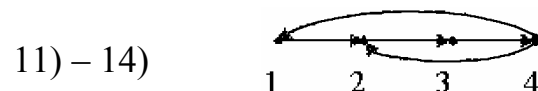
Для скорочення записів згрупуємо кільця, які мають однаковий базовий сагайдак. Отримаємо кільця A , з відповідними умовами:



- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$, 7) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 8) $A_{43} = A_{41}A_{12}A_{23}$,
 9) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{34}A_{41}A_{12}$,
 11) якщо в т. 3 немає петлі, то $R_3 = A_{34}A_{41}A_{12}A_{23}$, 12) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{41}A_{12}A_{23}A_{34}$.

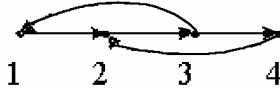


- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$, 7) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 8) $R_3 = A_{34}A_{43}$,
 9) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{34}A_{41}A_{12}$,
 11) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$,
 13) $A_{13} = 0$ або $R_3 = 0$.



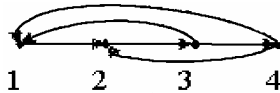
- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 7) $A_{43} = A_{42}A_{23}$, 8) $R_2 = A_{23}A_{34}A_{42}$,
 9) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) якщо в т. 3 немає петлі, то $R_3 = A_{34}A_{42}A_{23}$,
 11) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 12) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$,
 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32} = 0$.

15) – 17)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$ або $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 7) $A_{43} = A_{42}A_{23}$,
 8) $A_{41} = A_{42}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$,
 10) $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 11) $R_3 = A_{31}A_{12}A_{23}$, 12) $A_{21} = 0$ або $A_{24} = 0$,
 13) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$.

18)



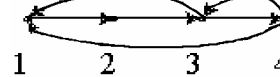
- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$ або $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 7) $A_{43} = A_{42}A_{23}$,
 8) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 9) $A_{34}A_{41} = A_{41}A_{12} = 0$, 10) $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$,
 11) $R_3 = A_{31}A_{12}A_{23}$, 12) $A_{21} = 0$ або $A_{24} = 0$, 13) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$.

19) – 26)



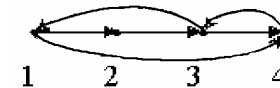
- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $A_{42} = A_{43}A_{31}A_{12}$, 8) якщо в т. 1
 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 =$
 $A_{23}A_{31}A_{12}$,
 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$,
 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $R_4 = 0$ або $A_{41} = 0$,
 15) $A_{24} = 0$ або $A_{21} = 0$.

27) – 28)



- 1). $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 8) $A_{34}A_{41} = A_{43}A_{31} =$
 0 , 9) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$,
 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$,
 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $A_{32} = 0$ або $A_{42} = 0$.

29) – 30)

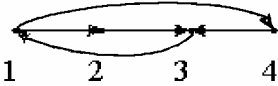


- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$ або $A_{13} = A_{14}A_{43}$, 2) $A_{31}A_{14} = 0$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$,
 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $A_{42} = A_{43}A_{31}A_{12}$,

8) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 2 немає петлі, то

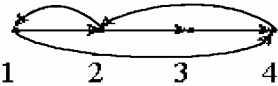
$R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $R_4 = 0$ або $A_{41} = 0$, 15) $A_{24} = 0$ або $A_{21} = 0$. 16) $A_{14}A_{43} = 0$ або $R_3 = 0$.

31) – 33)



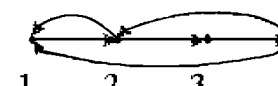
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$ або $A_{13} = A_{14}A_{43}$, 2) $A_{34} = A_{31}A_{14}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{32} = A_{31}A_{12}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $A_{42} = A_{43}A_{31}A_{12}$, 8) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) якщо в т. 2 немає петлі, то $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{32} = 0$ або $A_{34} = 0$.

34) – 35)



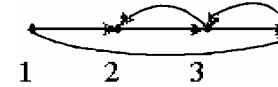
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{24} = A_{23}A_{34}$ або $A_{24} = A_{21}A_{14}$, 3) $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 4) $A_{31} = A_{34}A_{42}A_{21}$, 5) $A_{41} = A_{42}A_{21}$, 6) $A_{43} = A_{42}A_{23}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{21}$, 8) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 9) якщо в т. 3 немає петлі, то $R_3 = A_{34}A_{42}A_{23}$, 10) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 11) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$, 12) $A_{14}A_{42} = 0$, 13) $R_2 = 0$ або $A_{21}A_{14} = 0$, 14) $R_1 = 0$ або $A_{13} = 0$, 15) $R_1 = 0$ або $A_{41} = 0$, 16) $A_{43} = 0$ або $A_{41} = 0$.

36) – 37)



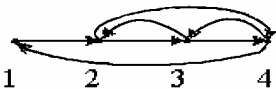
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{43} = A_{42}A_{23}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{21}$, 8) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 9) якщо в т. 3 немає петлі, то $R_3 = A_{34}A_{42}A_{23}$, 10) $R_4 = A_{42}A_{23}A_{34}$, 11) $A_{13} = 0$ або $A_{43} = 0$, 12) $A_{41}A_{12} = A_{42}A_{21} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32} = 0$, 14) $R_1 = 0$ або $A_{13} = 0$, 15) $A_{43} = 0$ або $A_{42}A_{21} = 0$.

38) – 39)



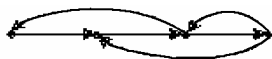
1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{34}A_{41}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 7) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 8) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 9) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, 10) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 11) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{13} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$, 14) $R_2 = 0$ або $A_{43}A_{32} = 0$, 15) $A_{43}A_{32} = 0$ або $R_4 = 0$, 16) $A_{24} = 0$ або $R_2 = 0$.

40) – 41)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{24}$, 3) $A_{21} = A_{24}A_{41}$, 4) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{24}A_{41}$, 5) $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$,
 7) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 8) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 9) $A_{14} = 0$ або $A_{13} = 0$.
 10) $A_{23}A_{34} = A_{24}A_{43} = A_{32}A_{24} = 0$, 11) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 12) $A_{13} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$, 14) $R_2 = 0$ або $A_{43}A_{32} = 0$, 15) $A_{43}A_{32} = 0$ або $R_4 = 0$, 16) $A_{21} = 0$ або $A_{31} = 0$

42) – 43)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$, 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$,
 5) $A_{23} = A_{31}A_{12}$ або $A_{23} = A_{34}A_{42}$, 6) $A_{41} = A_{43}A_{31}$, 7) $R_2 = A_{23}A_{31}A_{12}$, ,
 8) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$, 9) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) $A_{42}A_{23} = 0$, , 12) $A_{41} = 0$ або $A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$,
 14) $R_4 = 0$ або $A_{41} = 0$, 15) $A_{24} = 0$ або $A_{21} = 0$. 16) $R_3 = 0$ або $A_{34}A_{42} = 0$.

44)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{41} = A_{42}A_{21}$ або $A_{41} = A_{43}A_{31}$, ,
 4) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 5) $A_{23} = A_{31}A_{12}$ або $A_{23} = A_{34}A_{42}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{21}$,
 7) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 8) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 9) $A_{23}A_{31} = A_{42}A_{23} = 0$, 10) $R_3 = A_{34}A_{43}$,
 11) $R_2 = 0$ або $A_{31}A_{12} = 0$, 12) $R_1 = 0$ або $A_{42}A_{21} = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$,
 14) $R_1 = 0$ або $A_{13} = 0$, 15) $R_3 = 0$ або $A_{34}A_{42} = 0$, 16) $R_4 = 0$ або $A_{43}A_{31} = 0$.

45)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{24}$, 3) $A_{21} = A_{23}A_{31}$ або $A_{21} = A_{24}A_{41}$,
 4) $A_{34} = A_{32}A_{24}$, 5) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{23}A_{31}$,
 7) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 8) $R_3 = A_{32}A_{23}$, 9) $R_4 = A_{41}A_{12}A_{24}$ або $R_4 = A_{43}A_{32}A_{24}$,
 10) $A_{24}A_{41} = A_{31}A_{12} = A_{43}A_{31} = 0$, 11) $A_{14} = 0$ або $A_{34} = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або $R_3 = 0$, 13) $A_{14} = 0$ або $A_{13} = 0$, 14) $A_{34} = 0$ або $R_3 = 0$, 15) $A_{23}A_{31} = 0$ або $R_2 = 0$, 16) $A_{43}A_{32} = 0$ або $R_2 = 0$.

46)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{21} = A_{23}A_{31}$ або $A_{21} = A_{24}A_{41}$, 3) $A_{34} = A_{32}A_{24}$ або $A_{34} = A_{31}A_{14}$, 4) $R_1 = A_{14}A_{41}$, 5) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$,
 6) $R_4 = A_{41}A_{14}$, 7) $R_2 = A_{23}A_{32}$, 8) $R_3 = A_{32}A_{23}$, 9) $A_{12}A_{24} = 0$,

- 10) $A_{24}A_{41} = A_{31}A_{12} = A_{43}A_{31} = 0$, 11) $R_1 = 0$ або $A_{14}A_{43} = 0$,
 12) $A_{13} = 0$ або $R_3 = 0$, 13) $R_1 = 0$ або $A_{24}A_{41} = 0$, 14) $A_{32}A_{24} = 0$ або $R_3 = 0$,
 15) $A_{23}A_{31} = 0$ або $R_2 = 0$, 16) $A_{43}A_{32} = 0$ або $R_2 = 0$, 17) $R_4 = 0$ або $A_{41}A_{12} = 0$,
 18) $A_{31}A_{14} = 0$ або $R_4 = 0$.

47) – 48)



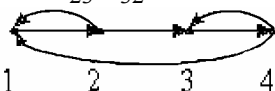
- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{34}A_{42}A_{21}$,
 5) $A_{32} = A_{34}A_{42}$, 6) $A_{41} = A_{42}A_{31}$, 7) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{21}$,
 8) $R_2 = A_{21}A_{12}$, 9) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 10) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 11) $A_{42}A_{23} = 0$, 12) $A_{13} = 0$
 або $R_1 = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $A_{41} = 0$ або $R_1 = 0$, 15) $A_{32} = 0$
 або
 $R_3 = 0$.

49) – 51)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{32}A_{21}$,
 5) $A_{41} = A_{43}A_{32}A_{21}$, 6) $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 7) якщо в т. 1 немає петлі, то $R_1 = A_{12}A_{21}$,
 8) якщо в т. 4 немає петлі, то $R_4 = A_{43}A_{34}$, 9) $R_2 = A_{21}A_{12}$ або $R_2 = A_{23}A_{32}$,
 10) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) $A_{13} = 0$ або $R_1 = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$,
 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 14) $A_{31} = 0$ або $R_1 = 0$, 15) $A_{24} = 0$ або $A_{23}A_{32} = 0$,
 16) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 17) $A_{42} = 0$ або $R_4 = 0$, 18) $A_{42} = 0$ або $A_{23}A_{32} = 0$.

52)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{34}A_{41}$,
 5) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$, 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$, 7) $R_1 = A_{12}A_{21}$, 8) $R_2 = A_{21}A_{12}$,
 9) $R_3 = A_{34}A_{43}$, 10) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 11) $A_{31} = 0$ або $R_3 = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або
 $R_1 = 0$, 13) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 14) $R_2 = 0$, або $A_{42} = 0$.

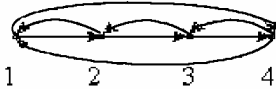
53)



- 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$, 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$, 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$, 4) $A_{31} = A_{32}A_{21}$ або
 $A_{31} = A_{34}A_{41}$, 5) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$, 6) $R_1 = A_{12}A_{21}$,
 7) $R_4 = A_{43}A_{34}$, 8) $A_{41}A_{12} = 0$ або $A_{21}A_{12} = 0$, 9) $R_2 = A_{21}A_{12}$ або $R_2 = A_{23}A_{32}$,
 10) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, 11) $A_{13} = 0$ або $R_1 = 0$, 12) $A_{13} = 0$ або
 $A_{32}A_{23} = 0$, 13) $A_{31} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, 14) $A_{31} = 0$ або $R_1 = 0$, 15) $A_{24} = 0$
 або $A_{23}A_{32} = 0$, 16) $A_{24} = 0$ або $R_4 = 0$, 17) $A_{34}A_{41} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$,

18) $R_4 = 0$ або $A_{43}A_{32} = 0$, 19) $A_{43}A_{32} = 0$ або $A_{23}A_{32} = 0$.

54)



- | | |
|--|--|
| 1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$ або $A_{13} = A_{14}A_{43}$, | 2) $A_{24} = A_{23}A_{34}$ або $A_{24} = A_{21}A_{14}$, |
| 3) $A_{31} = A_{32}A_{21}$ або $A_{31} = A_{34}A_{41}$, | 4) $A_{42} = A_{41}A_{12}$ або $A_{42} = A_{43}A_{32}$, |
| 5) $R_1 = A_{12}A_{21}$ або $R_1 = A_{14}A_{41}$, | 6) $R_2 = A_{21}A_{12}$ або $R_2 = A_{23}A_{32}$, |
| 7) $R_3 = A_{32}A_{23}$ або $R_3 = A_{34}A_{43}$, | 8) $R_4 = A_{41}A_{14}$ або $R_4 = A_{43}A_{34}$, |
| 9) $A_{12}A_{21} = 0$ або $A_{12}A_{23} = 0$, | 10) $A_{12}A_{21} = 0$ або $A_{32}A_{21} = 0$, |
| 11) $A_{12}A_{23} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, | 12) $A_{32}A_{21} = 0$ або $A_{32}A_{23} = 0$, |
| 13) $A_{23}A_{32} = 0$ або $A_{23}A_{34} = 0$, | 14) $A_{23}A_{32} = 0$ або $A_{43}A_{32} = 0$, |
| 15) $A_{23}A_{34} = 0$ або $A_{43}A_{34} = 0$, | 16) $A_{43}A_{32} = 0$ або $A_{43}A_{34} = 0$, |
| 17) $A_{41}A_{14} = 0$ або $A_{21}A_{14} = 0$, | 18) $A_{21}A_{14} = 0$ або $A_{21}A_{12} = 0$, |
| 19) $A_{41}A_{12} = 0$ або $A_{41}A_{14} = 0$, | 20) $A_{21}A_{14} = 0$ або $A_{21}A_{12} = 0$, |
| 21) $A_{14}A_{41} = 0$ або $A_{14}A_{43} = 0$, | 22) $A_{14}A_{43} = 0$ або $A_{34}A_{43} = 0$, |
| 23) $A_{34}A_{43} = 0$ або $A_{34}A_{41} = 0$, | 24) $A_{34}A_{41} = 0$ або $A_{14}A_{41} = 0$. |

Умови для розглядуваних кілець отримуються в ході наступних міркувань. Зупинимось, наприклад, на кільці з сагайдаком

52)



Так як кільце A – нетерове, то за лемою Накаями циклічний бімодуль A_{14} строго включає в себе підмодуль $A_{14}R_4 = R_1A_{14}$. Із точки 1 в точку 4 немає

стрілки, отже $\frac{A_{14}}{A_{14}R_4 + A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34}} = 0$ і $A_{14} = A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34}$. Із точки

1 в точку 3 немає стрілки, отже $\frac{A_{14}}{R_1A_{13} + A_{12}A_{23} + A_{14}A_{43}} = 0$ і

$A_{13} = A_{12}A_{23} + A_{14}A_{43}$. Із точки 2 в точку 4 немає стрілки, отже

$\frac{A_{24}}{A_{21}A_{14} + R_2A_{24} + A_{23}A_{34}} = 0$ і $A_{24} = A_{21}A_{14} + A_{23}A_{34}$.

Маємо $A_{13} = A_{12}A_{23} + (A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34})A_{43}$.

Так як $A_{12}A_{23} \supseteq (A_{12}A_{24} + A_{13}A_{34})A_{43}$, то

1) $A_{13} = A_{12}A_{23}$; 2) $A_{14} = A_{12}A_{23}A_{34}$; 3) $A_{24} = A_{23}A_{34}$.

Аналогічно 4) $A_{31} = A_{34}A_{41}$; 5) $A_{32} = A_{34}A_{41}A_{12}$; 6) $A_{42} = A_{41}A_{12}$.

В точці 1 немає петлі, тому $\frac{R_1}{R_1^2 + A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{14}A_{41}} = 0$. Тоді за

лемою Накаями $R_1 = A_{12}A_{21} + A_{13}A_{31} + A_{14}A_{41}$. Враховуючи рівності 1)-6) отримаємо:

7) $R_1 = A_{12}A_{21}$. Повністю аналогічно

8) $R_2 = A_{21}A_{12}$; 9) $R_3 = A_{34}A_{43}$; 10) $R_4 = A_{43}A_{34}$.

За лемою 1 модуль P_1 – ланцюговий.

$$P_1R^2 = (R_1, A_{12}R_2, A_{13}, A_{14}). \quad P_1R^3 = (R_1^2 + A_{13}A_{31}, A_{12}R_2, A_{13}R_3, A_{14}).$$

Якщо $R_1 \neq 0$ і $A_{13} \neq 0$, то за лемами 2 і 3 $\frac{P_1R^2}{P_1R^3} = u_1 + u_3$, що

неможливо для ланцюгового модуля.

Отже, маємо 11) $R_1=0$ або $A_{13}=0$. Аналогічно, розглянувши ланцюговий модуль P_3 і його підмодулі, отримуємо 12) $R_3=0$ або $A_{31}=0$. Ті ж міркування щодо лівих ланцюгових модулів Q_2 і Q_4 приводять до умов: 13) $A_{24}=0$ або $R_4=0$ і 14) $R_2=0$ або $A_{42}=0$.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Fuller K.R. Weakly symmetric rings of distributive module type // Comm. in Algebra. – 1977. – № 5. – P. 997-1008.
2. Кириченко В.В., Костюкевич П.П. Бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1986. – Т.38, № 6. – С. 718-723.
3. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 95. – P. 466-488.
4. Michler G. Structure of semi-perfect hereditary noetherian rings // J.Algebra. – 1969. – V. 13. – P. 327-344.
5. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. – К.: Вища шк., 1980. – 192 с.
6. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб. – 1976. – Т. 99, № 4. – С. 559-581.
7. Morita K., Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sc. Rep. Tokyo Kyuiku Daigaku. 1958. – V. 6. – P. 83-142.
8. Кириченко В.В., Яременко Ю.В. Нетеровы бирядные кольца // Укр. мат. журнал. – 1988. – Т.40, №4. – С. 435-440.
9. Кириченко В.В. Кольца и модули. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1981. – 64 с.
10. Кириченко В.В. Обобщенно однорядные кольца // К., 1975. – 58 с. – (Препр. АН Украины. Ин-т математики; 75.1).
11. Яременко Ю.В. Мінори четвертого порядку нетерових бірідних кілець з ациклічним базовим сагайдаком // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 2001. - №1. – С. 67-74.

ЗМІСТ

Авраменко О.В. МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ ВІД ТІЛА, ЗАНУРЕНОГО В РІДИНУ	3
Бобочко В.М. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ І НУЛЬОВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ СПЕКТРА ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА	11
Бондарь О.П. СИНГУЛЯРНОСТИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ГОМОЛОГИЙ НА ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ	29
Волков Ю.І. РОЗПОДІЛИ ФІБОНАЧЧІ	31
Денисенко П.Н. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ А-МЕТОДА В.К.ДЗЯДЫКА И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ СРЕДСТВАМИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	37
Євладенко В.М., Пігарьов Ю.П. ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ІНВАРІАНТАМИ T І R..	52
Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Петюренко А.І. ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ПЕРІОДИЧНИМИ ВІЛЬНИМИ ЧЛЕНАМИ	60
Петренюк В.І., Петровська Т.В. ПРО ХАРАКТЕРИСТИКИ АРЕХ-ГРАФІВ.	71
Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. ІСНУВАННЯ ДЕЯКИХ T-ФАКТОРІЗАЦІЙ ПОРЯДКУ 12.....	76
Романов В.О. ЗГОРТКИ З НЕПЕРЕРВНИМИ ВЕКТОРНИМИ МІРАМИ.....	88
Шевченко К.М. АЛГЕБРИ ГРАФА І ВІДОБРАЖЕННЯ $V^{(Q)}$	92
Яременко Ю.В., Демченко Ю.М. НЕТЕРОВІ БІРЯДНІ КІЛЬЦЯ З СИЛЬНОЗВ'ЯЗНИМ САГАЙДАКОМ.	100